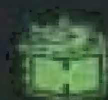


俄罗斯数学教材选译

数学分析讲义

(第3版)

□ Г.И.阿黑波夫　В.А.萨多夫尼奇　В.Н.丘巴里阔夫　著
□ 王昆扬　译



高等教育出版社
Higher Education Press



俄罗斯数学教材选译

● 数学天元基金资助项目

数学分析讲义

(第3版)

□ Г.И.阿黑波夫 В.А.萨多夫尼奇 В.Н.丘巴里阔夫 著
□ 王昆扬 译


高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01-2006-2998 号

Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков
Лекции по Математическому Анализу, 2004

Originally published in Russian under the title
Lectures of Mathematical Analysis
by G. I. Arhipov, V. A. Sadovnichii, V. N. Chubarikov

图书在版编目 (CIP) 数据

数学分析讲义: 第 3 版 / (俄罗斯) 阿黑波夫, (俄罗斯) 萨多夫尼奇, (俄罗斯) 丘巴里阔夫著; 王昆扬译. --北京: 高等教育出版社, 2006.6
ISBN 7-04-018306-4

I.数... II.①阿...②萨...③丘...④王...
III.数学分析 - 高等学校 - 教材 IV.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 057603 号

策划编辑 张小萍　**责任编辑** 赵天夫　**封面设计** 王凌波
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京新丰印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787 × 1092　1/16	版　　次	2006 年 6 月第 1 版
印　　张	35.75	印　　次	2006 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	650 000	定　　价	65.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　18306-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订，本系列中所列入的教材，以莫斯科大学的教材为主，也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材．有大学基础课程的教材，也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书．有些教材虽曾翻译出版，但经多次修订重版，面目已有较大变化，至今仍广泛采用、深受欢迎，反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力，对我们也是一个有益的借鉴．这一教材系列的出版，将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来，对推动我国数学课程设置和教学内容的改革，对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才，可望发挥积极的作用，并起着深远的影响，无疑值得庆贺，特为之序．

李大潜

2005 年 10 月

原书的序

在高等学校中完善教学内容和教学方法这个由来已久的问题，在我们的社会变革中获得了特别的现实性. 数学教育的最重要的基础是编写针对教学理论与实践的现代需要的教科书.

大科学家常有这样的风格，即以局外人的角度来观察通往所考察的问题的本质的各种相互矛盾的途径. 我们著名的同胞 Н. И. 罗巴切夫斯基写道："我确信这一真理，概念不应该靠死记硬背来获得，而应该从一开始就准确地、明晰地、确定地进行举一反三的消化,然后通过练习来巩固，以便通过练习将其深印于记忆之中，从而在日后的研究中能容易地予以使用." 本讲义的编写原则与著名学者的话是相近的.

《数学分析讲义》一书是一部符合综合大学和高等师范院校数学力学系该学科的大纲的教科书. 如实践所表明，此书亦可成功地为注重深入的数学研究的工科高等学校的学生所使用.

书中还解决了这样一个问题，即分离出必要的最低限度的为学好基本知识提供保障的附加材料. 作者们力图把叙述的通俗性与教科书所固有的严谨性结合起来. 高等学校的高等数学教学进程是从数学分析这一学科开始的. 此时，新概念之复杂及其数量之庞大常常压抑了对于课程内容的创造性理解. 为了正确地帮助读者尽快地进入状态，我们有意识地允许论断具有一定的局限性 —— 在学习过程中，读者自己会扩展到事物的各种不同的观点之间相互联系着的各个方面去.

数学分析的教学应该服从于为高级专门人才做必要的准备的特定的要求. 这些高级专门人才应该能在将来不仅获得新的学术成果而且还能在很大程度上决定数学的世界性的发展. 据此，数学分析课程作为整个数学教育的基础应该具有这样的特点：广泛地占有材料，严格而完全地进行证明. 此课程应该顾及数学发展的现代趋

势，同时应与顽固的保守主义相区别而继承保持祖国的数学的学校教育世世代代居于领先地位的教学传统. 分析课程也还应该准备好吸收更深刻的数学概念.

作者们首先力图通过通俗易懂的叙述以及证明的简化来减轻学习知识的负担. 应该注意, 短的证明并不总是简单的. 有时候越是短的证明越是难懂, 且实质上使内容的掌握更为困难. 我们的作法的出发点是, 应该使命题的证明和引入的例子都明显地具有鲜活性、趣味性, 有说服力并且具有非同寻常的简洁性. 为使论述和命题的写法更为简洁, 人们常常使用量词符号. 但是这常会使直接掌握所学内容变得困难, 并可能会限制对于逻辑推理的关注. 我们决不随便使用这些符号, 以便更易于把抽象概念与我们所能感知的外部世界的类似现象进行对照, 使概念更为直观.

下述内容似乎是首次载入教科书的: 依海涅意义的函数极限的一般概念, 欧拉求和公式、阿贝尔求和公式以及泊松求和公式的简单叙述, 关于若尔当可测性与黎曼可积性的联系的定理, 关于多重极限与累次极限的联系的定理, 关于沿集合基的两个累次极限相等的马尔可夫–戈登准则, 关于无穷行列式的庞加莱定理, 一般的斯托克斯公式基于推广三维向量分析的经典定理的经典方法的证明的叙述, 等等.

最后, 作者们对于 M. З. 伽拉叶夫, Φ. M. 马雷舍夫, A. M. 波罗苏叶夫, E. A. 什里亚叶夫以及我们的全体同事为本书以前各版的内容所作的各种有益的评论表示深深的感谢.

俄罗斯科学院院士

B. A. 萨多夫尼奇

目 录

第一部分

单变量函数的微分学

本书的这部分以作者们近年来在国立莫斯科罗蒙诺索夫大学数学力学系讲授数学分析的基础课程的四个学期中的第一学期的讲义为基础. 它的内容涵盖单变量函数的微分学.

应该注意在教科书和讲义的叙述风格之间的本质差异. 在教科书中, 通常命题的证明是由预先的解释和举例来准备好的, 而在讲义的行文中基本上把准确的提法和证明包含在内.

极限的概念在本书的第一部分中是基本的. 其中单变量的连续函数和可微函数的理论的研究是基本的.

还要注意一种情况. 在高等数学教育人门的每门课程 (通常是数学分析、代数和解析几何) 中, 第一讲常常用来叙述集合论基础. 相似的平行结构使部分学生对于"数学" 的对象在整体上产生了不正确的印象, 并使对于材料的感知变得困难. 对于这些新概念的抽象性之不习惯, 更加重了这种状态. 从一门学科的框架中把它们分离出去是不合适的, 因为在每门课程中对于所叙述的材料都要用集合论的事实进行处理. 通常要在一定形式下对这一特征予以注意.

第一章　引论

第一讲

§1. 集合. 集合的运算. 集合的笛卡儿乘积. 映射和函数

术语“数学分析”首先指的是 17 世纪牛顿和莱布尼茨所创立的微积分, 虽然分析的一些基本的概念形成得早得多. 现在人们把它在很大程度上看成是一个固定的学科. 然而, 由前已述不应做出结论说, 在数学分析中不含有进行科学研究和深入发现的内容. 事实是, 数学分析的组成部分是如此的浩繁巨大, 以至于像实变函数论、复变函数论、概率论、微分方程、数理统计、偏微分方程、数学物理方程、计算数学等等都早已变成独立的数学学科. 广义地说, 数学分析包括所有这些领域, 即几乎全部数学.

而从狭义上说, 作为一门学科, 数学分析是构成恐怕包括当代一切数学学科在内的公共的数学知识的最大组成部分. 因此, 数学分析在数学教育中起着完全独特的作用就是很明显的事了. 就本质而言, 它正是数学知识的基础.

不夸张地说, 分析课程的标志性的核心概念是以各种可能的方式表述的极限概念. 大体上你们从中学数学中已经知道这个概念了. 但是, 获得对于极限清楚的明确的了解, 却是学习分析课程的最大的困难, 也是学习分析课程的最重要的阶段.

每个人都应该也可能掌握这个概念, 因为这个概念要在各种不同的情境中继续使用. 对于能做到这一点的人, 在基础课程的进一步学习中, 勤奋比天份更重要.

极限概念是分析的主要概念，但不是唯一的概念. 它本身要依赖于集合、映射和函数的概念.

定义 1 集合是具有某种属性的对象的总体.

乍一看，这个定义毫无用处，因为被引入的概念，即"集合"，是用另外 4 个 (!) 我们从来不曾定义过的概念来确定的. 但并不完全如此，事实上，定义的用途就其本身而言，完全不在于引入逻辑上的严格性. 仅当"不严格"地引入的概念引起误解时才需要建立逻辑的严格性.

怎样判断什么导致误解，什么不导致误解呢? 对此现代数学中只有这样的手段：逻辑分析、实践和直觉.

有两种类型的定义：一种是把被定义的对象合乎逻辑地严格引导至已经引入的概念；另一种是借助于口头语言加以描述的定义.

集合的定义就是第二类型的定义. 数学中当然喜欢第一种定义，但是源起的概念，如集合的概念，就得用描述的方式引入. 有许多理由表明这是不好的，首要的理由就是这会导致矛盾 (即所谓的集合论的悖论). 但是没有别的办法，只好相信直觉. 健全的理智启示，一般说来别无它法可行 [19].

定义 2 其全体构成给定的集合的那些对象叫作该集合的元素或点.

我们常用大写拉丁字母表示不同的集合，而用小写拉丁字母表示这些集合中的元素.

定义 3 两个集合 X 和 Y 叫作是相等的，如果它们由同样的一些元素组成.

此事记作：

$$X = Y \quad \text{或} \quad Y = X.$$

若元素 a 属于集合 A，则记

$$a \in A \quad (\text{或 } A \ni a).$$

若 a 不属于 A，则此事记作

$$a \notin A \quad (\text{或 } a \overline{\in} A).$$

定义 4 如果集合 B 的所有的元素都属于集合 A，则 B 叫作是 A 的子集，并记作：

$$B \subset A \quad (\text{或 } A \supset B).$$

显然，若 $B \subset A$ 且 $A \subset B$，则 $A = B$.

在某一讨论中，把论及的所有的集合都看成是一个固定的集合 E 的子集，常常是比较方便的. 我们称这个固定的集合 E 为**万有的**. 这样一来，对于任何一个集合 A 都有

$$A \subset E.$$

为了确定起见, 说到某个集合 A(如刚才所说, 它是 E 的子集) 时, 我们应该有明确的标准、法则、条件、性质, 使得能据以确定哪些元素属于 A. 如果把这个条件用 α 表示的话, 那么由条件 α 确定集合 A 这件事将表示成下述形式:

$$A = \{a \in E \mid \alpha\}.$$

此式读作: 集合 A 由 (集合 E 的) 那些满足条件 α 的元素组成.

可能有这样的情形, 对于某种性质 α, 在整个集合 E 中全然不存在任何具有这种性质的元素. 为了符号的统一, 在这种情况下我们认为符号

$$A = \{a \in E \mid \alpha\}.$$

确定叫作**空集**的特殊的集合. 空集不含任何元素. 空集用符号 $\varnothing$ 代表. 用我们的记号, 作为例子可以这样写:

$$\varnothing = \{a \in E | a \neq a\}.$$

此处 α 是这样的性质, 它使 $a \neq a$.

为了简洁, 代替某些常用的表述而使用通用的叫作是量词的特殊的数学符号:

$\exists$ —— "存在";

$\exists!$ —— "存在恰一个元" 或 "存在唯一一个元";

$\forall$ —— "对于任意的", "对于一切";

$\Rightarrow$ —— "为真", "蕴含", "成立".

下述命题是这些符号写法的一个例子: $\forall A \subset E \Rightarrow \varnothing \subset A$. 这里, 结论是, 空集是 E 的任何子集的子集. 这个结论应该从我们的定义这样推出, 它意味着, 如果一个元素属于 $\varnothing$, 那么它就属于 A, 而事实上由于空集全然不含任何元素, 所以为了证实这个结论的真确性, 不必对任何一个元素来验证此事.

定义 5 集合 C 叫作集合 A 和 B 的并 (或和), 如果它恰由那些至少属于这两集之一的元素所组成.

集 A 与 B 的并集 C 表示为:

$$C = A \cup B.$$

集合的并的性质

1° $A \cup B = B \cup A$.

2° $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

定义 6 把由全体同时属于集合 A 与 B 的元素, 即这两个集合的公共元素组成的集合 C 叫作集 A 与 B 的交, 记作 $C = A \cap B$.[①]

① "记作 $C = A \cap B$" —— 语为译者所加.

集合的交的性质

1° $A \cap B = B \cap A$.

2° $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

证明两个集合相等就是证明任何属于等式右边部分的元素 x 都属于等式左边，且反之亦然.

对于任意的一族集合 A_α, 其中 α 取遍某个集合 I 的一切元素, 如果 C 是全体 A_α 的并集, $\alpha \in I$, 则记

$$C = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} A_\alpha,$$

类似地, 如果 C 是全体集合 A_α 的交, 则记

$$C = \bigcap_{\alpha} A_\alpha.$$

定义 7 由集合 A 中的不属于集合 B 的全体元素所成的集 C 叫作集合 A 与 B 的差, 记作 $C = A \backslash B$.

集合 $A' = E \backslash A$ 叫作 A 的补或集合 A 对于 E 的补. 如果指标集 I 就是简单的自然数集, 即 1,2,3,···, 那么记之为 $I = \mathbb{N}$[①], 而代替 $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ 和 $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ 写 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 和 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

定义 8 称集合

$$C = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

为集合 A 与 B 的对称差, 记之为 $C = A \triangle B$.

集合运算的性质

1° $A \subset A$.

2° $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$.

3° $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

4° $\varnothing \subset A \ \forall A$.

5° $\left(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha\right) \cap B = \bigcup\limits_{\alpha} (A_\alpha \cap B)$.

6° $\left(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha\right) \cup B = \bigcap\limits_{\alpha} (A_\alpha \cup B)$.

7° $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B, A \cap B = A$.

8° $A \cup A' = E, A \cap A' = \varnothing$.

9° $\varnothing' = E, E' = \varnothing$.

---

①我国规定用 N_+ 代表正整数集, 而自然数集含有数 0 —— 译者注.

10° $\left(\bigcup\limits_{\alpha} A_{\alpha}\right)' = \bigcap\limits_{\alpha} A'_{\alpha}$.

11° $\left(\bigcap\limits_{\alpha} A_{\alpha}\right)' = \bigcup\limits_{\alpha} A'_{\alpha}$.

12° $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

所有这些性质的证明都非常简单. 作为例子, 我们来演示如何证明最后一条性质. 我们应该证明, 如果 $C_1 = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ 且 $C_2 = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, 那么 $C_1 = C_2$. 这就是说, 必须证明下述断言:

1) $\forall a \in C_1 \Rightarrow a \in C_2$, 由此推出 $C_1 \subset C_2$;

2) $\forall a \in C_2 \Rightarrow a \in C_1$, 即 $C_2 \subset C_1$.

我们仅限于证明断言 1), 即 $C_1 \subset C_2$. 设 $a \in C_1$; 那么 $a \in A \cup B$ 但 $a \notin A \cap B$. 然而, 若 $a \in A \cup B$, 则或者 $a \in A$, 或者 $a \in B$. 考虑第一种情形, 即 $a \in A$. 此时 $A \notin B$, 因为否则的话将有 $a \in A \cap B$, 而这是不成立的. 那么 $a \in A \backslash B$, 由此 $a \in C_2 = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, 这就是要证的. 在第一种情形下, 我们证明了关系式 $C_1 \subset C_2$ 成立. 第二种情形的不同仅在于 A 和 B 的位置互换而已. 因此总有 $C_1 \subset C_2$.

定义了集合之后, 接下来一个同样是最重要的数学概念就是映射以及与其等价的函数概念. 但我们先给出集合的笛卡儿乘积的定义.

定义 9 集合 A 与 B 的笛卡儿乘积$C = A \times B$ 是这样的一个集合, 它由一切可能的元素对 (x, y) 组成, 每个这样的元素对的第一个元素 x 属于 A 而第二个元素 y 属于 B.

定义 10 两个集合的笛卡儿乘积 $A \times B$ 的子集 F 叫作是集合 A 到集合 B 的映射, 如果下述条件成立的话:

$$\forall x \in A \quad \exists!(x, y) \in F.$$

例 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$. 那么集合 $A \times B$ 的子集 $F = \{(1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$ 是映射, 而子集 $\Phi = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$ 不是映射.

"映射" 与 "函数" 这两个概念是同义的, 只是书写符号和使用环境有所不同而已. 我们将更多地使用 "函数" 一语. 把 F 是 A 到 B 的映射写成:

$$F : A \to B \quad \text{或} \quad A \xrightarrow{F} B.$$

定义 11 设映射 $F : A \to B$ 以如下方式定义:$\forall x \in A \;\; \exists! y \in B$ 使得 $(x, y) \in F$. 那么, 元素 y 叫作是 x 在映射 F 之下的像, 且记之为

$$y = F(x).$$

元素 x 叫作是**元素 y 的一个逆像**.

全体元素 $F(x), \forall x \in A$ 的集合 $F(A)$ 叫作在映射 F 下集合 A 的**像**, 即

$$F(A) = \{y \in B | y = F(x), x \in A\}.$$

对于集合 $C = F(A)$ 而言, 集合 A 本身在映射 F 之下叫作集合 C 的 **(完全) 逆像**.

正如已经说明了的, 术语 "映射" 和 "函数" 是同义的. 但在使用 "函数" 一词时, 通常把所有的术语都换一个说法. 集合 A 叫作**定义域**, 而集合 $F(A) \subset B$ 叫作是**值集** (或**值域**). 每个元素 $x \in A$ 都叫作**自变量的值** (或简称为**自变量**), 而元素 $y = F(x)$ 叫作是**函数在点 x 处的值**.

为了具体给出某一映射, 即函数, 一般说来必须确定一种从笛卡儿乘积 $A \times B$ 中选出具有所需性质的集合 F 的方式 (法则). 指明这种方式实质上就是给出函数. 因此, 对于函数通常使用下述定义:

定义 12 *把一个这样的法则叫作函数 F, 按照这个法则对于每个元素 $x \in A$ 恰有集合 B 的一个元素 y 与之对应, 并记 $y = F(x)$.*

这个定义的缺点在于, 函数是法则, 而不是如前所述的集合, 这是不自然的, 因为从中学的数学课程中就知道, 函数是可以进行加法、乘法以及其他算术运算的.

"映射" 一语的使用在表述上更具几何特色, 而 "函数" 一语则更具解析特色.

我们来考察映射的某些分类, 反函数以及双方单值对应.

映射 F 叫作是**满射**, 或**映上的** (即 A 映到 B 上的), 或者叫作**覆盖**, 如果 $F(A) = B$.

映射 F 叫作是**单射**, 或**嵌入**, 如果对于每个点 $y = F(x)$ 只存在一个逆像, 也就是说, 从条件 $y = F(x_1) = F(x_2)$ 必推出 $x_1 = x_2$.

映射 F 叫作是**双射**, 或**双方单值**的, 如果它同时既是覆盖也是嵌入. 在这种情况下, 对应于映射 $F : A \to B$ 可以按下述法则做成**逆映射** $F^{-1} : B \to A$: 代替笛卡儿乘积 $A \times B$ 中的元素对 (x, y), 把经过交换 x 和 y 的位置所得的 (y, x) 看作是 $B \times A$ 中的元素对. 显然, F^{-1} 也是同类的映射. 此外,

$$F^{-1}(F(x)) = x \quad \forall x \in A \quad 且 \quad F(F^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B.$$

双射也叫作**双方单值对应**或**一一对应**.

第二讲

§2. 对等的集合. 可数集和不可数集. 连续统的势

双方单值对应的概念在把集合的元素“数目”的概念从有限集情形推广到无限集情形时起着重大的作用. 由于我们通常总是同无限集打交道, 这一推广是必须的. 下面列出我们常遇到的无限集:

$\mathbb{N}$ —— 自然级数的全体数字的集合;

$\mathbb{Z}$ —— 全体整数 (正的整数, 负的整数以及零) 的集合;

$\mathbb{R}$ —— 实直线上的实数的集合;

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ —— 坐标平面上的点的集合.

只能对于有限集谈集合的点的数目, 而对于无限集是不可以的. 在无限集的情形, 要谈集合的势. 从而, 集合的势这个概念乃是“元素数目”概念向无限集情形的推广. 而若集合是有限的, 则“集合的势”与“集合的元素数目”这两个术语是同义的.

定义 13 *集合 A 与 B 叫作是对等的或等势的, 如果在它们之间可以建立双方单值对应. 此事记作: $A\sim B$.*

集合的性质

1° $A\sim A$.

2° $A\sim B\Rightarrow B\sim A$.

3° $A\sim B, B\sim C\Rightarrow A\sim C$.

换言之, 对等就是可以把一个集合一一对应到另一个集合. 若 A 与 B 对等, 则也说它们具有同样的势.

我们引入关于无穷集合对等的一个重要的例子.

命题 1 *(自然数的) 集合 $\mathbb{N}$ 和 (有理数的) 集合 $\mathbb{Q}$ (即一切分数 $\dfrac{m}{n}, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}, (m,n)=1$ 的集合) 对等.*

这里记号 (m,n) 代表数 m 和 n 的最大公约数.

► 只需表明如何给每个有理数编上一个特有的号码. 为此, 把每个有理数都写成既约分数的形式:

$$r=\frac{p}{q},\quad p\in\mathbb{Z},\quad q\in\mathbb{N},\quad (p,q)=1.$$

这样的表示是唯一的. 我们称 $|p| + q = h$ 为有理数 $r = \frac{p}{q}$ 的高度. 这个高度本身是个自然数, 也就是说它取值于 $1, 2, 3, \cdots$. 对于固定的 $h > 1$, 存在不多于 $2h$ 个不同的既约分数, 这是因为分母可取的值是 $1, 2, \cdots, h-1$ (其数目为 $h-1$), 而当 q 确定时, 数 r 的分子 p 可取的值不多于两个: $\pm(h-q)$ (更准确地说, 若分数 $\frac{p}{q}$ 是既约的则取两个值, 若此分数可约, 则取零个值, 因为此时它的既约分数表示式有另外的 q 值). 于是, 具有给定高度 h 的有理数的个数不多于 $2(h-1) < 2h$.

我们按照 h 的增序来给分数编号; 对于固定的 h, 则依照 q 的增序, 而当 h 和 q 固定时则依照 p 的增序. 那么我们得到

$$r_1 = \frac{0}{1} = 0 \qquad (h=1),$$

$$r_2 = \frac{-1}{1} = -1, \quad r_3 = \frac{1}{1} = 1 \qquad (h=2),$$

$$\left.\begin{array}{ll} r_4 = \dfrac{-2}{1} = -2, & r_5 = \dfrac{2}{1} = 2 \\ r_6 = \dfrac{-1}{2}, & r_7 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \qquad (h=3),$$

$$\left.\begin{array}{ll} r_8 = \dfrac{-3}{1} = -3, & r_9 = \dfrac{3}{1} = 3 \\ r_{10} = -\dfrac{1}{3}, & r_{11} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \qquad (h=4),$$

等等.

显然, 每个有理数都适时地获得自己的序号. 同时所有的号码 $1, 2, 3 \cdots$ 都会被用到, 且不同的有理数得到不同的号码. 这样就建立了集合 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{N}$ 的双方单值对应. ◄

定义 14 任何与自然数集对等 (等势) 的集合叫作可数集.

如我们已证明的, 有理数集是可数集.

命题 2 可数集的任何非空的子集是有限集或可数集.

► 给可数集的元素编上号码, 然后把子集的元素按照这些号码的增序重新编号. 如果在有限步之后把整个子集编好了, 则它是有限集, 否则它是可数集. ◄

命题 3 有限个或可数个可数集的和是可数集.

► 按下图给和集的元素编号:

$$\begin{array}{lllll}
A_1 = (a_{11}, & a_{12}, \rightarrow & a_{13}, & \cdots), \\
\quad\ \downarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow \\
A_2 = (a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \cdots), \\
 & \swarrow & \nearrow & \swarrow \\
A_3 = (a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \cdots), \\
\quad\ \downarrow & \nearrow & \swarrow & \\
\cdots\quad \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

(其间, 删除已遇到过的元素). 在 $2r^2$ 步之后, 将显然编完所有的元素 $a_{k,l}, k+l \leqslant r$. ◄

我们注意到, 在命题 1—3 中考察的无限集都是等势的, 确言之, 它们都是可数的. 但并非一切无限集都等势. 下述断言成立.

定理 1 任何集合 X 的全体子集所成的集合 $Z = \Omega(X)$ 不与 X 对等.

这个定理 (确言之是其变形: $\mathbb{N} \nsim \mathbb{R}$) 是 G. 康托尔 (1845—1918) 于 1874 年证明的.

► 用反证法. 设 $Z \sim X$. 就是说, 有一个一一对应 $X \xrightarrow{F} Z$. 那么, 若 $a \in X$ 则有 $A \in Z$ 单值地与它对应, 即 $F(a) = A, F^{-1}(A) = a$. 现将任何点 $a \in X$, 只要它属于自己的像, 即 $a \in F(a)$, 就叫作是**正常**的. 而在相反的情况下就称此点 a 为**特殊点**. 把由全体特殊点 $a \in X$ 组成的集 $D \subset X$ 叫作**亏集**. 那么, 显然 D 是集 Z 的一个元. 由于在集 X 和 Z 之间有双方单值对应 F, 所以存在这样一个点 $d \in X$, 使得 $F(d) = D$. 此时, 点 d 本身必定或是正常的, 或是特殊的. 但第一种情况不能发生, 否则的话, 根据正常点的定义, 点 d 将属于 $D = F(d)$, 而这是不可能的, 因为按 D 的构造, 只有特殊点才属于 D. 但是第二种情况导致矛盾, 因为那样的话, 根据特殊点的定义, $d \notin F(d) = D$, 而另一方面点 d 作为特殊点则根据亏集的定义又应该属于 D.

这样一来, 在 Z 和 X 之间存在双射的假定在任何情况下都导致矛盾, 这就是说 $Z \nsim X$. ◄

应该看到, 无论是定理 1 的结论还是它的证明, 当 X 是空集 $\varnothing$ 时都是成立的. 这时集 X 的势等于 0, 而集 $Z = \Omega(X)$ 恰由一个元, 即 X 自己构成, 从而它的势等于 $1 = 2^0$. 我们还发现, 对于由 k 个元素组成的有限集 X, 集 $Z = \Omega(X)$ 的势确切地等于 2^k.

定义 15 不对等于 $\mathbb{N}$ 的无限集叫作是不可数的.

例如, 根据定理 1,$\mathbb{N}$ 的子集的集合是不可数集, 而这就意味着, 由 0 和 1 组成数列 (根据数 k 属于子集与否而决定第 k 项是 1 还是 0) 的集合不可数.

我们用来证明定理 1 的方法叫作**康托尔对角线法**. G. 康托尔于 1874 年第一个使用这个方法证明线段上的点的不可数性. 这个方法之所以叫作对角线法, 是因为如果在定理 1 中取自然数集 $\mathbb{N}$ 作 X, 那么得到的子集的集合就是由数字 0 和 1 组成的数列的全体, 它不对等于 X. 在这种情况下, 定理 1 的证明可以如下方式进行.

► 假定 $\mathbb{N} \sim Z = \Omega(\mathbb{N})$. 那么有双方单值对应

$$1 \leftrightarrow H_1 = (h_{11}, h_{12}, h_{13}, \cdots),$$
$$2 \leftrightarrow H_2 = (h_{21}, h_{22}, h_{23}, \cdots),$$

等等 (这里符号 $H_1, H_2, \cdots$ 代表某些互不相同的由 0 和 1 组成的数列).

我们取出由对角线元素组成的数列 $(h_{11}, h_{22}, h_{33}, \cdots)$[①], 并且把它的每一位数都做相反的改变, 即把 1 变为 0, 把 0 变为 1. 我们得到: $H = (\bar{h}_{21}, \bar{h}_{22}, \bar{h}_{23}, \cdots)$. 这个元素不与诸 H_m 中的任何一个重合, 也就是说它没有被编上号码. 产生了矛盾. ◄

定义 16 与由 0 和 1 组成的数列的全体所成的集合对等的集合的势叫作连续统的势.

命题 4 线段 $[0,1]$ 的点的集合 I 具有连续统的势.

► 单位线段 $[0,1]$ 的每点都可用二进制写成如下形式:

$$0.h_1h_2h_3\cdots, \quad h_k = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

除了形如 $\frac{n}{2^k}, k, n \in \mathbb{N}$ 的数以外, 这种写法是唯一的. 而每个此种形式的数恰对应两种写法 (一种是从某一号码开始往后所有的数字都等于 0, 而另一种则是从某一号码开始往后所有的数字都等于 1). 对于除去形如 $\frac{n}{2^k}$ 的点外的所有的点, 这样来建立对应关系:

$$x = (x_1, x_2, \cdots) \leftrightarrow 0.x_1x_2\cdots.$$

而由于形如 $\frac{n}{2^k}$ 的点的集合是可数集, 从而与这些数对应的数列的集合同样是可数集. 因此在这两个集合之间可建立双方单值对应. 而这就将建立起线段 $[0,1]$ 的点与由 0 和 1 组成的数列的集合之间的双方单值对应, 也就是说, 线段的点的集合具有连续统的势. ◄

---

①原文误作 $(h_{11}, h_{12}, h_{13}, \cdots)$—— 译者注.

第三讲

§3. 实数

数学分析课程的研究对象主要是数值函数, 这些数值函数的定义域和值集是数轴, 线段, 区间, 数轴上的区段或其他某种子集. 这里需要有比中学数学大纲所涉及的关于实数的更深刻的认识. 不过, 我们强调指出, 我们将完全引用这些认识, 而仅只对那些实际上非常需要弄明确的地方加以说明.

关于有理数我们不再做任何解释. 有理数就是通常的分数. 周知, 那些不是有理数的实数叫作**无理数**.

应该看到, 实数, 无论是有理数还是无理数, 在自然界中并不存在. 它们是人类理智为了实际需要而做出的抽象发明. 可以说, 数 "产生了数学本身", 进而数学把自身的需求寄托于数. 其间, 仅有有理数一种是不能应对这些需求的.

数学中的数的最简单和最自然的用途是测量线段的长度. 这就是说, 每个线段的长度都应借助实数来量度. 另一方面, 我们发现譬如说, 在平面坐标系中单位正方形的对角线不能用有理数 α 来量度.

实际上, 如果这个数是有理数, 那么 $\alpha = \frac{m}{n}, (m, n) = 1$, 则根据毕达哥拉斯定理, 有 $\alpha^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$. 因此 $m^2 = 2n^2$. 考察可能的情形: 1) m 是奇数; 2) m 是偶数.

1) 若 m 是奇数, 则 $m = 2k+1, m^2 = 4k^2+4k+1$ 是奇数, 从而等式 $m^2 = 2n^2$ 不可能成立.

2) 若 m 是偶数, 则 $m = 2k, m^2 = 4k^2$ 且 $2k^2 = n^2$. 于是经类似的论证得知 n 也是偶数. 而这表明 m 和 n 这两个数皆被 2 整除, 由此 $(m, n) \geqslant 2$, 这与条件矛盾. 这表明, α 不是有理数, 此即所欲证者.

测量线段 (相对于预先给定的 "标准" 单位线段) 的长度的问题, 借助于无限十进小数完全解决了. 我们就把无限十进小数叫作实 (实在的) 数.

于是, **实数**乃是带 "正" 号或 "负" 号的无限十进小数.

注 1. "正" 号在书写中可略去.

2. 十进有理数,[①] 即形如 $\frac{h}{10^k}$ 的数, 同时有两种表示法, 它们对于我们来说是同一的, 因而我们可以舍弃那些从某一位开始其后都是数字 9 的十进小数.

3. 我们把实数与作为实数集的表示的实数轴的点等同看待.

4. 全体实数的集合用字母 $\mathbb{R}$ 来代表.

[①]这只是有理数的一部分 —— 译者注.

实数的基本性质

1° 对于 a, b, 有: 或者 $a = b, b = a$, 或者 $a > b, b < a$, 或者 $a < b, b > a$.

2° 若 $a > b, b > c$, 则 $a > c$. 若 $a = b, b = c$, 则 $a = c$.

3° 对于 $a, b \in \mathbb{R}$ $\exists!$ 数 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $a + b = c$.

4° 对于 $a, b, c \in \mathbb{R}$①有 $(a + b) + c = a + (b + c)$.

5° 对于 $a, b \in \mathbb{R}$ 有 $a + b = b + a$.

6° $\exists!$ 数 $0 \in \mathbb{R}$ 使得 $a + 0 = 0 + a$.

7° 对于 $a \in \mathbb{R}$ $\exists!(-a) \in \mathbb{R}$ 使得 $a + (-a) = 0$.

8° 对于 $a, b \in \mathbb{R}$ $\exists! c \in \mathbb{R}$ 使得 $ab = c$.

9° 对于 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 有 $(ab)c = a(bc)$.

10° 对于 $a, b \in \mathbb{R}$ 有 $ab = ba$.

11° $\exists!$ 数 $1 \neq 0$ 使得 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

12° 对于 $a \neq 0$ $\exists!$ a^{-1} 使得 $aa^{-1} = 1$.

13° $(a + b)c = ac + bc$.

14° 若 $a > b$, 则 $a + c > b + c$.

15° 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

上述性质是反映譬如线段的长度、矩形的面积、平行六面体的体积等最简单的数学对象的数量特征, 以及反映这些量在各种变换之下的改变所必备的性质.

数字的无限小数写法, 等同于数字本身, 也可以看成是数的一条类似的性质. 另一方面, 定义十进表示序列的递归程序, 对于由无限十进小数给出的两个实数进行算术运算的结果, 必须符合性质 1°~15°. 这些程序可以根据无限十进小数的值的比较原则来规定. 我们将在证明实数集的完备性时来考察这个比较原则.

实数性质的先验性, 即这些性质被用来作为建立进一步理论的出发点. 人们把这种先验性引向把这些性质作为公理的思想, 这些公理 (连同另两条性质一起) 确定了实数集本身. 但是这样的途径并不完全适合于我们, 因为自然数的概念并未明确地以逻辑法则的形式出现, 而我们在自己的论述中凭靠着这些法则 [19].

不过我们要强调指出, 在数学的其他领域中在为未知的原理奠基时, 公理化方法的独特的有效性. 由欧几里得演绎的初等几何公理系统就是这样一个十分漂亮的例子.

还有几个实数的重要性质. 首先一个就是阿基米德公理 (阿基米德, 公元前 287 — 前 212). 阿基米德对于线段叙述了这条公理:

16° 对于任何实正数 α, 存在这样的自然数 n 使得 $\alpha n \geqslant 1$.

► 若 $\alpha \geqslant 1$, 则可取 $n = 1$ 面无需再证什么. 若 $0 < \alpha < 1$, 则

$$\alpha = 0.0 \cdots a_k a_{k+1} \cdots, \quad a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0, \quad a_k \neq 0.$$

①此处 "$c \in \mathbb{R}$" 为译者所加.

那么有

$$10^k\alpha = a_k \cdot a_{k+1} \cdots \geqslant a_k \geqslant 1,$$

即性质 16° 对于 $n = 10^k$ 成立. ◀

我们晚些时候再叙述和证明性质 17°.

现在我们仅考察非负数. 我们约定, 对于十进有理数, 仅考察以零终结的写法. 数 x 的十进记号中, 小数点前面的数是整数, 称之为 x 的整部或者 x 的整数部分. 于是, **数 x 的整部**乃是满足不等式 $n \leqslant x < n+1$ 的整数. 我们使用标准的记号: $n = [x]$. 那么上面的不等式可写成

$$[x] \leqslant x < [x] + 1 \quad 或 \quad x - 1 < [x] \leqslant x.$$

数 x 的十进记号中小数点后面的数, 叫作数 x 的**分数部分**. 记之为: $\{x\}$. 显然, $[x] + \{x\} = x$. 于是, 量 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数. 这个性质用来定义对于负数 x 符号 $[x]$ 的值.

例如:$[1.5] = 1; [0.3] = 0; [-0.7] = -1; [-3.5] = -4$.

还有, 当 $x < 0$ 时, 我们赋予数 x 的分数部分符号 $\{x\}$ 以值: $\{x\} = x - [x]$. 这样一来, 对于一切 x, 符号 $\{x\}$ 的值都满足条件 $0 \leqslant \{x\} < 1$.

我们来定义数 x 的**模**, 或者**绝对值**:

$$|x| = \begin{cases} x, & 若\ x \geqslant 0 \\ -x, & 若\ x < 0 \end{cases},$$

($|x|$ 表达数轴上从零到点 x 的距离). 下述不等式成立 (三角形不等式):

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

我们来证明这个不等式. 我们有:

1) 若 $ab \geqslant 0$, 则 $|a + b| = |a| + |b|$;

2) 若 $ab < 0$, 则 $|a + b| < |a| + |b|$.

作为上面所引入的概念的应用, 我们来证明三个命题.

命题 5 对于任意的整数 a 和任意的自然数 b, 存在唯一的一对整数 q, r 使得

$$a = bq + r, \quad 0 \leqslant r < b.$$

▶ 实际上, 唯一的数 $q = \left[\dfrac{a}{b}\right]$ 满足不等式 $q \leqslant \dfrac{a}{b} < q + 1$, 即 $qb \leqslant a < (q+1)b$. 那么量 r 单值地由等式 $r = a - bq$ 确定, 且满足不等式

$$0 \leqslant r = a - b\left[\frac{a}{b}\right] < a - b\left(\frac{a}{b} - 1\right) = b. \quad ◀$$

我们指出, 上面考察的数 r 叫作整数 a 除以自然数 b 的**余数**. 整数 q 叫作**商数**.

命题 6 任何自然数 a 都唯一地关于某个自然数 n 表示成形式

$$a = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^n a_n,$$

其中 a_m 是满足条件 $0 \leqslant a_m \leqslant 9$ 的整数, $m = 0, \cdots, n, a_n \geqslant 1$.

► 我们注意到 $a < 10^a$. 实际上

$$a = \sum_{m=0}^{a-1} 1 \leqslant \sum_{m=0}^{a-1} 10^m = \frac{10^a - 1}{9} < 10^a.$$

因此, 存在唯一的非负整数 n 使得

$$10^n \leqslant a < 10^{n+1}.$$

对于 $0 \leqslant m \leqslant n$ 置

$$a_m = \left[\frac{a}{10^m}\right] - 10\left[\frac{a}{10^{m+1}}\right].$$

我们注意到, 所有的数 a_m 都是整数且成立不等式

$$-1 = \frac{a}{10^m} - 1 - 10 \cdot \frac{a}{10^{m+1}} < a_m < \frac{a}{10^m} - 10 \cdot \left(\frac{a}{10^{m+1}} - 1\right) = 10,$$

即 $0 \leqslant a_m \leqslant 9$;

$$a_n = \left[\frac{a}{10^n}\right] - 10\left[\frac{a}{10^{n+1}}\right] = \left[\frac{a}{10^n}\right] \geqslant 1,$$

因为 $10^n \leqslant a < 10^{n+1}$ 且 $\left[\frac{a}{10^{n+1}}\right] = 0$. 还有

$$\sum_{m=0}^{n} 10^m a_m = \sum_{m=0}^{n} 10^m \left(\left[\frac{a}{10^m}\right] - 10\left[\frac{a}{10^{m+1}}\right]\right) = [a] - 10^{n+1}\left[\frac{a}{10^{n+1}}\right] = a.$$

我们来证明命题中给出的数 a 的表达式的唯一性. 设除了表达式 $a = \sum\limits_{m=0}^{n} 10^m a_m$ 之外另有表达式 $a = \sum\limits_{m=0}^{k} 10^m b_m$. 那么, 对于某个不超过数 n 和 k 中的大者的 s, 成立等式

$$0 = a - a = \sum_{m=0}^{s} 10^m c_m,$$

其中 $c_m = a_m - b_m, |c_m| \leqslant 9, c_s \neq 0$. 由此推出 $10^s c_s = -\sum\limits_{m=0}^{s-1} 10^m c_m$, 从而

$$10^s \leqslant |c_s \cdot 10^s| = \left|-\sum_{m=0}^{s-1} 10^m c_m\right| \leqslant \sum_{m=0}^{s-1} 9 \cdot 10^m = 9 \cdot \frac{10^s - 1}{10 - 1} = 10^s - 1 < 10^s,$$

这是不可能的. ◄

在命题 6 中引入的表达式称为**数 a 在十进 (位) 计数系中的表示**. 数 a_m 叫作给定的数的**位数**. 数 a 写成 $a = a_n \cdots a_0$ 的形状. 数目 10 叫作给定的计数进位系的**基**. 我们指出, 任何大于 1 的自然数都可以取作计数进位系的基. 特别地, 在 §2 我们已经使用过二进位计数系.

定义 17 说数 α 表示成无限十进小数 $\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$, 其中 $\alpha_0 = [\alpha], 0 \leqslant \alpha_k \leqslant 9, k \geqslant 1$ 是整数, 如果对于任意的自然数 n 成立不等式

$$0 \leqslant \alpha - s_n(\alpha) < 10^{-n},$$

其中, $s_n(\alpha)$ 叫作数 α 的小数点后第 n 位的舍值.①

命题 7 对于每个实数 $\alpha \geqslant 0$ 存在唯一的无限十进小数表示

$$\alpha = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots,$$

它对于一切自然数 n 满足以下条件 ②

$$s_n(\alpha) = \alpha_0.\alpha_1\cdots\alpha_n.$$

► 假设相反, 即存在另一个表示 $\alpha = \beta_0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots$.③ 根据这两个表示的不同, 对于某个 n 成立不等式

$$A_n = \alpha_0.\alpha_1\cdots\alpha_n \neq B_n = \beta_0.\beta_1\cdots\beta_n.$$

从有限十进小数的定义得知, 数 $10^n A_n$ 和 $10^n B_n$ 都是整数. 此外, 数 A_n 和 B_n 自身都是数 α 的 n 位舍值, 因此

$$0 \leqslant \alpha - A_n < 10^{-n}, \quad 0 \leqslant \alpha - B_n < 10^{-n},$$
$$0 \leqslant 10^n(\alpha - A_n) < 1, \quad 0 \leqslant 10^n(\alpha - B_n) < 1.$$

从最后两个不等式得知, 整数 $10^n(A_n - B_n)$ 满足不等式 $-1 < 10^n(A_n - B_n) < 1$. 因此 $A_n = B_n$, 这就产生了矛盾.

现在来证明, 对于每个实数都存在无限十进小数表示. 我们来描述寻找实数 α 的满足命题 7 条件的十进写法的算法.

置 $\alpha_0 = [\alpha], \alpha_n = [10^n\alpha] - 10[10^{n-1}\alpha]$. 根据不等式 $\beta - 1 < [\beta] \leqslant \beta$, 当 $n \geqslant 1$ 时有

$$-1 = (10^n\alpha - 1) - 10^n\alpha < \alpha_n < 10^n\alpha - 10(10^{n-1}\alpha - 1) = 10,$$

①这里应该规定 $s_n(\alpha) = \alpha_0.\alpha_1\cdots\alpha_n$ —— 译者注.

②最后这句话是多余的 —— 译者注.

③原文误为 $\alpha = \beta.\beta_0\cdots\beta_n\cdots$ —— 译者注.

即 $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 9$. 考察无限十进小数 $\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$. 我们来证明它就是数 α 的表示. 为此, 只要证明对于任何自然数 n, 数 $A_n = \alpha_0.\alpha_1\cdots\alpha_n$ 都是数 α 的 n 位舍值. 改写 A_n, 有

$$\begin{aligned} A_n &= \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} = [\alpha] + \sum_{m=1}^{n} \frac{[10^m\alpha] - 10[10^{m-1}\alpha]}{10^m} \\ &= [\alpha] + \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{[10^m\alpha]}{10^m} - \frac{[10^{m-1}\alpha]}{10^{m-1}} \right) = \frac{[10^n\alpha]}{10^n}. \end{aligned}$$

由此得到

$$\alpha - 10^{-n} = \frac{10^n\alpha - 1}{10^n} < A_n \leqslant \frac{10^n\alpha}{10^n} = \alpha,$$

即

$$\alpha - 10^{-n} < A_n \leqslant \alpha.$$

最后的不等式就表明 A_n 是数 α 的 n 位舍值. ◀

我们发现, 对于数 $\alpha = \dfrac{a}{10^k}$, 其中 a 和 k 都是自然数 (这样的数 α 叫作**十进有理数**), 对应于命题条件的只是有限十进小数.

以后需要下述概念和记号.

满足以下不等式的点 x 的集合 M:

$a < x < b$, 叫作**开区间** (记作 $M = (a, b)$);

$a < x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x < b$, 叫作**半开区间** ($M = (a, b]$ 或 $M = [a, b)$);

$a \leqslant x \leqslant b$, 叫作**线段**或**闭区间** ($M = [a, b]$).

这些集合中的每个都叫作**区段**.

用相应的条件确定的点 x 的集合叫作:

$x < a$ 或 $x > a$ —— **开射线** (记为: $L = (-\infty, a)$ 或 $L = (a, +\infty)$);

$x \leqslant a$ 或 $x \geqslant a$ —— **闭射线** (记为: $L = (-\infty, a]$ 或 $L = [a, +\infty)$); a 叫作射线的顶点.

这里, 符号 $+\infty$ 读作正无穷, 而符号 $-\infty$ 读作负无穷.

实轴上一切满足条件 $|x - a| < \varepsilon$ (其中 $\varepsilon > 0$ 而 a 是某一固定的实数) 的点 x 的集合叫作点 a 的 ε **邻域** (或简称为**邻域**).

满足条件 $|x| > \varepsilon$ (其中 $\varepsilon > 0$) 的一切点 x 的集合叫作**无穷的** ε **邻域** (或简称**邻域**).

满足条件 $x > \varepsilon$ (其中 $\varepsilon > 0$) 的一切点 x 的集合叫作**正无穷的** ε **邻域** (或简称**邻域**).

满足条件 $x < -\varepsilon$ (其中 $\varepsilon > 0$) 的一切点 x 的集合叫作**负无穷的** ε **邻域** (或简称**邻域**).

最后指出, 命题 5 ~ 7 具有某种解释和说明的性质.

第四讲

§4. 实数集的完备性

定义 18 实数轴 $\mathbb{R}$ 上的非空集合 A 叫作是有上界的, 如果存在数 $b \in \mathbb{R}$, 使得对于每个 $a \in A$ 都成立不等式 $a \leqslant b$. 换言之,

$$\forall a \in A \Rightarrow a \leqslant b.$$

数 b 叫作集合 A 的**上界**. 一个有上界的集合有无限多个上界, 例如 $b+1, b+2$, 等等.

类似地定义非空集合 A 的**下界** d:

$$\forall a \in A \Rightarrow d \leqslant a$$

非空的集合 A 叫作是**有界**的, 如果存在 $b > 0$, 使得对于所有的 $a \in A$ 有 $|a| < b$.

非空有上界的集 A 的一切上界 b 的集合是有下界的.

► 实际上, 对于集 A 中的任意一个固定的 a, 每个上界 $b \in B$ 都满足不等式 $a \leqslant b$. 这就表明 a 是 B 的下界. ◄

现在我们来叙述实数集 $\mathbb{R}$ 的完备性 (第三讲中提到过的性质).

17° 对于任何非空有上界的集合 A, 其上界 b 的集合 B 含有最小元 b', 也就是说, 存在唯一的元素 $b' \in B$ 使得:

1) b' 是集合 A 的上界, 即对于一切 $a \in A$, 成立 $b' \geqslant a$;

2) b' 是集合 B 的最小元素, 也就是说对于一切 $b \in B$, 有 $b' \leqslant b$.

元素 b' 叫作是集合 A 的**上确界**或集合 A 的 supremum (记作: $b' = \sup A$).

在证明这条性质之前, 我们先指出, 同样的性质对于有下界的集合 A 的下界的集合 D 成立, 即存在唯一的元素 $d' \in D$ 使得

1) $\forall a \in A \Rightarrow d' \leqslant a$;

2) $\forall d \in D \Rightarrow d' \geqslant d; d' = \inf A$ (读作: **下确界**, 或 infimum).

现在来证明性质 17°.

► 我们来构造性地构作数 b'. 可以认为 $0 \in A$, 于是对于所有的 $b \in B$ 有 $b \geqslant 0$. 实际上, 我们取随便一个 $a_1 \in A$. 我们发现, 对于任意的上界 $b \in B$, 成立不等式 $b \geqslant a_1$, 从而 $b - a_1 \geqslant 0$.

现在代替集合 A 而考察形如 $a - a_1$ 的数的集合 A'. 如果我们成功地证明了存在数 $b_1' = \sup A'$, 那么显然就存在数 $b' = \sup A$, 而且 $b' = b_1' + a_1$, 反之亦然. 下述原则成立.

实数的比较原则

若 $a > b \geqslant 0$ 且此两数的十进制表示为 $a = a_0.a_1a_2 \cdots a_k \cdots$ 和 $b = b_0.b_1b_2 \cdots b_k \cdots$, 那么或者 $a_0 > b_0$, 或者存在号码 k, 使得 $a_0.a_1 \cdots a_k > b_0.b_1 \cdots b_k$.

我们还约定, 集合 A 中的一切十进有理数都只表示成具有无限多个零的形式.

在集 A 中取出由一切满足条件 $a \geqslant 0$ 的 $a \in A$ 组成的子集 A_0, 即 $A_0 = \{a \in A | a \geqslant 0\}$. 对于每个数 $a \in A_0$ 考察它的整部 $[a] = n_0(a)$.

由于 $0 \leqslant [a] \leqslant a < b$, 那么函数 $[a]$ 对于 $a \in A_0$ 只取有限个值. 记这些值中的最大者为 x_0. 考察由满足 $[a] = x_0$ 的 $a \in A_0$ 组成的集合 $A_1 \subset A_0$. 我们发现, 对于一切 $a \notin A_1$ 有不等式 $a < x_0$.

在集合 A_1 上定义函数 $n_1(a)$, 它取数 a 的小数点后第一个十进位上的值. 首先, 它取值不多于十个. 用 x_1 代表这些值中的最大者. 由 A_1 中的使 $n_1(a) = x_1$ 的数 a 的全体组成集合 A_2. 用 $s_1(a)$ 表示把 a 的十进小数表示中小数点后第二位及其以后的全部数字都改成零所得的数, 也就是说, 若 $a = n_0.n_1 \cdots$, 则 $s_1(a) = n_0.n_1$. 那么, 对于任意的 $a \in A_2$ 有 $s_1(a) = x_0.x_1$, 而对于一切 $a \notin A_2$, 成立不等式 $a < x_0.x_1$. 对于所有的 $a \in A_2$, 定义函数 $n_2(a)$, 使它等于 a 的小数点后第二个十进位上的值. 用 x_2 代表它的最大值. 由 A_2 中的使 $n_2(a) = x_2$ 的数 a 的全体组成集合 A_3. 那么, 对于 $s_2(a)$, 即把 a 的十进小数表示中第三位及其以后的全部数字都改成零所得的数, 成立关系式 $s_2(a) = x_0.x_1x_2$ 对于任何 $a \in A_3$; 及 $a < x_0.x_1x_2$ 对于任何 $a \notin A_3$. 继续进行这一程序, 在第 k 步我们得到

$$s_k(a) = x_0.x_1 \cdots x_k, \quad \forall a \in A_{k+1};$$
$$a < x_0.x_1x_2 \cdots x_k, \quad \forall a \notin A_{k+1}.$$

这样一来, 就得到了一列数字, 它们确定了一个具有十进小数表示 $b' = x_0.x_1x_2 \cdots$ 的数 b'.

现在我们证明,b' 是集合 A 的上确界, 即 $b' = \sup A$ 为此必须验证下述条件:

1) b' 是上界, 即对于一切 $a \in A$ 有 $a \leqslant b'$;

2) b' 是最小上界, 即若 $b < b'$, 则存在 $a \in A$ 使得 $a > b$.

我们来证明条件 1). 假设不然, 即存在 $a \in A$ 使得 $a > b'$. 那么根据数的比较原则得知, 存在号码 k 使得

$$s_k(a) > x_0.x_1 \cdots x_k = s_k(b'),$$

而这与数 b' 的构作相抵触.

证明条件 2). 若 $b < b'$, 则根据实数的比较原则, 存在号码 $k \in \mathbb{N}$, 使得

$$b_0.b_1 \cdots b_k = s_k(b) < s_k(b') = x_0.x_1 \cdots x_k.$$

我们认为，在数 b 是十进有理数的情形，此处使用带有无限多个零的小数表示. 然而根据 b' 的构作，存在一个元素 $a \in A_{k+1}$ 使得 $s_k(a) = s_k(b')$. 由此推出 $s_k(b) < s_k(a), b < a$. ◄

我们指出，数 $b' = \sup A$ 可以属于 A，也可以不属于 A.

作为例子，我们来考察满足条件 $a^2 - 2 \leqslant 0$ 或 $a^2 < 2$ 的有理数 a 的集合 A，以及由满足条件 $b^2 > 2$ 的正的有理数 b 组成的集合 $B = \mathbb{Q} \backslash A$.

根据不存在其平方等于 2 的有理数这一事实，我们有: 1) $A \cup B = \mathbb{Q}$; 2) $A \cap B = \varnothing$; 3) $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$; 4) 对于任意的数 $a \in A$ 和任意的数 $b \in B$，成立不等式 $a < b$.

定义 19 *任何把有理数分划成具有性质 1) ∼ 4) 的两个集的分划叫作分割 (戴德金分割).*

集合 B "上方界定" 集合 A，也就是说，对于任何固定的 $b \in B$，条件 4) 成立，而且集合 B 囊括了集合 A 的上界.

我们来证明，集合 B 没有最小元，而集合 A，作为集合 B 的全部下界的集合，没有最大元. 这表明，有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是 "完备的"，也就是说，对于它，性质 17° 不成立.

实际上，假定不然，即集合 B 中存在最小的数 b_0. 我们来考察这样的数 $b_0 - k$，使得 $0 < k < \dfrac{b_0^2 - 2}{2b_0}$. 那么

$$(b_0 - k)^2 = b_0^2 + k(k - 2b_0) > b_0^2 - k \cdot 2b_0 > b_0^2 - \frac{b_0^2 - 2}{2b_0} \cdot 2b_0 = 2.$$

因此,$b_0 - k \in B$，这与数 b_0 的最小性矛盾.

现假定 a_0 是集合 A 的最大数. 考察满足条件 $h < \dfrac{2 - a_0^2}{2a_0 + 1}$ 的非负数 $h < 1$. 那么

$$(a_0 + h)^2 = a_0^2 + h(2a_0 + h) < a_0^2 + h(2a_0 + 1) < a_0^2 + (2 - a_0^2) = 2.$$

这样一来，数 $a_0 + h \in A$，这与数 a_0 在集合 A 中的最大性的假定相矛盾.

有理数集的分割的概念是由戴德金 (J.W. R. Dedekind(1831—1916)) 为建立实数理论而引入的 (按他的方法，实数等同于分割). 尽管在本教程中，这个任务是借助于无限十进小数来完成的，还是应该指出，戴德金分割对于其他问题也是有用的. 特别是，具有任意的幂指数和自变量值的幂函数和指数函数的严格定义事实上仰仗着分割.

上确界的性质

若 $b = \sup A$，则对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 A 的元 a 使得 $a > b - \varepsilon$.

► 用反证法. 假定存在这样的 $\varepsilon > 0$，使得对于一切 $a \in A$ 成立不等式 $b - a \geqslant \varepsilon$.

那么 $b' = b - \varepsilon$ 是集合 A 的上界, 而 b' 比 b 小, 这是不可能的, 因为 b 是上界当中的最小者. ◄

我们还要证明实数的一个性质.

引理 1 对于任何满足条件 $x < y$ 的实数 $x, y \in \mathbb{R}$, 存在有理数 $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ 使得 $x < \frac{m}{n} < y$.

► 根据阿基米德公理 (性质 16°), 对于正实数 $y - x$ 存在自然数 n 使得成立不等式 $n(y - x) > 2$. 由此推出, 开区间 (nx, ny) 的长度超过 2. 因此, 在这个开区间中存在整数 m 使得 $nx < m < ny$(例如 $m = [ny] - 1$). 根据性质 15°, 从最后的不等式就得到欲求的不等式. ◄

注 可同样简单地证明, 在任何数 $0 \leqslant x < y$ 之间存在无理数. 实际上, 根据引理 1, 在数 $\frac{x}{\sqrt{2}}$ 和 $\frac{y}{\sqrt{2}}$ 之间存在某有理数 $\frac{m}{n}$. 于是无理数 $\frac{m}{n}\sqrt{2}$ 位于开区间 (x, y) 中.

最后, 凭借实数间的比较原则我们来叙述引理 2. 这个引理实质上给出了对于实数进行算术运算时, 顺次计算各十进位上的值的方法.

引理 2 设 $a, b > 0$ 是实数.

$$c = \sup_n (s_n(a) \pm s_n(b)), \quad d = \sup_n (s_n(a) s_n(b)), \quad f = \sup_n \left(\frac{s_n(a)}{s_n(b)} \right),$$

如果 $s_n(b) > 0$ 的话, 那么 $c = a \pm b, d = ab, f = \frac{a}{b}$ 当 $b > 0$.

► 这个引理的证明根据的是下述考虑.1) 显然, 在三种情况下, 上确界都存在.2) 性质 1° ~ 17° 的成立由进一步的直接计算来验证. ◄

§5. 关于集合的分离性的引理, 关于嵌套闭区间系的引理以及关于收缩闭区间序列的引理

引理 3 (关于集合的分离性) 设 A 和 B 是实数轴上两个不空的集合, 即 $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$ 且 $A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$. 还设对于任何 $a \in A$ 及对于任何 $b \in B$, 成立不等式 $a \leqslant b$.

那么存在这样的数 x, 使得对于一切 $a \in A$ 和对于一切 $b \in B$, 成立不等式 $a \leqslant x \leqslant b$.

► 从集合 B 的定义推出, 它的每个点都是集合 A 的上界. 令 $x = \sup A$. 那么, 由于 x 是上界, 对于一切 $a \in A$ 有不等式 $a \leqslant x$, 而由于 x 是 A 的上确界, 所以对于任意的 $b \in B$ 都有 $x \leqslant b$, 也就是说, 对于一切 $a \in A$ 和对于一切 $b \in B$, 有 $a \leqslant x \leqslant b$. ◄

定义 20 称非空集合 M 是嵌套闭区间系, 如果 M 的元素是闭区间, 且对于任意的 $\Delta_1, \Delta_2 \in M$, 条件 $\Delta_1 \subset \Delta_2$ 和 $\Delta_2 \subset \Delta_1$ 之中总有一个成立, 也就是说一个闭区间的一切点都属于另一个闭区间.

引理 4 (关于嵌套闭区间系) 设 M 是嵌套闭区间系. 那么存在这样的数 x, 使得对于任意的 $\Delta \in M$ 都有 $x \in \Delta$. 也就是说集合 M 中的所有的闭区间有公共点 x.

► 设 A 是属于 M 的闭区间的左端点的集合, 而 B 是它们的右端点的集合. 那么对于一切 $a \in A$ 和对于一切 $b \in B$, 必有 $a \leqslant b$. 实际上, 设 a 是闭区间 $[a, b'] \in M$ 的左端点. 而 b 是另一个闭区间 $[a', b] \in M$ 的右端点.

可能有两种情形: 1) $[a', b] \subset [a, b']$; 2) $[a', b] \supset [a, b']$ 在第 1) 种情形有 $a \leqslant a' < b \leqslant b'$, 而在第 2) 种情形有 $a' \leqslant a < b' \leqslant b$. 那么根据关于分离性的引理, 存在这样的数 x, 使得对于任何闭区间 $[a, b] \in M$ 都成立不等式 $a \leqslant x \leqslant b$. ◄

注 借助于引理 4 (关于嵌套闭区间系) 可以证明闭区间上的点的集合的不可数性. (提示. 假定所有的点已数出来了. 把闭区间分为三部分. 那么具有号码 1 的点不属于这三个闭区间之一. 把它再分成三部分. 具有号码 2 的点不属于所得的三个闭区间之一, 依此类推. 根据引理 4 存在点 x 同时属于所有的闭区间, 但这个点没有被编号.)

定义 21 **嵌套闭区间系** M 称为嵌套闭区间列, 如果全部闭区间被编号, 且任一大号码的区间包含在任一小号码的区间中.

定义 22 嵌套闭区间列称作是收缩闭区间列, 如果它所含的闭区间中有长度任意小者. 换言之, 无论正数 ε 如何, 在收缩闭区间列中都含有其长度小于 ε 的闭区间.

引理 5 收缩闭区间列含有公共点且仅含一个公共点.

► 论断的第一部分从引理 4 推出.

我们来证明论断的第二部分. 如果全部闭区间同时含有两个不同的点 a 和 $b (a < b)$, 那么 M 的每个闭区间的长度都该不小于 $b - a > 0$, 而这是不可能的, 因为按照定义, 在 M 中有更短的闭区间. ◄

第二章　数列的极限

第五讲

§1. 数学归纳法、牛顿二项式以及伯努利不等式

对于数学归纳法的依据, 我们使用自然数的下述性质: 在自然数集合的任一非空子集中都存在最小的数.

我们来确定该性质确实成立. 为此, 取其任一元 (这是可以办到的, 因为给定的子集不空). 若所取的元最小则性质已然证实. 否则, 比该数小的自然数的个数是有限的. 逐个考察它们, 我们就会找到最小的元素.

数学归纳法是下述方法: 为了证实任一关于一切自然数 $n \geqslant 1$ 表出的命题, 只需

1) 对于 $n=1$ 证明这个命题;

2) 假定它当 $n=k$ 且 $k \geqslant 1$ 时成立;

3) 在结论 1) 和假定的基础上, 证明命题当 $n=k+1$ 时真确.

确实, 由此推出所述命题对于一切自然数是真确的. 假定不然. 那么那些使命题不真的 n 的集合含有最小元 m. 数 $m \neq 1$, 因为命题对于 $n=1$ 成立. 数 m 不可以大于 1, 因为那样的话命题对于 $m-1$ 成立, 而根据第 3 款, 它也对于 m 成立, 这与数 m 的选择矛盾.

注　数学归纳法可以证明对于 $n \geqslant m$ 成立的命题, 其中 $m \geqslant 1$. 在证明的过程中应该改变

第一步: 对于 $n=m$ 证明命题, 而保持其他不变, 如前一样, 在必要时使用 $n \geqslant m$.

我们来考察牛顿二项式. 定义量 $n!=n(n-1)\cdots 2\cdot 1, 0!=1$ ($n!$ 读作 n 的阶乘). 特别地, 有 $1!=1, 2!=2\cdot 1=2, 3!=3\cdot 2\cdot 1=6$, 等等.

定理 1 下列等式 (牛顿二项式公式) 成立:

$$(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \cdots + \mathrm{C}_n^k x^k + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n.$$

此式可简短地写成

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k,$$

其中 $\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 是二项式系数.

► 用数学归纳法.

1. 当 $n=1$ 时公式成立: $1+x=1+x$, 因为

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1.$$

2. 设牛顿二项式公式当 $n=t, t\geqslant 1$ 时成立.

3. 证明它当 $n=t+1$ 时成立. 首先证明关于二项式系数的辅助命题: 当 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 时有

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

事实上

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k+1}\right) = \binom{n+1}{k+1}.$$

我们有

$$\begin{aligned}(1+x)^{t+1} = (1+x)^t(1+x) &= \binom{t}{0} + \binom{t}{1}x + \cdots + \binom{t}{t}x^t \\ &\quad + \binom{t}{0}x + \cdots + \binom{t}{t-1}x^t + \binom{t}{t}x^{t+1} \\ &= \binom{t+1}{0} + \binom{t+1}{1}x + \cdots + \binom{t+1}{t}x^t + \binom{t+1}{t+1}x^{t+1}.\end{aligned}$$ ◄

注 类似地可证形如

$$(x+y+\cdots+z)^n=\sum_{k_1+\cdots+k_s=n}\frac{n!}{k_1!\cdots k_s!}x^{k_1}y^{k_2}\cdots z^{k_s}$$

的 s 个未知数的牛顿二项式公式, 其中 $k_1,\cdots,k_s$ 是非负整数.

在叙述数列的极限理论时我们需要远为明显的伯努利不等式.

定理 2 当 $x>-1, x\neq 0$ 时, 对于整数 $n\geqslant 2$ 成立不等式 (伯努利不等式)

$$(1+x)^n>1+xn.$$

► 用归纳法进行证明. 首先确认当 $n=2$ 时不等式成立. 事实上,

$$(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x.$$

设对于号码 $n=k$ 结论成立:

$$(1+x)^k>1+kx,$$

其中 $k\geqslant 2$. 我们来对 $n=k+1$ 进行证明. 我们有

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1}&=(1+x)^k(1+x)>(1+kx)(1+x)\\&=1+(k+1)x+kx^2>1+(k+1)x.\end{aligned}$$ ◄

我们指出, 数学归纳法可以做多种多样的, 有时是出乎意料的推广. 作为例子, 我们引入著名的挪威数学家 T. Nagell 的书 [34] 中的一个定理的证明.

我们把按如下模式进行的证明叫作**乘性归纳法**.

1. 通过试验的方法或其他什么途径推出一个每个号码 $n(>1)$ 都具有性质 E 的猜测.

2. 验证一切素数 p 都具有性质 E.

3. 假定某个自然数 m 具有性质 E.

4. 从归纳假定出发, 证明形如 mp 的数也具有这个性质.

5. 由此, 根据大于 1 的自然数展开成素余因子的单值性的定理, 推出一切自然数都具有性质 E, 从而建立起第 1 款中的猜测的真确性 [34].

► 我们用乘性归纳法来证明 Möbius (默比乌斯) 函数的乘性性质. Möbius 函数是以下述方式定义在自然数集上的函数:①

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{若 } n=1,\\ 0, & \text{若 } p^2 \text{ 整除 } n,\\ (-1)^r, & \text{若 } n=p_1\cdots p_r, p_k\neq p_l, k\neq l, 1\leqslant k,l\leqslant r.\end{cases}$$

①其中默认, 字母 p 代表素数 —— 译者注.

说自然数变量的函数 $f(n)$ 是乘性的, 如果对于任何互素的数 m 和 n 都成立等式 $f(mn)=f(m)f(n)$.

只要对于不被素数的平方整除的数, 即无平方数,m 和 n 证明关于 Möbius 函数的乘性的断言就够了. 取定任意的 m. 我们来证断言对于 $n=p$ 成立, 其中 p 是任意的素数. 实际上, 由于 $(m,p)=1$, 所以 $\mu(mp)=(-1)^{r+1}$, 如果 $m=p_1\cdots p_r$ 且 $p_1,\cdots,p_r$ 是互异的素数的话. 因此 $\mu(mp)=\mu(m)\mu(p)$.

设断言对于 $n=k$ 成立. 我们来证明它对于 $n=kp$ 也成立, 其中 p 是任意的素数. 由于 n 是无平方数, 所以 $(k,p)=1$. 根据条件 $(m,n)=1$, 所以 $(mk,p)=1$. 那么根据对于素数已证之结论及归纳假设, 我们得到一串等式

$$\begin{aligned}\mu(mn)&=\mu(mkp)=\mu(mk)\mu(p)=\mu(m)\mu(k)\mu(p)\\&=\mu(m)\mu(kp)=\mu(m)\mu(n).\quad\blacktriangleleft\end{aligned}$$

我们指出, Möbius 函数出现在数学的许多领域中, 在研究这些领域的离散对象时起着重要作用.

§2. 数列、无穷小数列和无穷大数列及其性质

定义 1 定义在自然数集 $\mathbb{N}$ 上并取值为数的函数叫作数值序列, 或简称为数列.

记号: $x_1,x_2,x_3,\cdots$, 或短形式 $\{x_n\}$, 或在不引起误解时, 简单地 x_n. 对于每个 n 值, 数 x_n 叫作数列的第 n 项.

例 1. 嵌套闭区间 (见第四讲 §5 的定义 21) $\{\Delta_n\},\Delta_n\subset\mathbb{R},\Delta_{n+1}\subset\Delta_n\ \forall n\in\mathbb{N}$, 其区间长度的序列 δ_n.

2. $x_n=c$ 对于一切自然数 n (常数列).

定义 2 若 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两个数列, 则 $\{x_n+y_n\}$ 称为两数列的和, $\{x_n-y_n\}$ 称为两数列的差, $\{x_ny_n\}$ 称为两数列的积, 当 $y_n\neq 0$ 时, 数列 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 称为两数列的商.

注 通常我们默认写法 $\frac{a}{b}$ 自身假定条件 $b\neq 0$ 成立.

数列是:

1) 有上界的, 如果存在 a 使得对于数列的所有的项都成立 $x_n\leqslant a$;

2) 有下界的, 如果存在 b 使得 $x_n\geqslant b$ 对于一切 $n\in\mathbb{N}$ 成立;

3) 有界的, 如果存在 c 使得对于每个号码 $n\in\mathbb{N}$ 有 $|x_n|\leqslant c$.

定义 3 数列 $\{x_n\}$ 叫作是无穷大的, 如果对于任意的 $c>0$, 数列的满足不等式 $|x_n|\leqslant c$ 的项的集合是有限的.

换言之, 这就是说, 对于任何 $c>0$, 都存在号码 $n_0=n_0(c)$ 使得数列 $\{x_n\}$ 中号码大于 n_0 的项全都满足不等式 $|x_n|>c$.

此定义可简短地写成:

$$\forall c>0\ \exists n_0=n_0(c),\ \text{使得}\ \forall n>n_0\ \text{有}\ |x_n|>c.$$

例 数列 $\{y_n=n\}$ 和 $\{z_n=-n\}$ 是无穷大数列.

定义 4 数列 $\{x_n\}$ 叫作是无穷小的, 如果对于任何 $\varepsilon>0$, 数列 $\{x_n\}$ 的满足不等式 $|x_n|\geqslant\varepsilon$ 的项的集合都是有限的.

此定义可简短地写成:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\ \text{使得}\ \forall n>n_0\Rightarrow|x_n|<\varepsilon.$$

例 1. 收缩闭区间列 (见第四讲 §5 定义 22) 中的区间的长度构成无穷小数列.

2. $x_n=\dfrac{1}{n}$ 是无穷小数列.

► 为了证明此事, 应该对于任何 $\varepsilon>0$ 找出至少一个自然数 $n_0=n_0(\varepsilon)$ 使得对于任意的 $n>n_0$ 有 $|x_n|<\varepsilon$. 作为这样的 $n_0=n_0(\varepsilon)$ 我们取数 $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$. 那么对于每个满足条件

$$n>n_0(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1>\frac{1}{\varepsilon}$$

的 n, 有 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$. ◄

一般说来, 如果要证明 $\{x_n\}$ 是无穷小数列, 那么实质上是要找出哪怕一个数 $n_0(\varepsilon)$ 具有所要的性质, 即使得当 $n>n_0(\varepsilon)$ 时成立不等式 $|x_n|<\varepsilon$, 或者哪怕是以某种方式证明这个数的存在.

定理 3 无穷小数列是有界的.

► 设 $\{x_n\}$ 是无穷小数列. 那么, 譬如说, 使不等式 $|x_n|\geqslant 1$ 成立的项只有有限多. 这些项的模之和记作 c_0. 此处认为, 如果这样的项并不存在, 则 $c_0=0$. 显然, 那时对每一项 x_n 都成立不等式 $|x_n|<c=c_0+1$. 因此, 无穷小数列 $\{x_n\}$ 是有界的. ◄

定理 4 若 $\{x_n\}$ 是无穷大数列且 $x_n\neq 0$, 则 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷小数列. 反之, 若 $\{x_n\}$ 是无穷小数列且 $x_n\neq 0$, 则 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷大数列.

► 我们只限于考虑正面的命题. 此时, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 不等式 $\left|\dfrac{1}{x_n}\right|\geqslant\varepsilon$ 等价于不等式 $|x_n|\leqslant c=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 其本身只对于有限多项成立, 因为 $\{x_n\}$ 是无穷大数列. 这就意味着 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷小数列. ◄

定理 5 1. 若 $\{x_n\}$ 是无穷小数列, 则 $\{|x_n|\}$ 也是无穷小数列, 且反之亦然.

2. 两个无穷小数列的和 (差) 是无穷小数列.

► 定理的第一个断言直接从无穷小数列的定义推出.

我们证明第二个结论. 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是无穷小数列. 那么, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在号码 $n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 和 $n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 使得

$$\forall n > n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) : |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad 且 \quad \forall n > n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) : |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

那么, 置 $n_0 = \max\left(n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$, 有

$$\forall n > n_0 : |x_n \pm y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此,$\{x_n \pm y_n\}$ 是无穷小数列. ◄

推论 任意有限个无穷小数列的代数和是无穷小数列.

推论的证明是明显的.

定理 6 无穷小数列乘以有界数列的积是无穷小数列.

► 设 $\{x_k\}$ 是无穷小数列, 而数列 $\{y_k\}$ 是有界的. 那么, 对于某个 $c > 0$, 有 $|y_n| < c$ 对于一切 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 进而, 由于 $\{x_k\}$ 是无穷小数列, 那么对于任何 $\varepsilon > 0$, 都存在号码 $n_1(\varepsilon_1)$ 使得对于一切 $n > n_1(\varepsilon_1)$ 成立 $|x_n| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{c}$. 因此, 置 $n_0(\varepsilon) = n_1\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)$, 有

$$\forall n > n_0(\varepsilon) : |x_n \cdot y_n| \leqslant |x_n| \cdot c < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon.$$

换言之, $\{x_n y_n\}$ 是无穷小数列. ◄

推论 1 两个无穷小数列的积是无穷小数列.

► 根据定理 3, 我们可以把两个无穷小数列中的一个看作有界数列, 那么根据定理 6, 它们的积是无穷小数列. ◄

推论 2 任意有限多个无穷小数列的积是无穷小数列.

明显地逐次使用上面的结论就得此推论之证明.

定理 7 若 $\{x_n\}$ 是常数列且是无穷小数列, 则 $x_n = 0$.

► 实际上, 若 $x_n = c \neq 0$, 则在零的 $\frac{|c|}{2}$ – 邻域中不存在我们的数列的任何点, 而这意味着 $\{x_n\}$ 不是无穷小数列. ◄

例 1. 当 $|q| < 1$ 时, $\{q^n\}$ 是无穷小数列.

► 实际上, 若 $0<q<1$, 则 $q=\frac{1}{1+h}$, 其中 $h>0$. 根据伯努利不等式,

$$(1+h)^n>1+nh \quad 当\ n\geqslant 2\ 时.$$

由此,

$$q^n<\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{nh}.$$

现给出 $\varepsilon>0$. 我们要选出 $n_0=n_0(\varepsilon)$ 使对于每个 $n>n_0$ 成立不等式 $q^n<\varepsilon$. 为此只要使下述一串不等式成立:

$$\frac{1}{nh}<\varepsilon\Leftrightarrow nh>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\frac{1}{h\varepsilon}.$$

置

$$n_0=n_0(\varepsilon)=\left[\frac{1}{h\varepsilon}\right]+1.$$

我们来证, 对于一切 $n>n_0$ 有 $q^n<\varepsilon$. 这从一串不等式

$$q^n<\frac{1}{nh+1}<\frac{1}{n_0h}<\frac{1}{\left(\frac{1}{h\varepsilon}\right)h}=\varepsilon$$

推出, 因此, $\{q^n\}$ 是无穷小数列, 只要 $|q|<1$. ◄

2. nq^n 是无穷小数列只要 $|q|<1$.

► 考察 $0<q<1$ 的情形. 那时, $q=\frac{1}{h+1}$, 其中 $h>0$. 从牛顿二项式公式知当 $n\geqslant 2$ 时

$$(1+h)^n>\frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

由此得到

$$nq^n=\frac{n}{(1+h)^n}<\frac{2}{(n-1)h^2}<\varepsilon,\quad n-1>\frac{2}{\varepsilon h^2},\quad n>\frac{2}{\varepsilon h^2}+1.$$

置 $n_0=\left[\frac{2}{\varepsilon h^2}\right]+2$. 那么对于一切 $n>n_0$ 有 $nq^n<\varepsilon$. ◄

第六讲

§3. 数列的极限

定义 5 数列 $\{a_n\}$ 叫作是收敛的,如果存在数 $l\in\mathbb{R}$, 使得数列 $\alpha_n=a_n-l$ 是无穷小数列.

在这种情况下，说 $\{a_n\}$ 收敛到 l 或说 $\{a_n\}$ 有极限 l，写作:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \text{或者} \quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时 } a_n \to l.$$

此定义可用 "ε 语言" 写成如下形式:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \text{ 使得 } \forall n > n_0 \text{ 有 } |a_n - l| < \varepsilon.$$

我们说数列 $\{a_n\}$ 发散到 "正无穷"，如果对于任意的 $c > 0$ 它只有有限多项满足不等式 $a_n < c$. 记作:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{或} \quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时 } a_n \to +\infty.$$

如果对于任意的 $b < 0$ 数列 $\{a_n\}$ 只有有限多项满足不等式 $a_n > b$，就说它发散到 "负无穷"，记作:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{或} \quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时 } a_n \to -\infty.$$

最后，说数列 $\{a_n\}$ 发散到 "无穷"，如果对于任意的 $c > 0$，它只有有限多项满足不等式 $|a_n| < c$. 记此事为:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{或} \quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时 } a_n \to \infty.$$

命题 1 *若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它有唯一的极限.*

► 设此事不真. 那么存在数 $l_1 \neq l_2$ 使得 $\alpha_n = a_n - l_1$ 和 $\beta_n = a_n - l_2$ 是无穷小数列. 由此，$\alpha_n + l_1 = a_n = \beta_n + l_2$，那么 $l_1 - l_2 = \beta_n - \alpha_n$ 是无穷小数列. 而那样的话根据 §2 定理 7 有 $l_1 - l_2 = 0$，即 $l_1 = l_2$. ◄

命题 2 *若 $\{a_n\}$ 是无穷小数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

► 实际上，对于 $l = 0$ 有: $a_n - 0 = a_n$ 是无穷小数列，即当 $n \to \infty$ 时 $\{a_n\}$ 的极限等于零. ◄

命题 3 *若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它有界.*

► 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则存在数 l 使得 $\alpha_n = a_n - l$ 是无穷小数列. 这就意味着，存在数 $c > 0$ 使得对于一切自然数 n 有 $|\alpha_n| < c$. 但 $a_n = l + \alpha_n$，由此

$$|a_n| = |l + \alpha_n| \leqslant |l| + |\alpha_n| \leqslant |l| + c = c_1,$$

即 $\{a_n\}$ 是有界数列. ◄

命题 4 *若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ 且 $a_n \neq 0, l \neq 0$，则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得对于一切 $n > n_0$ 有 $|a_n| > \dfrac{|l|}{2}$ $\left(\text{或者同一回事，} \dfrac{1}{|a_n|} < \dfrac{2}{|l|}\right)$.*

这表明, 由倒数组成的数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是有界的.

► 根据条件有 $\alpha_n = a_n - l$ 为无穷小数列. 那么在零的 $\frac{|l|}{2}$- 邻域之外只有数列 $\{\alpha_n\}$ 的有限多项. 设 n_0 是这些项的最大号码; 那么对于一切 $n > n_0$ 有 $|\alpha_n| < \frac{|l|}{2}$. 由此, 对于这样的 n 有 $(l = a_n - \alpha_n)$:

$$|l| = |a_n - \alpha_n| \leqslant |a_n| + |-\alpha_n| = |a_n| + |\alpha_n|.$$

因此, $|a_n| \geqslant |l| - |\alpha_n| > |l| - \frac{|l|}{2} = \frac{|l|}{2}$. ◄

命题 5 若当 $n \to \infty$ 时 $a_n \to l_1, b_n \to l_2$, 则当 $n \to \infty$ 时 $c_n = a_n \pm b_n \to l_1 \pm l_2$. 换言之, 对于收敛数列而言, 它们的和的极限等于它们的极限的和.

► 由条件知, $\alpha_n = a_n - l_1, \beta_n = b_n - l_2$ 都是无穷小数列. 因此,

$$c_n - (l_1 \pm l_2) = (a_n \pm b_n) - (l_1 \pm l_2) = \alpha_n \pm \beta_n = \gamma_n$$

是无穷小数列. 这意味着, 由极限的定义有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l_1 \pm l_2$. ◄

命题 6 若当 $n \to \infty$ 时 $a_n \to l_1, b_n \to l_2$, 则当 $n \to \infty$ 时 $c_n = a_n b_n \to l_1 l_2$ (积的极限等于极限的积).

► 我们有 $a_n = l_1 + \alpha_n, b_n = l_2 + \beta_n, c_n = a_n b_n = l_1 l_2 + \alpha_n l_2 + \beta_n l_1 + \alpha_n \beta_n = l_1 l_2 + \gamma_n$. 然而 γ_n 是无穷小数列, 因为它是三个无穷小数列的和. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l_1 l_2$. ◄

命题 7 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2, l_2 \neq 0$. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$, 即若分母的极限不等于零则比式的极限等于极限的比.

► 考察数列

$$c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

以及

$$\gamma_n = c_n - \frac{l_1}{l_2} = \frac{a_n}{b_n} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{a_n l_2 - b_n l_1}{b_n l_2}, \quad \alpha_n = a_n - l_1, \quad \beta_n = b_n - l_2.$$

从条件知, α_n 和 β_n 都是无穷小数列, 只要证明 γ_n 也是无穷小数列就够了. 为此把 γ_n 写成如下形式

$$\gamma_n = \frac{(l_1 + \alpha_n)l_2 - (l_2 + \beta_n)l_1}{b_n l_2} = \frac{\alpha_n l_2 - \beta_n l_1}{l_2} \cdot \frac{1}{b_n}.$$

现在发现, 根据命题 5 和 6, 数列 $\frac{\alpha_n l_2 - \beta_n l_1}{l_2}$ 是无穷小的, 而根据命题 4, 数列 $\frac{1}{b_n}$ 是有界的. 然则根据 §2 定理 6, γ_n 是无穷小的. 这样一来, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{l_1}{l_2}$. ◄

例 无穷递减几何级数的项的和.

► 设 $s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1}$. 那么 $qs_n = aq + \cdots + aq^{n-1} + aq^n, s_n = \dfrac{a - aq^n}{1-q}$. 因为当 $|q| < 1$ 时, $\{q^n\}$ 是无穷小数列, 所以

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}. \quad ◄$$

可把量 s 写成

$$s = s_n + r_n = \frac{a}{1-q},$$

其中 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} aq^{k-1}$ 叫作级数的第 n 部分和, 而 $r_n = s - s_n$ 叫作级数的余项.

§4. 不等式中的极限过程

命题 8 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$; 那么若对于任何 n 都成立不等式 $a_n > c$ (或 $a_n \geqslant c$), 则 $l \geqslant c$.

► 根据条件, $\alpha_n = a_n - l$ 是无穷小数列, 且 $\alpha_n \geqslant c - l$. 若设 $c - l > 0$, 则对于 $\varepsilon = \dfrac{c-l}{2}$, 零的 ε 邻域中完全不含数列 $\{\alpha_n\}$ 的任何一点. 这与 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小数列矛盾. 这意味着 $c - l \leqslant 0, l \geqslant c$. ◄

命题 9 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$; 那么, 若对于一切 $n \in \mathbb{N}, a_n < c$ (或 $a_n \leqslant c$), 则 $l \leqslant c$.

► 若 $b_n = -a_n$, 则当 $n \to \infty$ 时 $b_n \to -l, b_n > -c$ (或 $b_n \geqslant -c$). 那么从命题 8 推出 $-l \geqslant -c$, 即 $l \leqslant c$. ◄

命题 10 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$. 那么:

1) 若 $a_n < b_n$, 则 $l_1 \leqslant l_2$;

2) 若 $a_n \leqslant b_n$, 则 $l_1 \leqslant l_2$.

► 考察数列 $c_n = b_n - a_n$. 按条件, 对于一切 $nc_n > 0$ (或 $c_n \geqslant 0$) 且当 $n \to \infty$ 时 $c_n \to \delta = l_2 - l_1$.

根据命题 8, 在两种情况下均有 $\delta \geqslant 0$, 即 $l_2 \geqslant l_1$. ◄

命题 11 若 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小数列且对于一切自然数 n 有 $|\beta_n| \leqslant \alpha_n$, 则 β_n 也是无穷小数列.

► 由条件推出, 零的任何 ε 邻域在含有点 α_n 的同时亦含有 β_n, 因此在这个 ε 邻域之外只可含有那些具有使 $|\alpha_n| \geqslant \varepsilon$ 的号码的 β_n. 然而 $\{\alpha_n\}$ 是无穷小数列, 那么这种号码的数目是有限的, 从而 $\{\beta_n\}$ 也是无穷小数列. ◄

命题 12 设对于一切 $n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ 并设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$. 那么极限 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 存在且等于 l.

► 由条件推出, $0 \leqslant c_n - a_n \leqslant b_n - a_n$. 但关系式 $(b_n - a_n) \to 0$ 成立, 即 $b_n - a_n$ 是无穷小数列. 那么根据命题 11, $c_n - a_n$ 也是无穷小数列. 因此当 $n \to \infty$ 时 $c_n = (c_n - a_n) + a_n \to 0 + l = l$. ◄

例 1. 若 $a > 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

► 实际上, $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n, \alpha_n > 0$. 那么

$$a = (1+\alpha_n)^n > 1 + n\alpha_n, \quad 0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n}.$$

根据命题 11, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, 由此推出 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. ◄

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

► 实际上, 置 $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$. 那么

$$n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2, \quad 0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

根据命题 11, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, 由此推出 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ◄

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a$.

► 实际上, 令 $b_n = a_n - a$. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 且只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_1 + \cdots + b_n}{n} = 0$. 由于 $\{b_n\}$ 是无穷小数列, 所以存在 $c > 0$ 使得对于一切 n 有 $|b_n| < c$. 此外, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ 使得对于一切 $n > n_0$ 成立不等式 $|b_n| < \varepsilon$. 因此

$$\left|\frac{b_1 + \cdots + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_n}{n}\right| \leqslant \frac{cn_0}{n} + \frac{(n-n_0)}{n}\varepsilon < 2\varepsilon,$$

只要 $\dfrac{cn_0}{n} < \varepsilon, n > \dfrac{cn_0}{\varepsilon}$, 即 $n > \max\left\{n_0, \dfrac{cn_0}{\varepsilon}\right\}$. 由此已易于推出所需的结果. ◄

定理 8 (施托尔茨 (Stolz) 定理) 设

1) $y_{n+1} > y_n > 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$ *存在, 那么存在极限* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$.

► 从定理的条件推出, $\dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l + \alpha_n$, 其中 α_n 是无穷小数列. 因此, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$ 使得对于一切 $n \geqslant N$ 有 $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

取号码的值顺次等于 $N, \cdots, n$, 我们得到下面一组等式

$$x_{n+1} - ly_{n+1} = x_n - ly_n + \alpha_n(y_{n+1} - y_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{N+1} - ly_{N+1} = x_N - ly_N + \alpha_N(y_{N+1} - y_N).$$

把这些等式加起来, 得

$$x_{n+1} - ly_{n+1} = x_N - ly_N + \alpha_n(y_{n+1} - y_n) + \cdots + \alpha_N(y_{N+1} - y_N).$$

我们注意到, 在这个等式中一切形如 $y_{k+1} - y_k$ 的差都是正的, 因此, 经明显的算术变换而过渡到不等式, 我们就得到

$$|x_{n+1} - ly_{n+1}| \leqslant |x_N - ly_N| + |\alpha_n|(y_{n+1} - y_n) + \cdots + |\alpha_N|(y_{N+1} - y_N),$$
$$|x_{n+1} - ly_{n+1}| \leqslant |x_N - ly_N| + \frac{\varepsilon}{2}(y_{n+1} - y_n) + \cdots + \frac{\varepsilon}{2}(y_{N+1} - y_N),$$
$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l\right| \leqslant \frac{|x_N - ly_N|}{y_{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{y_{n+1} - y_N}{y_{n+1}}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, 存在 $n_1 = n_1(\varepsilon)$ 使得对于一切 $n > n_1$ 成立估计式 $\frac{|x_N - ly_N|}{y_{n+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

置 $n_0 = \max\{n_1, N\}$. 那么对于一切 $n > n_0$ 有 $\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l\right| < \varepsilon$. 因此, 当 $n \to \infty$ 时 $\frac{x_n}{y_n} \to l$. ◀

第七讲

§5. 单调数列. 魏尔斯特拉斯定理. 数 "e" 和欧拉常数

定义 6 数列称作是:

非增的, 如果对于一切 $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \leqslant x_n$ (记作: $x_n \downarrow$);

非减的, 如果对于一切自然数 $n, x_{n+1} \geqslant x_n$ (记作: $x_n \uparrow$);

减的, 如果对于一切 $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} < x_n$ (记作: $x_n \downarrow\downarrow$);

增的, 如果 $x_{n+1} > x_n$ (记作: $x_n \uparrow\uparrow$).

定理 9 (魏尔斯特拉斯定理) 设 $\{a_n\}$ 是非减的且有上界的数列, 那么 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.

► 因为数列 $\{a_n\}$ 有上界, 所以 $\sup\{a_n\}$ 存在. 设 $l = \sup\{a_n\}$. 我们来证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

换言之, 要证 $\alpha_n = a_n - l$ 是无穷小数列, 即对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在号码 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ 使得对于一切 $n > n_0$ 有 $|\alpha_n| < \varepsilon$. 然而 $\sup\{\alpha_n\} = 0$. 这就意味着:

1) 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\alpha_n \leqslant 0$;

2) 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在这样的数 k, 使得 $-\varepsilon < \alpha_k \leqslant 0$. 但数列 a_k 不减, 所以对于一切 $n > k$ 有

$$-\varepsilon < \alpha_k \leqslant \alpha_n \leqslant 0, \quad |\alpha_n| \leqslant |\alpha_k| < \varepsilon.$$

因此, 可取上面所示的数 k 作为 $n_0 = n_0(\varepsilon)$. ◀

定理 10 非增的有下界的数列有极限等于 $\inf\{a_n\}$.

► 代替 $\{a_n\}$ 而考虑数列 $\{b_n\}, b_n = -a_n$. 那么 $\inf\{a_n\} = -\sup\{b_n\}$, 于是定理 10 从定理 9 推出. ◀

例 海伦 (Heron) 迭代公式. 设

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

其中 a 是固定的正数, x_1 是任意的正数. 我们来证明, 当 $n \geqslant 2$ 时 $\{x_n\}$ 是减数列,[①] 以 $\sqrt{a}$ 为下界, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

实际上, 我们有:

1) $x_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \dfrac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \geqslant 0$;

2) $x_n - x_{n+1} = x_n - \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) = \dfrac{x_n^2 - a}{2x_n} \geqslant 0$.

从上面的公式得到 $x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \sqrt{a}$. 还有, 根据魏尔斯特拉斯定理, 对于单调数列存在 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \geqslant \sqrt{a} > 0$. 那么, 成立等式

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right),$$

即 $x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$; $x = \sqrt{a}$.

在按照海伦迭代公式计算正数的平方根时, 真正结果的十进制位数增长很快. 重要的是指出, 如果在计算过程中假定发生了错误, 那么在下一步这个错误会自动得到纠正 (自调整迭代过程).

我们用另外的方法来证明当 $n \to \infty$ 时 $x_n \to \sqrt{a}$. 从等式

$$x_{n+1} \pm \sqrt{a} = \frac{(x_n \pm \sqrt{a})^2}{2x_n}$$

得到

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}\right)^2.$$

[①] 按下面所证的, 以及定义 6, 此处 "减数列" 该是 "非增数列" —— 译者注.

令 $\frac{x_1-\sqrt{a}}{x_1+\sqrt{a}}=q$. 对于 $x_1>0$ 有 $|q|<1$. 进而得到

$$\frac{x_n-\sqrt{a}}{x_n+\sqrt{a}}=q^{2^{n-1}},$$

由此 $x_n=\frac{1+q^{2^{n-1}}}{1-q^{2^{n-1}}}\sqrt{a}$,

$$\Delta_n=x_n-\sqrt{a}=\frac{2q^{2^{n-1}}}{1-q^{2^{n-1}}}\sqrt{a}.$$

我们看到, Δ_n 确定了所给的迭代过程的收敛速度. 还有, 由于 $q^{2^{n-1}}$ 是无穷小数列, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

我们转向数 e 的定义.

定理 11 数列 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 有极限.

► 首先指出, 当 $k\geqslant 1$ 时

$$k!=k(k-1)\cdots 2\cdot 1\geqslant 2^{k-1}.$$

根据牛顿二项式公式, 有

$$a_n=1+\frac{1}{n}\binom{n}{1}+\frac{1}{n^2}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n^n}\binom{n}{n}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}=\sigma;$$

$$\sigma=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n},$$

于是

$$a_n\leqslant 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

此外, 在 σ 的表达式中, 对于 $k\geqslant 2$, 和式中的第 k 项随着 n 的增长而增加, 且每次求和的项数增加 1, 这表明 a_n 不减且数列 $\{a_n\}$ 有界. 根据魏尔斯特拉斯定理, 数列 $\{a_n\}$ 收敛. ◄

仿效欧拉, 把这个数列的极限记作 e. 周知 $e=2.718\,281\,828\,459\,045\cdots$. 人们把常数 e 称为**纳皮尔数** (J. Napier, 1550—1617). 数 a 关于底 e 的对数叫作**数 a 的自然对数**, 并记作 $\ln a$.

我们还要考察数列 $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. 我们有

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e.$$

数列 $\{b_n\}$ 是减数列. 实际上, 从伯努利不等式知当 $n \geqslant 1$ 时

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

$$> \left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n^2+3n+1)(n+1)}{n(n+2)^2}$$

$$= \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

因此, $b_n > e$. 由于 $b_n > e > a_n$, 所以

$$0 < r_n = e - a_n < b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{3}{n}.$$

量 r_n 刻画了数列 $\{a_n\}$ 的收敛速度.

由于数 e 在分析学中起着重要的作用, 我们引入它的另一个表达式.

定理 12 设 $c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = e$.

► 数列 $\{c_n\}$ 是单调增的且是有界的. 实际上

$$c_n \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

因此存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = e_1$. 还有, 由于

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sigma < c_n,$$

所以 $e \leqslant e_1$. 对于固定的 $s < n$ 有

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geqslant d_s(n) = 2 + \sum_{k=2}^{s} \frac{1}{k!}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k-1}{n}\right).$$

由此

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim_{n\to\infty} d_s(n) = c_s,$$

即 e 是 $\{c_s\}$ 的上界. 但由于

$$\lim_{s\to\infty} c_s = \sup_s\{c_s\} = e_1,$$

所以 $e \geqslant e_1$. 因此 $e = e_1$. ◄

我们发现, 若 $e = c_n + r_n$ 则

$$0 < r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

定理 13 *数 e 是无理数.*

► 设不然. 则 $e = \frac{p}{q}, (p, q) = 1$, 而考虑到上面所做的评说, 有

$$0 < e - c_q < \frac{1}{q \cdot q!}.$$

乘此不等式两边以 $q!$, 我们得到 $A = q!(e - c_q)$ 是整数而同时 $0 < A < \frac{1}{q}$, 这是不可能的. ◄

我们还要定义一个在数学分析中起重要作用的常数.

定理 14 *设 $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. 那么极限 $\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n$ 存在.*

► 数列 $\{\gamma_n\}$ 是单调减的. 实际上

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

这是因为, 根据上面已证的事实, 有

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n,$$

从而

$$1 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

我们进而证明数列 $\{\gamma_n\}$ 以数 0 为下界. 从定理 11 的证明知

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1, \text{ 即 } \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n},$$

因此

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n$$
$$= \ln\frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0.$$

所以, 根据魏尔斯特拉斯定理, 数列 $\{\gamma_n\}$ 有极限. ◄

这个极限叫作欧拉常数且常以字母 γ 或字母 C 记之. 对于这个常数, 欧拉计算出了十进小数点后第十五位, 即 $\gamma = 0.577\,215\,664\,901\,532\cdots$. 一系列 "老的" 数学问题与欧拉常数的算术属性相关. 特别是, 至今为止, 尚不知常数 γ 是代数数还是超越数. 通过其他已知的量, 例如 π, e 或代数数的对数来表示这个常数的企图迄今亦无进展. 整系数代数多项式的根叫作**代数数**. 首项 (最高次幂项) 的系数为 1 的整系数代数多项式的根叫作**整代数数**. 显然, 有理数都是代数数. 一个数若不是代数数, 就叫作**超越数**.

作为魏尔斯特拉斯关于单调数列的极限的定理的另一个应用, 我们引入一个数列的例子. 这个数列借助简单的公式给出且仅取素数值.

定理 15 (米勒定理) 存在这样的实数 $\alpha > 1$, 使得若 $\alpha = \alpha_0, 2^{\alpha_0} = \alpha_1, \cdots, 2^{\alpha_n} = \alpha_{n+1}, \cdots$, 则对于一切 $n \geqslant 1, [\alpha_n]$ 都是素数. 换言之, 存在实数 $\alpha > 1$, 使得对于一切 $n \geqslant 1, p_n = [2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^\alpha}}}}]$ 都是素数.

► 定理 15 的证明靠的是著名的切比雪夫的定理, 即周知的 "贝特朗 (Bertrand) 猜想"(可参阅 [18]): 对于任何 $x > 1$ 存在素数 p 使 $x < p < 2x$.

我们归纳地构作数列 $p_n = [\alpha_n]$. 置 $p_1 = 3$. 根据切比雪夫定理, 存在素数 p_{n+1} 满足条件

$$2^{p_n} < p_{n+1} < p_{n+1} + 1 \leqslant 2^{p_n+1}.$$

如果 $p_{n+1} + 1 = 2^{p_n+1}$, 则 $p_{n+1} = 2^{p_n+1} - 1$ 不可能是素数, 因为它有因子 $2^{\frac{p_n+1}{2}} - 1$. 因此

$$2^{p_n} < p_{n+1} < p_{n+1} + 1 < 2^{p_n+1}.$$

置

$$u_n = \underbrace{\log_2 \cdots \log_2}_{n} p_n, \quad v_n = \underbrace{\log_2 \cdots \log_2}_{n}(p_n + 1).$$

显然, 由不等式

$$p_n < \log_2 p_{n+1} < \log_2(p_{n+1} + 1) < p_n + 1,$$

我们有 $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$. 于是 u_n, v_n 都是单调数列. 因此, 根据魏尔斯特拉斯定理, 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha$ 且 $u_n < \alpha < v_n$. 令

$$\alpha = \underbrace{\log_2 \cdots \log_2}_{n} \alpha_n.$$

那么根据函数 $y = \log_2 x$ 的单调性, 我们得到 $p_n < \alpha_n < p_n + 1$, 即 $p_n = [\alpha_n]$. ◄

第八讲

§6. 关于有界数列存在部分极限的波尔查诺–魏尔斯特拉斯定理

定义 7 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 并设 $\{k_n\}$ 是由自然数组成的严格增数列. 那么数列 $b_n = a_{k_n}$ 叫作数列 a_n 的子列.

定义 8 若存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, 则 l 叫作是数列 $\{a_n\}$ 的部分极限, 或者叫作是数列 $\{a_n\}$ 的极限点.

形象地说, 每个子列都可通过删除数列 $\{a_n\}$ 的一部分项而保留余下的项的排列次序而得到.

定理 16 (波尔查诺–魏尔斯特拉斯定理) 从任何有界数列中都可选取收敛的子列.

► 根据条件, 存在 $c > 0$ 使对于一切 n 有 $|a_n| \leqslant c$. 把区间 $I_0 = [-c, c]$ 二等分. 所得区间之一必含数列的无限多项, 称之为 I_1 并取任意一元 $a_{n_1} \in I_1$ 作为所求子列的第一项, 即令 $b_1 = a_{n_1}$. 然后再把 I_1 二等分并用 I_2 代表其中含有数列 $\{a_n\}$ 的无限多项的那一半. 在其中选取一个号码 n_2 超过 n_1 的项 a_{n_2}, 并置 $b_2 = a_{n_2}$. 重复实施所述的手续于区间 I_2, 得到区间 $I_3 \subset I_2$ 以及满足条件 $n_3 > n_2$ 的一项 $b_3 = a_{n_3}$. 依此类推, 我们得到 $b_4 = a_{n_4} \in I_4 \subset I_3, b_5 = a_{n_5} \in I_5 \subset I_4$, 等等. 结果我们得到一个数列 $\{b_k\}$ 和一个嵌套闭区间列 $\{I_k\}$, 而且对于一切 $k \in \mathbb{N}, b_k \in I_k, b_k = a_{n_k}, n_k < n_{k+1}$. 换句话说, $\{b_k\}$ 是 $\{a_k\}$ 的子列.

剩下的是证明数列 $\{b_k\}$ 收敛. 为此我们指出, 闭区间 I_k 的长度 δ_k 等于 $c\cdot 2^{-k+1}$, 由此, 当 $k \to \infty$ 时 $\delta_k \to 0$. 这表明, 嵌套闭区间列 $\{I_k\}$ 收缩, 从而全部闭区间 I_k 有唯一的公共点 l. 此数 l 正是 $\{b_k\}$ 的极限. 实际上, 如 $I_k = [s_k, t_k]$, 则 $s_k \leqslant l \leqslant t_k, t_k - s_k = \delta_k, \alpha_k = l - s_k \leqslant \delta_k, \beta_k = t_k - l \leqslant \delta_k$. 然而, 由于当 $k \to \infty$ 时 $\delta_k \to 0$, 所以 $\alpha_k \to 0, \beta_k \to 0$. 由此, $s_k = l - \alpha_k \to l, t_k = l + \beta_k \to l$. 而由于 $b_k = a_{n_k}, s_k \leqslant a_{n_k} \leqslant t_k$, 所以当 $k \to \infty$ 时 $b_k = a_{n_k} \to l$, 而这就是所要证的. ◄

定义 9 数列的部分极限中的最大者叫作它的上极限, 而最小者叫作下极限.

我们指出, 如果数列有界, 则它有上极限和下极限.

譬如说, 考察上极限的情形. 根据定理 16, 给定的数列 $\{a_n\}$ 的全部部分极限的集合 L 不空. 此外, 该数列的每个子列有与它自己同样的界.

因此, 如果对于一切 n 成立不等式 $m \leqslant a_n \leqslant M$, 那么对于任何 $l \in L$ 有 $m \leqslant l \leqslant M$. 这表明集合 L 有界. 令 $\lambda = \sup L$. 那么对于任何自然数 k, 在区间

$\left[\lambda-\frac{1}{2k},\lambda\right]$ 中都至少有数列 $\{a_n\}$ 的一个部分极限 $l=l_k$. 从而数列 $\{a_n\}$ 的某一项 $a_{n_k}=b_k$ 满足不等式 $l_k-\frac{1}{2k}<b_k$. 在此可以认为号码 n_k 随着参数 k 的增加而严格增. 那么诸数 b_k 构成一个子列, 它满足不等式 $\lambda-\frac{1}{k}<b_k\leqslant M$.

由于 $\{b_k\}$ 是有界数列, 那么根据定理 16, 从中可以取出收敛的子列 $\{b_{k_r}\}$. 若 l_0 是它的极限, 则成立不等式

$$\lambda=\lim_{r\to\infty}\left(\lambda-\frac{1}{k_r}\right)\leqslant l_0.$$

然而 $\{b_{k_r}\}$ 也是 $\{a_n\}$ 的子列, 所以 $l_0\in L$. 那么 $l_0\leqslant\lambda=\sup L$. 于是 $\lambda\leqslant l_0\leqslant\lambda$, 即 $\lambda=l_0$ 是 $\{a_n\}$ 的部分极限, 而这就是上面所断言的.

§7. 数列收敛的柯西准则

很明显, §6 的定理 16 直接蕴含着下述的数列收敛的必要充分条件.

定义 10 数列 $\{a_n\}$ 叫作是基本的, 或叫作柯西列, 如果下述条件成立:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\ \text{使得}\ \forall m,n>n_0\ \text{有}\ |a_m-a_n|<\varepsilon.$$

定理 17 (柯西准则) 为使数列 $\{a_n\}$ 收敛, 必须且只需它是基本列.

► 必要性 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$, 则对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $n_0=n_0(\varepsilon)$ 使得对于任何 $n>n_0$ 有 $|a_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因此, 对于任何 $m,n>n_0$

$$|a_n-a_m|=|(a_n-l)-(a_m-l)|\leqslant|a_n-l|+|a_m-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此, $\{a_n\}$ 是基本列.

充分性 依条件, 数列 $\{a_n\}$ 是基本的.

1. 我们来证 $\{a_n\}$ 有界. 事实上, 取 $\varepsilon=1$, 那么存在 $n_0=n_0(1)$ 使得对于一切 $n\geqslant n_0$ 有 $|a_n-a_{n_0}|<1$. 但在这种情况下

$$|a_n|\leqslant|a_n-a_{n_0}|+|a_{n_0}|<1+|a_{n_0}|=h.$$

由此,

$$|a_n|\leqslant\max(|a_1|,\cdots,|a_{n_0}|,h)=c.$$

2. 根据波尔查诺–魏尔斯特拉斯定理, 存在收敛子列 $a_{n_1},\cdots,a_{n_k},\cdots\to a$, 当 $k\to\infty$ 时. 其收敛之条件可写成这样:

$$\forall\varepsilon>0,\exists k_1=k_1(\varepsilon)\ \text{使得}\ \forall k>k_1\ \text{有}\ |a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $N_1 = n_{k_1}$ 以及 $N = \max\left(n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_1\right)$. 那么对于一切 $n > N$ 以及 $n_k > N$ 有

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

可见, 级数 $\{a_n\}$ 收敛. ◀

定理 17 提供了下列有益于证实具体数列的发散性的表示. 指出这一点是重要的.

定理 18 *为使数列 $\{a_n\}$ 发散, 必须且只需它不是基本列, 也就是说, 存在数 $\varepsilon > 0$ 使得对于每个 $n_0 \in N$ 都存在号码 $m \geqslant n_0$ 和 $n \geqslant n_0$, 对于这些号码成立不等式*

$$|a_m - a_n| \geqslant \varepsilon.$$

例 1. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$. 那么对于任何 m 都有不等式

$$x_{2m} - x_m = \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m} \geqslant \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}.$$

数列 $\{a_n\}$ 发散 (这里我们置 $m = n_0, n = 2m$).

2. 人们使用逐次逼近法求解开普勒方程

$$x - \alpha \sin x = y \quad (0 < \alpha < 1),$$

令

$$x_0 = y, \quad x_1 = y + \alpha \sin x_0, \quad \cdots, \quad x_n = y + \alpha \sin x_{n-1}.$$

我们来证明存在 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 且 $x = \xi$ 是开普勒方程的唯一解.

根据柯西准则, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在数 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ 使得对于一切 $n > n_0$ 和对于一切 $p \geqslant 1$ 有

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

我们来估计差的模 $|x_{n+p} - x_n|$. 根据不等式 $|\sin y| \leqslant |y|$ 有

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &= \alpha|\sin x_{n+p-1} - \sin x_{n-1}| \leqslant \alpha|x_{n+p-1} - x_{n-1}| \\ &\leqslant \alpha^2|x_{n+p-2} - x_{n-2}| \leqslant \alpha^n|x_p - x_0| = \alpha^{n+1}|\sin x_{p-1}| \leqslant \alpha^{n+1}.\end{aligned}$$

还有, 由于 $|\alpha| < 1$, 数列 $\{\alpha^{n+1}\}$ 是无穷小数列. 因此, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $n_1 = n_1(\varepsilon)$ 使得对于一切 $n > n_1$ 有 $|\alpha^{n+1}| < \varepsilon$.

现在, 在定理 17 中置 $n_0 = n_1$. 结果我们得到, 数列是基本的, 因而收敛到某数 ξ. 因此, 在等式

$$x_n = y + \alpha \sin x_{n-1}$$

中过渡到极限 $n \to \infty$, 我们就得到 $\xi = y + \alpha \sin \xi$, 即 ξ 是开普勒方程的解.

进而若 ξ_1 是另一个解, 则 $|\xi_1-\xi|=\alpha|\sin\xi_1-\sin\xi|$. 故若 $\xi_1\neq\xi$ 则由此推出 $1\leqslant\alpha$, 而条件并非如此.

换言之, $x=\xi$ 是方程的唯一解, 此即所欲证者.

开普勒方程是 J. Kepler (1571—1630) 在研究天体沿椭圆轨道运动 (二维问题) 时所引入考察的.

第三章　函数在一点处的极限

第九讲

§1. 数值函数的极限的概念

我们已了解了数列的极限. 数列乃是定义在自然数集上的函数. 然而定义在整个数轴或数轴的某一区段或某一射线上的函数的极限的概念, 也在分析学中起着巨大作用. 下面要考察的是一系列这类概念. 这些概念彼此之间, 以及与已考察过的数列的极限的概念之间都是很相近的. 我们列出这些概念中的最重要的一些:

1) $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ —— 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限;

2) $l = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ —— 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限;

3) $l = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ —— 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限;

4) $l = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ —— 函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限;

5) $l = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ —— 函数 $f(x)$ 当 $x \to \pm\infty$ 时的极限.

当说及函数 $f(x)$ 的极限时, 我们认为它是在整个数轴 $\mathbb{R}$ 上定义的或是在它的某个子集 A, 即 $A \subset \mathbb{R}$ 上定义的. 这个子集 A, 可以是, 譬如说, 开区间, 闭区间, 区段之总和, 或一般地是一适当的无限集. 重要的只是, 函数 $f(x)$ 的自变量所趋于的点 x_0 (即 $x \to x_0$), 是集合 A 的极限点, 就是说: 要使得在点 x_0 的任一 δ 邻域中都含有集合 A 的无限多个点. 在 $x \to \infty$ 或 $x \to \pm\infty$ 的情形, 如果 $x \to \infty$, 则集合 A

<table>
<tr><th colspan="2">极限的定义</th></tr>
<tr><th>根据柯西</th><th>根据海涅 (Heine)</th></tr>
<tr><td colspan="2">数 l 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限, 如果:</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得
$\forall x : (x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>对于任何数列 $\{x_n\} : \forall n \in \mathbb{N}$
$x_n \neq x_0, x_n \in A$ 且当 $n \to \infty$ 时 $x_n \to x_0$,
有 $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">记号: $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 或当 $x \to x_0$ 时 $f(x) \to l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">数 l 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限, 如果:</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得
$\forall x : (x \in A, 0 < x - x_0 < \delta)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>对于任何数列 $\{x_n\} : \forall n \in \mathbb{N}$
$x_n > x_0, x_n \in A$ 且当 $n \to \infty$ 时 $x_n \to x_0$,
有 $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">记号: $l = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ 或当 $x \to x_{0+}$ 时 $f(x) \to l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">数 l 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限, 如果:</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得
$\forall x : (x \in A, -\delta < x - x_0 < 0)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>对于任何数列 $\{x_n\} : \forall n \in \mathbb{N}$
$x_n < x_0, x_n \in A$ 且当 $n \to \infty$ 时 $x_n \to x_0$,
有 $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">记号: $l = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ 或当 $x \to x_{0-}$ 时 $f(x) \to l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">数 l 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限, 如果:</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0\ \exists c = c(\varepsilon) > 0$ 使得
$\forall x : (x \in A, |x| > c) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>对于任何无穷大数列 $\{x_n\}$:
$x_n \in A$, 当 $n \to \infty$ 时有 $f(x_n) \to l$,</td></tr>
<tr><td colspan="2">记号: $l = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 或当 $x \to \infty$ 时 $f(x) \to l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">数 l 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限, 如果:</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0\ \exists c = c(\varepsilon) > 0$ 使得
$\forall x : (x \in A, x > c) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>对于任何无穷大数列 $\{x_n\} : x_n > 0, x_n \in A$,
当 $n \to \infty$ 时有 $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">记号: $l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 或当 $x \to +\infty$ 时 $f(x) \to l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">数 l 叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限, 如果:</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0\ \exists c = c(\varepsilon) < 0$ 使得
$\forall x : (x \in A, x < c) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>对于任何无穷大数列 $\{x_n\} : x_n < 0, x_n \in A$,
当 $n \to \infty$ 时有 $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">记号: $l = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 或当 $x \to -\infty$ 时 $f(x) \to l$</td></tr>
</table>

应是无界的; 如果 $x \to +\infty$, 则集合 A 应该无上界; 若 $x \to -\infty$ 则集合 A 应该无下界.

以后需要下述定义

定义 1 属于 A 且满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的点 x 的集合, 叫作点 x_0 的(相对于集合 A 的) 空心邻域.

当 $A = \mathbb{R}$ 时, 点 x_0 的空心 δ 邻域由两个开区间 $(x_0 - \delta, x_0)\bigcup(x_0, x_0 + \delta)$ 组成.

对于所有这些类型的极限成立与关于数列的极限的定理类似的定理. 例如, 如果 $f_1(x) \to l_1, f_2(x) \to l_2$ (在自变量的 x 的同一趋向之下), 那么:

1) $f_1(x) \pm f_2(x) \to l_1 \pm l_2$;

2) $f_1(x)f_2(x) \to l_1l_2$;

3) $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \to \dfrac{l_1}{l_2}$ 如果 $l_2 \neq 0$ 的话.

如果 $c(x)$ 是常数, 即对于任何 $x \in A$ 都有 $c(x) = l$, 那么 $c(x) \to l$.

这些定理的证明, 本质上是重复对于收敛数列的论证. 虽然如此, 还是应该进行证明, 而这是相当繁重的. 因此, 我们给出极限的一般定义, 依照这个定义可以对上述的极限也包括数列的极限进行完全的考察. 这就说到沿着集合的基的极限.

§2. 集合基. 函数沿着基的极限

定义 2 设 A 是函数 $f(x)$ 的定义域. 一个集合族 $\{b\} = B$, 其中 $b \subset A$, 叫作集合 A 的集合基或简称为基, 如果它的元素满足下述条件:

1) B 由无限多个非空的集合 b 组成;

2) $\forall b_1, b_2 \in B \;\; \exists b_3 \in B, b_3 \subset b_1 \bigcap b_2$.

(这里 b_1, b_2, b_3 是集合 A 的子集). 集合 B 的元素叫作是基 B **的终端**. 集合 A 本身叫作基 B **的基本集**. 还有, 对于基 B 的任意两个终端 b_1 和 b_2, 若 $b_2 \subset b_1$, 则说明 b_2 跟随 b_1 之后, 而 b_1 在 b_2 之前.

定义 3 数 l 叫作函数 $f(x)$ 沿着基 B 的极限, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在终端 $b \in B$ 使得对于一切 $x \in b$ 有不等式 $|f(x) - l| < \varepsilon$.

记作: $\lim\limits_{B} f(x) = l$ 或 $f(x) \to l$ (沿着基 B). 此时还说 $f(x)$ 沿着基 B 收敛到 l. 类似地定义下述极限:

$$\lim_{B} f(x) = \infty(\pm\infty).$$

我们指出, 从函数沿着基 B 的极限的定义的形式上的正确性的观点来说, 基 B 中的终端数目的无限性的要求是多余的. 在终端数目有限的情形, 所作的定义意思不大. 不能充分反映极限概念的实质.

重要的是指出, 如果用基 B 的任何一个终端 b_0 来代替它的基本集 A, 那么基 B 的跟随 b_0 之后的终端的集合 B', 根据上面所作的注记, 依然构成集合基. 同时从极限 $\lim\limits_{B'} f(x) = l$ 的存在推出存在极限 $\lim\limits_{B} f(x) = l$, 且反之亦然. 根据这个性质, 在实践中对于基 B 和 B' 实际上不加区别.

基的例子

1. $A = \mathbb{N}$. 基 B_0 (记作: $n \to \infty$) 由集合 $b = N_s, s \geqslant 1$ 组成, 其中 N_s 是自然数 $s, s+1, s+2, \cdots$ 的集合.

那么沿基 B_0 的极限正是数列 $\{a_n\}$ 的极限:

$$x = n, f(x) = a_n, \text{ 且 } \lim_{B_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

2. $A = \mathbb{R}$. 基 B_1 由点 x_0 的一切空心 δ 邻域组成, $\delta > 0$ (记为: $x \to x_0$). 那么 $\lim\limits_{B_1} f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的极限, 即

$$\lim_{B_1} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

3. $A = \mathbb{R}$. 基 $B_2(x \to x_0+)$ 由一切形如 $(x_0, x_0+\delta)$ 的区间组成, 其中 $\delta > 0$,

$$\lim_{B_2} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

4. $A = \mathbb{R}$. 基 $B_3(x \to x_0-)$ 由一切形如 $(x_0-\delta, x_0)$ 的区间组成, 其中 $\delta > 0$,

$$\lim_{B_3} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x).$$

5. $A = \mathbb{R}$. 基 $B_4(x \to \infty)$ 由一切形如 $(-\infty, -c)\bigcup(c, +\infty)$ 的集合组成, 其中 $c > 0$,

$$\lim_{B_4} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

6. $A = \mathbb{R}$. 基 $B_5(x \to +\infty)$ 由一切形如 $(c, +\infty)$ 的射线组成, 其中 $c > 0$,

$$\lim_{B_5} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

7. $A = \mathbb{R}$. 基 $B_6(x \to -\infty)$ 由一切形如 $(-\infty, c)$ 的射线组成, 其中 $c < 0$,

$$\lim_{B_6} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

容易确认, 所有这些集合族 $B_0, B_1, \cdots, B_6$ 实际上都满足基的定义. 对于所有这些集合都符合相应的基的定义的证明都是同一类型的. 所以我们只限于考察集合 B_2.

1) B_2 由形如 $(x_0-\delta, x_0)\bigcup(x_0, x_0+\delta)\neq\varnothing$ 的终端 $b=b_\delta$ 组成, 其中 δ 是任意的正数. 因此 B_2 是无限集, 且其每个终端 b_δ 都不空.

2) 对于一切 $\delta_1\leqslant\delta_2$ 有 $b_{\delta_1}\bigcap b_{\delta_2}=b_{\delta_1}$, 即基的第二个条件成立.

因此, 集合 B_2 是集合基.

定义 4 设集合 $D\subset A$ (其中 A 是函数 $f(x)$ 的定义域) 且设存在 $c>0$ 使得对于一切 $x\in D$ 有 $|f(x)|<c$. 那么函数 $f(x)$ 叫作是在集合 D 上有界 (以数 c 为界) 的.

类似地定义函数 $f(x)$ 在集合 D 上的有上界和有下界的性质.

定义 5 在基 B 的某个终端上有界 (有上界, 有下界) 的函数叫作是关于这个基终极有界 (终极有上界, 终极有下界) 的.

命题 1 a) 设对于一切 $x\in b$ $f(x)=c$, 其中 b 是基 B 的一个终端. 那么 $\lim\limits_{B} f(x)=c$.

b) 若函数沿基 B 的极限存在, 则此极限是唯一的.

► a) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 取终端 $b\in B$. 那么对于一切 $x\in b$, 有 $|f(x)-c|=0<\varepsilon$.

b) 设不然, 即存在 $l_1\neq l_2$ 使得

$$\lim_{B} f(x)=l_1,\quad \lim_{B} f(x)=l_2.$$

取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}|l_1-l_2|$. 那么:

$$\exists b_1=b_1(\varepsilon)\in B,\ \text{使得}\ \forall x\in b_1\ \text{有}\ |f(x)-l_1|<\varepsilon;$$
$$\exists b_2=b_2(\varepsilon)\in B,\ \text{使得}\ \forall x\in b_2\ \text{有}\ |f(x)-l_2|<\varepsilon.$$

根据基的定义, 存在基的终端 b_3 使得 $b_3\subset b_1\bigcap b_2$. 任取 $x\in b_3$. 那么

$$\begin{aligned}|l_1-l_2|&=|(f(x)-l_2)-(f(x)-l_1)|\leqslant|f(x)-l_2|+|f(x)-l_1|<2\varepsilon\\&=|l_1-l_2|,\end{aligned}$$

这不可能. ◄

命题 2 a) 若 $\lim\limits_{B} f(x)=l$, 则函数 $f(x)$ 终极地以数 $|l|+1$ 为界.

b) 若 $\lim\limits_{B} f(x)=l$ 且 $l\neq 0$, 则函数 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ 在终端 $b\left(\dfrac{|l|}{2}\right)$ 中终极地以数 $\dfrac{2}{|l|}$ 为界, 而函数 $f(x)$ 在同一邻域中与值 l 有同样符号.

我们来证明这个命题.

对于基 $B_1(x \to x_0)$	一般情形
▶ a) 取 $\varepsilon = 1$. 那么存在 $\delta = \delta(1)$ 使得对于空心 δ 邻域中的一切点 x 有 $\|f(x) - l\| < 1$. 由此, 对于一切 $x : 0 < \|x - x_0\| < \delta$, 有 $\|f(x)\| = \|(f(x) - l) + l\| \leqslant \|f(x) - l\| + \|l\| \leqslant 1 + \|l\|$.	▶ a) 取 $\varepsilon = 1$. 则存在基的终端 $b = b(1)$ 使得对于一切 $x \in b$ 有 $\|f(x) - l\| < 1$. 由此, 对于一切 $x \in b$, 我们得到 $\|f(x)\| = \|(f(x) - l) + l\| \leqslant \|f(x) - l\| + \|l\| \leqslant 1 + \|l\|$.
b) 仅考虑 $l > 0$ 的情形 (第二种情形是类似的) 取 $\varepsilon = \frac{l}{2}$. 则存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得对于一切 $x : 0 < \|x - x_0\| < \delta$, 有 $\|f(x) - l\| < \varepsilon = \frac{l}{2}$. 因此, 以下不等式成立: $f(x) - l > -\frac{l}{2}, f(x) > \frac{l}{2} > 0$, $0 < g(x) = \frac{1}{f(x)} < \frac{2}{l}$. ◀	b) 仅考虑 $l > 0$的情形 (第二种情形是类似的) 取 $\varepsilon = \frac{l}{2}$. 则存在基 B 的终端 $b = b(\varepsilon)$ 使得对于一切 $x \in b$ 有 $\|f(x) - l\| < \varepsilon = \frac{l}{2}$. 因此, 以下不等式成立: $f(x) - l > -\frac{l}{2}, f(x) > \frac{l}{2} > 0$, $0 < g(x) = \frac{1}{f(x)} < \frac{2}{l}$. ◀

命题 3 设存在极限 $\lim\limits_{B} f(x) = l_1$ 和 $\lim\limits_{B} g(x) = l_2$. 那么成立等式

$$\lim_{B}(f(x) + g(x)) = l_1 + l_2.$$

可以不完全严格地说, 两个函数的和的极限等于它们的极限的和.

$x \to x_0$	一般情形
▶ 作为所求的 δ 邻域的半径我们取 $\delta = \min\left(\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \delta_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$, 其中 $\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 是点 x_0 的空心 δ_1 邻域的半径, 在这个邻域中 $\|f(x) - l_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$, 而 δ_2 是点 x_0 的这样的空心 δ_2 邻域的半径, 在这个邻域中 $\|g(x) - l_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$. 那么点 x_0 的空心 δ 邻域以条件 $0 < \|x - x_0\| < \delta$ 而既含在点 x_0 的 δ_1 邻域中又含在点 x_0 的 δ_2 邻域中. 因此对于 x 有 $\|(f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2)\| \leqslant \|f(x) - l_1\| + \|g(x) - l_2\| < \varepsilon$. ◀	▶ 作为终端 $b(\varepsilon)$, 我们取任意一个这样的终端 b_3, 使得 $b_3 \subset b_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \bigcap b_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 其中 $b_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 是这样的终端, 使在这个终端里 $\|f(x) - l_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$, 而 $b_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 是使其中的点满足 $\|g(x) - l_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$ 的终端. 那么 $\forall x \in b_3$ 有 $\|(f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2)\| \leqslant \|f(x) - l_1\| + \|g(x) - l_2\| < \varepsilon$. ◀

命题 4 设对于一切 $x \in b, f(x) = g(x)$, 其中 b 是基 B 的某个终端, 而且 $\lim\limits_B f(x) = l$. 那么

$$\lim_B g(x) = l.$$

► 我们有 $g(x) = f(x) + (g(x) - f(x))$. 由于对于一切 $x \in b, g(x) - f(x) = 0$, 所以依命题 1a) 我们得到 $\lim\limits_B (g(x) - f(x)) = 0$. 由此,

$$\lim_B g(x) = \lim_B f(x) + \lim_B (g(x) - f(x)) = l + 0 = l. \quad ◄$$

定义 6 若 $\lim\limits_B \alpha(x) = 0$, 则函数 $\alpha(x)$ 称作是沿着基 B 的无穷小函数 [1].

注 从命题 1a) 和命题 3 推出, 极限 $\lim\limits_B f(x) = l$ 存在这个条件, 等价于

$$\alpha(x) = f(x) - l$$

是沿着基 B 的无穷小函数.

命题 5 设函数 $\alpha(x)$ 是沿着基 B 的无穷小函数, $f(x)$ 沿着同一基终极有界, 且

$$|\beta(x)| \leqslant |\alpha(x) f(x)|.$$

那么函数 $\beta(x)$ 是沿着基 B 的无穷小函数.

我们来证明这个命题.

$x \to x_0$	一般情形
► 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 应指出这样的 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $\forall x : 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|\beta(x)\| < \varepsilon$. 根据函数 $f(x)$ 的终极有界性, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得 $\forall x : 0 < \|x - x_0\| < \delta_1 \|f(x)\| < C$. 存在这样的 $\delta_2 = \delta_2\left(\frac{\varepsilon}{C}\right) > 0$, 使得 $\forall x : 0 < \|x - x_0\| < \delta_2$ 有 $\|\alpha(x)\| < \frac{\varepsilon}{C}$. 令 $\delta = \min\left(\delta_1, \delta_2\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)\right)$. 那么 $\forall x : 0 < \|x - x_0\| < \delta$ 有 $\|\beta(x)\| \leqslant \|\alpha(x)\|\|f(x)\| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon$. ◄	► 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 应指出基 B 的这样的终端 $b = b(\varepsilon)$, 使得对于一切 $x \in b \Rightarrow \|\beta(x)\| < \varepsilon$. 根据函数 $f(x)$ 的终极有界性, 存在这样的终端 b_1, 使得对于一切 $x \in b_1 \Rightarrow \|f(x)\| \leqslant C$. 存在这样的 $b_2 = b_2\left(\frac{\varepsilon}{C}\right) \in B$, 使得对于一切 $x \in b_2 \Rightarrow \|\alpha(x)\| < \frac{\varepsilon}{C}$. 按条件 $b_3 \subset b_1 \bigcap b_2\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)$ 取一个终端 b_3. 那么对于一切 $x \in b_3$ 有 $\|\beta(x)\| \leqslant \|\alpha(x)\| \cdot \|f(x)\| < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon$. ◄

命题 6 设 $\lim\limits_B f(x) = l_1, \lim\limits_B g(x) = l_2$. 那么

$$\lim_B f(x)g(x) = l_1 l_2.$$

[1] 下文中也称为无穷小量 —— 译者注.

► 我们有 $f(x) = l_1 + \alpha(x), g(x) = l_2 + \beta(x)$, 其中 $\alpha(x), \beta(x)$ 都是沿着基 B 的无穷小函数. 那么我们得到

$$f(x)g(x) - l_1 l_2 = \alpha(x)l_2 + \beta(x)l_1 + \alpha(x)\beta(x)$$

是无穷小函数. ◄

命题 7 设 $\lim\limits_{B} f(x) = l_1, \lim\limits_{B} g(x) = l_2, l_2 \neq 0$. 那么

$$\lim_{B} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

► 我们有

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1 + \alpha(x)}{l_2 + \beta(x)} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{\alpha(x)l_2 - \beta(x)l_1}{l_2} \cdot \frac{1}{g(x)} = \gamma(x).$$

这里, $\frac{1}{l_2}(\alpha(x)l_2 - \beta(x)l_1)$ 是沿着基 B 的无穷小函数, $\frac{1}{g(x)}$ 是沿着同一个基的终极有界函数, 因此 $\gamma(x)$ 是沿着基 B 的无穷小函数. ◄

第十讲

§3. 在不等式中取极限

命题 8 设 $c \in \mathbb{R}, \lim\limits_{B} f(x) = l$ 且在基 B 的某个终端 b 上 $f(x) > c$ (或 $f(x) \geqslant c$). 那么 $l \geqslant c$.

► 根据条件, $\alpha(x) = f(x) - l$ 是无穷小函数, 且对于一切 $x \in b$,

$$\alpha(x) = f(x) - l \geqslant c - l.$$

假定 $c - l > 0$. 那么对于 $\varepsilon = \frac{c-l}{2}$, 存在这样的终端 b_1, 使得对于一切 $x \in b_1$ 成立不等式 $|\alpha(x)| < \varepsilon$. 我们发现, 存在终端 $b_2 \subset b \bigcap b_1$ 以及点 $x \in b_2$ 使得不等式

$$\varepsilon > |\alpha(x)| \geqslant \alpha(x) \geqslant c - l = 2\varepsilon > 0.$$

成立. 由此推出 $0 < 2\varepsilon < \varepsilon$, 而这是不可能的. ◄

命题 9 设 $\lim\limits_{B} f(x) = l_1, \lim\limits_{B} g(x) = l_2$, 在基 B 的某个终端 b 上 $f(x) \leqslant g(x)$. 那么 $l_1 \leqslant l_2$.

► 考察 $h(x)=g(x)-f(x)$. 根据条件, $h(x)\geqslant 0, \lim\limits_B h(x)=l=l_2-l_1$. 由命题 8 知 $l\geqslant 0$, 即 $l_2\geqslant l_1$. ◄

命题 10 设在基 B 的某个终端上 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$,

$$\lim_B f(x)=l,\quad \lim_B h(x)=l.$$

那么 $\lim\limits_B g(x)=l$.

► 由条件知

$$0\leqslant g(x)-f(x)\leqslant h(x)-f(x),$$
$$\alpha(x)=h(x)-f(x)\to 0\ (\text{沿着基 } B),$$

即 $\alpha(x)$ 是沿着基 B 的无穷小函数.

而由于 $|g(x)-f(x)|\leqslant\alpha(x)$, 所以根据 §2 的命题 5, $g(x)-f(x)$ 是沿着基 B 的无穷小函数. 那么

$$\lim_B g(x)=\lim_B(g(x)-f(x))+\lim_B f(x)=0+l=l. \quad ◄$$

§4. 函数沿着基存在极限的柯西准则

定理 1 (柯西准则) 为使函数 $f(x)$ 沿着基 B 存在极限, 必要且充分的是对于任意的 $\varepsilon>0$ 都存在这样的终端 $b=b(\varepsilon)$, 使得对于一切 $x,y\in b$, 成立不等式 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

► *必要性*. 设 $\lim\limits_B f(x)=l$. 那么对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在终端 $b_1=b_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\in B$ 使得对于一切 $x,y\in b_1$ 有

$$|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(y)-l|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 对于一切 $x,y\in b_1$

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-l|+|f(y)-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

充分性. 我们来证 $f(x)$ 终极有界. 实际上, 取 $\varepsilon=1$. 那么存在 $b(1)\in B$ 使得对于一切 $x,y\in b(1)$ 有 $|f(x)-f(y)|<1$. 固定 y. 那么对于一切 $x\in b(1)$

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(y)|+|f(y)|\leqslant 1+|f(y)|.$$

根据柯西条件, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $b(\varepsilon)\in B$ 使得对于一切 $x,y\in b(\varepsilon)$ 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 而这表明, ε 是对于一切 $x,y\in b(\varepsilon)$ 量 $|f(x)-f(y)|$ 的值的上界.

再使用 $f(x)$ 的终极有界性, 我们得到

$$\begin{aligned} m(\varepsilon) = \inf_{x\in b(\varepsilon)} f(x) \in \mathbb{R}, \quad M(\varepsilon) = \sup_{x\in b(\varepsilon)} f(x) \in \mathbb{R}, \\ \varepsilon \geqslant \sup_{x,y\in b(\varepsilon)} |f(x)-f(y)| = \sup_{x,y\in b(\varepsilon)} (f(x)-f(y)) \\ = \sup_{x\in b(\varepsilon)} f(x) - \inf_{y\in b(\varepsilon)} f(y) = M(\varepsilon) - m(\varepsilon). \end{aligned}$$

令 $\varepsilon = \varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$. 则可以认为对于一切 $n_2 > n_1, b\left(\dfrac{1}{n_2}\right) \subset b\left(\dfrac{1}{n_1}\right)$. 其实, 譬如说假如 $b\left(\dfrac{1}{2}\right) \not\subset b(1)$, 则可按条件 $b_3 \subset b(1)\bigcap b\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 而取 b_3 代替 $b\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 依此类推. 据此, 我们有

$$m\left(\frac{1}{n_1}\right) \leqslant m\left(\frac{1}{n_2}\right), \quad M\left(\frac{1}{n_1}\right) \geqslant M\left(\frac{1}{n_2}\right).$$

此外, 对于一切 $x \in b(\varepsilon)$ 成立不等式

$$m(\varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant M(\varepsilon).$$

对应于每个 $\varepsilon = \varepsilon_n > 0$ 有自己的闭区间 $I_n = \left[m\left(\dfrac{1}{n}\right), M\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]$. 闭区间 I_n 的整个族构成收缩闭区间列, 因为对于 $\varepsilon_n > \varepsilon_s$

$$m(\varepsilon_n) \leqslant m(\varepsilon_s) \leqslant M(\varepsilon_s) \leqslant M(\varepsilon_n),$$

即 $I_s \subset I_n$. 根据关于收缩闭区间列的引理, 存在这样的数 l, 使得对于任何号码 n, 有 $l \in I_n$.

我们来证明 $\lim\limits_B f(x) = l$. 为此应该证明对于任意的 $\varepsilon_0 > 0$, 存在 $b_1(\varepsilon_0) \in B$, 使得对于一切 $x \in b_1(\varepsilon)$ 成立不等式 $|f(x) - l| < \varepsilon_0$.

我们取 $n > 2\varepsilon_0^{-1}$ 以及 $b\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 为 $b_1(\varepsilon_0)$. 那么对于一切 $x, y \in b_1(\varepsilon_0)$, 根据柯西条件成立不等式

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

且对于一切 $x \in b_1(\varepsilon_0)$ 有

$$m\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant M\left(\frac{1}{n}\right).$$

此外, $l \in I\left(\dfrac{1}{n}\right)$. 这表明

$$m\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant l \leqslant M\left(\frac{1}{n}\right).$$

由此

$$|f(x) - l| \leqslant M\left(\frac{1}{n}\right) - m\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0. \quad ◀$$

定义 7 两个基 B_1 和 B_2 叫作是等价的, 如果基 B_1 的任何终端都包含在基 B_2 的某个终端之中且反之亦然.

我们指出, 对于等价的基, 关于极限的命题总是同时成立的.

第十一讲

§5. 柯西的收敛定义与海涅的收敛定义的等价性

定理 2 函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时依柯西的定义收敛与依海涅的定义收敛是等价的. 换言之, 当 $x \to x_0$ 时函数按柯西的定义存在极限蕴含着函数依海涅的定义沿同一个基存在极限, 且反之亦然, 同时, 在两种情况下极限的值是一样的.

► 1. 设依柯西的定义存在 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. 我们来证依海涅的定义存在相应的极限.

实际上, 根据条件我们有

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ 使得 } \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$$

不等式 $|f(x) - l| < \varepsilon$ 成立.

设 $\{x_n\}$ 是任意的一个这样的数列, 当 $n \to \infty$ 时 $x_n \to x_0$ 且对于一切 $n \in \mathbb{N}, x_n \neq x_0$. 那么对于任意的 $\delta > 0$, 存在 $N_1 = N_1(\delta)$ 使得对于一切 $n > N_1$

$$0 < |x_n - x_0| < \delta.$$

由于 δ 可以任取, 所以对于 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 成立同样的论断.

应该证明, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在号码 $N(\varepsilon)$ 使得

$$\forall n > N(\varepsilon) \text{ 有 } |f(x_n) - l| < \varepsilon.$$

置 $N(\varepsilon) = N_1(\delta(\varepsilon))$. 那么根据 $0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$, 有 $|f(x_n) - l| < \varepsilon$,

2. 现在来证反方向的论断. 设对于任何满足条件 $x_n \to x_0, x_n \neq x_0$ 的数列 $\{x_n\}$ 都有当 $n \to \infty$ 时, $f(x_n) \to l$.

下面用反证法. 设 l 不是函数 $f(x)$ 依柯西定义的极限. 这表明, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\forall \delta > 0 \ \ \exists x : 0 < |x - x_0| < \delta$$

且不等式 $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$ 成立.

考察数列 $\delta_n = \dfrac{1}{n}$. 那么对于任何 n 都存在数 x_n 使得: 1) $x_n \neq x_0$; 2) $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$, 而 3) $|f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon$. 诸数 x_n 组成一个收敛到 x_0 的数列, 因此, 根据依海涅定义

的收敛性, 当 $n \to \infty$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. 那样的话, 在不等式 $|f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon$ 中取极限, 我们得到 $0 = |l - l| \geqslant \varepsilon$. 所得的矛盾建立了定理的第二个断言的真确性. ◀

§6. 关于复合函数的极限的定理

我们记得, 形如

$$h(x) = f(g(x))$$

的函数 $h(x)$ 叫作复合函数, 其中 $f(y)$ 和 $g(x)$ 是两个这样的函数, $f(y)$ 的定义域包含函数 $g(x)$ 取值的整个集合. 函数 $h(x)$ 也叫作函数 f 和 g 的复合 (或者叠合). 写作 $h = f \circ g$.

下述定理之成立似应是所希望的: 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = l$; 则

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l.$$

譬如说, 对于连续函数这个论断是成立的. 不过在一般情况下, 该定理并不真确.

例

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x \neq 0, \\ 1, & 若\ x = 0, \end{cases} \quad g(x) = 0.$$

那么

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(g(x)) = 1, \quad \lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1.$$

尽管如此, 下述断言成立.

定理 3 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = f(y_0)$. 那么

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0).$$

► 应证明对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于一切满足条件 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x, 有

$$|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon.$$

往下, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, 使得对于一切 $y : |y - y_0| < \delta_1$, 有 $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$. 对于这个 δ_1, 存在 $\delta = \delta(\delta_1) > 0$, 使得对于一切满足条件 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x, 有

$$|g(x) - y_0| < \delta_1.$$

所得到的 δ 就是所要找的. 现在对于一切满足条件 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x, 有 $|g(x) - y_0| < \delta_1$. 因此有 $|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$. ◀

定理 4 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{y\to a} f(y) = f(a)$. 那么

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

► 要证的是，对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ 使得对于一切 $n > n_0$，成立不等式

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

按条件有:

1) 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta_1 = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对于满足条件 $|y - a| < \delta_1$ 的一切 y，成立不等式

$$|f(y) - f(a)| < \varepsilon;$$

2) 存在 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ 使得对于一切 $n > n_0$ 成立不等式

$$|x_n - a| < \delta_1.$$

置 $n_0 = n_0(\delta_1(\varepsilon))$. 那么对于一切 $n > n_0$

$$|x_n - a| < \delta_1 \text{ 且 } |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon. \quad ◄$$

定理 5 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$，且对于一切属于点 x_0 的某个空心邻域的 x，有 $g(x) \neq y_0$，并设 $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = l$. 那么

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l.$$

► 要证的是，对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对于一切满足条件 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x，成立不等式

$$|f(g(x)) - l| < \varepsilon.$$

根据条件有，对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在这样的 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$，使得对于一切满足条件 $0 < |y - y_0| < \delta_1$ 的 y，成立不等式 $|f(y) - l| < \varepsilon$. 对于确定的 $\delta_1 > 0$，存在 $\delta_2 = \delta(\delta_1) > 0$ 使得对于一切满足条件 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 的 x，成立不等式 $|g(x) - y_0| < \delta_1$. 此外，根据条件，存在这样的 $\delta_3 > 0$，使得对于一切满足条件 $0 < |x - x_0| < \delta_3$ 的 x，成立不等式 $g(x) \neq y_0$. 那么，我们取

$$\delta = \min(\delta_3, \delta_2(\delta_1(\varepsilon))).$$

我们得到，对于这个量 δ，成立所求的不等式. ◄

现设 $f(x)$ 沿着基 B 有极限. 在怎样的情况下复合函数 $h(t) = f(g(t))$ 沿着某个另外的基 D 有同一个极限? 换句话说，何时在位于极限号之下的函数中允许把变量 x 替换成新的变量 (相应地把基 B 替换成新的基 D) 而保持极限值不变? 这里成立下述定理.

定理 6 设 $\lim\limits_{B} f(x) = l$. 那么, 为了存在极限

$$\lim_{D} f(g(t)) = l,$$

只需在映射 $x = g(t)$ 之下, 基 B 的每个终端 b 都包含 (完全地!) 基 D 的某个终端 d 的像.

► 根据函数沿着基 B 的极限的定义, 我们有, 对于任何 $\varepsilon > 0$ 都存在终端 $b = b(\varepsilon) \in B$, 使得对于一切 $x \in b$ 有 $|f(x) - l| < \varepsilon$.

从定理的条件推出, 存在终端 $d \in D$ 使得 $g(d) \subset b$, 因此, 对于任何 $t \in d$

$$|f(g(t)) - l| < \varepsilon,$$

这就表明定理的结论成立. ◄

例 1. 设

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l, \quad x = \frac{1}{t}.$$

那么

$$\lim_{t\to 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = l.$$

实际上, 基 B 的任何终端 $b = \{x||x| > c\}(x \to \infty)$ 都完全地包含基 D 的终端 $d = \left\{t||t| < \frac{1}{c}\right\}(t \to 0)$ 的像.

2. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, 若\ x = 0, \\ 0, 若\ x \neq 0, \end{cases}$$

且 $g(t) \equiv 0$. 那么

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \text{ 但 } \lim_{t\to 0} f(g(t)) = 1,$$

于是复合函数有不同的极限. 在这种情形, 终端 $b_\delta \in B(x \to 0)$ 的形状是 $0 < |x| < \delta$, 但任何终端 $d \in D, d = \{t|0 < |t| < \delta_1\}$ 的像的形状都是 $x \equiv 0$, 那么在集 B 的终端 b_δ 中不含有基 D 的任何终端的像, 从而定理 1 的条件不满足.

3. 设当 $x \to a$ 时 $f(x) \to l$ 且当 $t \to b$ 时 $g(t) \to a$, 同时, 在点 b 的某个空心邻域中 $g(t) \neq a$. 那么对于复合函数 $h(t)$ 有当 $t \to b$ 时 $h(t) = f(g(t)) \to l$.

实际上, 基 $x \to a$ 的每个终端都是点 $x = a$ 的某个空心邻域. 然而根据条件当 $t \to b$ 时 $g(t) \to a$ 且 $g(t) \neq a$, 这个邻域包含点 $t = b$ 的某个空心邻域在映射 $x = g(t)$ 之下的像. 于是, 此处定理 1 的条件成立, 因此当 $t \to b$ 时 $h(t) \to l$, 而这就是要证的.

所证的定理适用于计算函数的极限.

4. 当 $x \to 0$ 时

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^3+x+1} \to \frac{0^2+2\cdot 0+1}{0^3+0+1} = 1.$$

5. 当 $x \to 2$ 时

$$f(x) \to \frac{2^2+2\cdot 2+1}{2^3+2+1} = \frac{9}{11}.$$

6. 当 $x \to \infty$ 时

$$f(x) = \frac{1}{x}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} \to 0.$$

§7. 无穷小函数的阶

定义 8 设 $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ 都是沿着基 B 的无穷小函数, 而且在基的某个终端上 $\beta(x) \neq 0$. 那么, 如果 $\alpha(x)$ 表成形状

$$\alpha(x) = \beta(x)\gamma(x),$$

则说 $\alpha(x)$ 比 $\beta(x)$ 有更大 (或更高) 的无穷小的阶.

定义 9 无穷小函数 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 称作是等价的 (沿着基 B), 如果差

$$\delta(x) = \alpha(x) - \beta(x)$$

有比 $\alpha(x)$ (或 $\beta(x)$) 更高的无穷小的阶. 此时记 $\alpha \sim \beta$ (沿着基 B).

命题 11 下述断言等价: 1) $\alpha \sim \beta$ (沿着基 B); 2) $\frac{\beta}{\alpha} \sim 1$ (沿着基 B), $\frac{\alpha}{\beta} \sim 1$ (沿着基 B).

► 1) 根据条件 $\delta = \alpha - \beta$ 有比 α 更高的无穷小的阶, 即 $\delta = \alpha\gamma$, 其中 γ 是无穷小函数. 因此, $\beta = \alpha - \delta$,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha-\delta}{\alpha} = \frac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha} = 1-\gamma \to 1.$$

2) 反方向的结论类似地可证. ◄

定义 10 设函数 $g(x)$ 在基 B 的某个终端上不取零值.

1. 若函数 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ 终极有界 (沿着基 B), 则记

$$f(x) = O(g(x)) \quad (\text{沿着基 } B).$$

读作: 沿着基 B, f 是大 Og, 也记作 $f(x) \ll g(x)$ (沿基 B) 在 $f(x) \ll g(x) \ll f(x)$ 的情形, 说函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 沿基 B 有同样的阶.

2. 若函数 $h(x)$ 是无穷小函数, 则记 $f(x) = o(g(x))$ 且读之为 f 是小 og.

3. 若存在数 $\delta > 0$, 使得对于基 B 的任何终端 b 都找得到 $x \in b$ 满足 $|h(x)| > \delta > 0$, 则记

$$f(x) = \Omega(g(x)) \quad (\text{沿基 } B).$$

读之为: f 是欧米伽 g (沿基 B).

4. 当 $x \to 0$ 时函数 $f(x) = O(x^m)$ 叫作是 m 阶无穷小函数.

记号 $O(g), o(g), \Omega(g)$ 是由朗道 (E. Landau) 给出的, 而记号 "$\ll$" 是维诺格拉多夫 (И. М. Виноградов) 引入的.

例 1. 当 $x \to \infty$ 时有

$$\frac{x+1}{x+2} = O(1).$$

2. 当 $x \to \infty$ 时有

$$\frac{\sin x}{x} = o(1), \quad \frac{\sin x}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad \frac{\sin x}{x} = \Omega\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. 当 $x \to 0^+$ 时有 $\sqrt{x} - x \sim \sqrt{x}$.

4. 当 $x \to +\infty$ 时有 $\sqrt{x} - x \sim -x$.

第四章　函数在一点处的连续性

第十二讲

§1. 在一点处连续的函数的性质

定义 1　函数 $f(x)$ 叫作是在点 x_0 处连续的, 如果下述等价条件之一成立:

1) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$;

4) $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是无穷小函数, $\alpha(x_0) = 0$;

5) 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有: 点 $f(x_0)$ 的 ε 邻域包含点 x_0 的某个邻域 (在映射 f 之下) 的像.

这些定义的等价性由早已证明了的关于极限的定理推出.

定义 2　函数叫作是右连续的, 如果

$$f(x_{0+}) = \lim_{x\to x_{0+}} f(x) = f(x_0);$$

是左连续的, 如果

$$f(x_{0-}) = \lim_{x\to x_{0-}} f(x) = f(x_0).$$

命题 1 为使函数 $f(x)$ 是在点 x_0 处连续的, 必须且只需它既是右连续的也是左连续的.

► *必要性* 若 $f(x)$ 连续, 则当 $x \to x_0$ 时 $f(x) \to f(x_0)$. 这表明, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于一切 $x: |x - x_0| < \delta$, 成立不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 那么, 对于一切 $x: -\delta < x - x_0 < 0$ 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 即 $f(x)$ 左连续. 右连续性类似地得到.

充分性 函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时右连续且左连续. 那么

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 \ \forall x: 0 < x - x_0 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$
$$\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 \ \forall x: -\delta_2 < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. 那么对于一切 $x: |x - x_0| < \delta$ 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 于是 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. ◄

例 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 的每点都连续. 那么函数

$$F(x) = \sum_{a<n\leqslant x} c_n f(n) - f(x) \sum_{a<n\leqslant x} c_n$$

同样在闭区间 $[a, b]$ 的每点都连续 (在闭区间的端点处的连续性理解为右连续或左连续).

其实我们有: 函数 $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 其中 x_0 不是整数, 这是因为在这个点的某个邻域中 $C(x) = \sum\limits_{a<n\leqslant x} c_n f(n)$, $A(x) = \sum\limits_{a<n\leqslant x} c_n$ 都是常数. 设 x_0 是整数. 那么

$$F(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} F(x) = \sum_{a<n\leqslant x_0} c_n f(n) - f(x_0) \sum_{a<n\leqslant x_0} c_n = F(x_0),$$
$$F(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} F(x) = \sum_{a<n\leqslant x_0-1} c_n f(n) - f(x_0) \sum_{a<n\leqslant x_0-1} c_n = F(x_0).$$

根据上面的结论, 函数 $F(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

连续函数的性质从相应的极限的性质推出.

设函数 f 和 g 都在点 x_0 处连续. 那么在点 x_0 处有:

a) 对于一切 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 函数 $c_1 f + c_2 g$ 连续;

b) 函数 fg 连续;

c) 若 $g(x_0) \neq 0$ 则 $\dfrac{f}{g}$ 连续;

d) 若 $f(x_0) \neq 0$ 则存在 $\delta > 0$ 使得

$$f(x)f(x_0) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

(即函数 $f(x)$ 保持符号);

e) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有界;

f) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, $g(y)$ 在点 $y_0 = f(x_0)$ 处连续, 则 $h(x) = g(f(x))$ 在点 x_0 处连续.

§2. 初等函数的连续性

我们来列举一下初等函数.

1. $P(x)$ —— 多项式, $P(x) = a_0x^n + \cdots + a_n$.

2. 有理函数 $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$, 其中 $P(x), Q(x)$ 是多项式.

3. 指数函数 $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$.

4. 幂函数 $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

5. 对数函数 $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$.

6. 一切三角函数.

7. 所有这些函数的一切可能的复合函数.

在初等数学的范畴内, 只研究这些函数, 所以它们叫作初等函数. 这些函数的函数性质的描述本质上凭借指数函数, 幂函数, 对数函数以及实变量的正弦 (sin) 和余弦 (cos) 函数的定义. 应该说, 在初等数学课程中所列举的函数的性质的确立, 基本上是描述性的, 是从算术的和几何的观察出发的. 在数学分析课程中, 这些函数主要是用以作为应用一般理论的材料, 而且我们似乎可以停留在已经具备的 "朴素的" 观点上. 不过, 数学分析的工具使我们能够给一切基本的初等函数作出完全严格的定义. 在研究了单调函数的性质之后, 我们将立即给出指数函数, 对数函数和幂函数的严格的定义. 三角函数的情况稍许复杂一些, 因为它们的定义应该依赖于圆弧长度的概念以及幂级数的概念. 我们暂且把严格的定义放置一旁而凭借基本的函数性质来证明函数 $y = a^x$ 和 $y = \sin x$ 的连续性.

命题 2 *在任意一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处, 函数 $y = a^x$ 都是连续的.*

► 设 $a > 1$. 要证明的是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. 使得对于一切满足条件 $|x - x_0| < \delta$ 的 x, 有 $|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$, 也就是说 $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon a^{-x_0} = \varepsilon_1$. 我们看到, 可以限于 $\varepsilon_1 < 1$ 的情形. 我们取数 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ 作为 $\delta(\varepsilon)$, 使得从不等式 $|x - x_0| < \delta_1$ 推出不等式 $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon_1$. 下面令 $\delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon_1) = \dfrac{\varepsilon_1}{a-1}$.

我们有 $-\delta_1 < x - x_0 < \delta_1$. 由于 $a > 1$, 那么

$$a^{-\delta_1} < a^{x-x_0} < a^{\delta_1},$$

$$a^{-\delta_1} - 1 < a^{x-x_0} - 1 < a^{\delta_1} - 1.$$

首先我们证明 $a^{\delta_1}-1<\varepsilon_1$. 令

$$N=\left[\frac{1}{\delta_1}\right]=\left[\frac{a+1}{\varepsilon_1}\right]\geqslant\left[\frac{a+\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right]=\left[\frac{a}{\varepsilon_1}\right]+1>\frac{a}{\varepsilon_1}.$$

那么 $\dfrac{1}{\delta_1}\geqslant N$, 即 $\delta_1\leqslant\dfrac{1}{N}$. 由于

$$(1+\varepsilon_1)^N>1+N\varepsilon_1>1+\varepsilon_1\frac{a}{\varepsilon_1}>a,$$

所以

$$1+\varepsilon_1>a^{\frac{1}{N}}\geqslant a^{\delta_1}.$$

由此推出,

$$a^{\delta_1}-1<\varepsilon_1,\quad a^{-\delta_1}>\frac{1}{1+\varepsilon_1}=1-\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}>1-\varepsilon_1.$$

最后我们有

$$-\varepsilon_1<a^{-\delta_1}-1<a^{x-x_0}-1<a^{\delta_1}-1<\varepsilon_1,$$

因此, $|a^{x-x_0}-1|<\varepsilon_1$. 这就证明了 $f(x)=a^x$ 在点 x_0 处的连续性. ◄

命题 3 函数 $f(x)=\sin x$ 在点 x_0 处连续.

► 我们记得 $|\sin x|\leqslant|x|$. 于是有

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|.$$

那么, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 置 $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$, 就得到

$$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon\quad\forall x:|x-x_0|<\varepsilon.$$

因此, 函数 $f(x)=\sin x$ 连续. ◄

这些命题可以写成这样:

$$\sin x=\sin x_0+\alpha(x),\quad a^x=a^{x_0}+\beta(x),$$

其中 $\alpha(x),\beta(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是无穷小函数.

实际上, 当 $x\to 0$, 即 $x_0=0$ 时, 成立更精确的关系式, 人们称之为美妙极限:

$$\frac{\sin x}{x}\sim 1,\quad\frac{e^x-1}{x}\sim 1.$$

这些极限用来进一步研究初等函数的微分性质.

第十三讲

§3. 重要的极限

命题 4 下述关系式成立:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\qquad \text{d)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

► a) 先考察 $x\to+\infty$ 的情形. 根据指数函数的单调性, 成立不等式

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

而我们知道

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

由此

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=e,\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e,$$

即成立断言:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_1=N_1(\varepsilon):\forall n>N_1\Rightarrow\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n-e\right|<\varepsilon;$$

$$\exists N_2=N_2(\varepsilon):\forall n>N_2\Rightarrow\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right|<\varepsilon.$$

那么当 $n>\max(N_1,N_2)$ 时有

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<e+\varepsilon;$$

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<e+\varepsilon.$$

若 $x>1+\max(N_1,N_2)=N$, 则 $[x]>\max(N_1,N_2)=N-1$, 因此, 对于 $x>N$ 成立不等式

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}<e+\varepsilon.$$

于是得到

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall x > N \Rightarrow \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon.$$

这表明当 $x \to +\infty$ 时 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$.

现考察 $x \to -\infty$ 的情形. 置 $y = -x$. 那么, 使用第三章的关于复合函数的极限的定理 6, 我们有

$$\begin{aligned} e &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} \\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x. \end{aligned}$$

把 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 两种情形合起来, 就得到关系式

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

结论 a) 获证.

b) 为证关系式 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 也使用第三章的定理 6. 置 $x = \frac{1}{y}$. 得

$$e = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

c) 由于当 $x \to 0$ 时

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \to e,$$

所以, 从函数 $y = e^x$ 的连续性和单调性推出,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

d) 再次使用关于复合函数的极限的定理, 置

$$\begin{aligned} g(x) &= e^x - 1 \to 0 \quad 当\ x \to 0\ 时, \\ f(y) &= \frac{\ln(1+y)}{y} \to 1 \quad 当\ y \to 0\ 时, \end{aligned}$$

此外并置 $f(0) = 1$. 那么有当 $x \to 0$ 时. $f(g(x)) = \frac{x}{e^x - 1} \to 1$ 由此推出结论 d). ◀

命题 5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

► 对于 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 考察单位圆的长为 x 的弧所对的扇形, 以及两个三角形, 其中一个内接于此扇形, 而第二个是包含此扇形, 与扇形有公共角以及有公共的位于横

轴上的边的直角三角形. 比较这些图形的面积就知道 $\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2} < \tan\frac{x}{2}$①. 由此得到 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. 此不等式是关于偶函数的, 所以对于 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 成立. 由于 $\cos x$ 是连续函数, 所以根据在不等式中取极限的定理,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \quad ◀$$

我们来考察计算极限的例子.

例 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{x} = \frac{e^{\alpha x + o(x)} - 1}{x} = \frac{1+\alpha x + o(x) - 1}{x}$$
$$= \alpha + o(1) \to \alpha \quad 当\ x\to 0\ 时.$$

这个方法叫作是无穷小函数的等价代换.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{2\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)^2}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1).$$

同样地:

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ 当 $x\to 0$;

2) $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ 当 $x \to 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left((1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}\right)^x = e^{x\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}} = e^x$.

§4. 函数在集合上的连续性

定义 3 函数 $f(x)$ 称作是在集合 A 上连续的, 如果它在任何一点 $x\in A$ 处都连续.

如果并非集合 A 的每点都连同它的一个邻域一道含于 A 中, 则此定义要稍加修改.

定义 3′ 函数 $f(x)$ 称作是在闭区间 $[a,b]$ 上连续的, 如果它在每个满足条件 $a < x_0 < b$ 的点 x_0 处都连续, 在点 a 右连续且在点 b 处左连续.

定义 4 函数 $f(x)$ 在集合 A 上称作是:

a) 非减的 ($f\uparrow$ 在 A), 若对于一切 $a, b\in A, a<b$ 有

$$f(a) \leqslant f(b);$$

---

①直接得到的是 $\sin x < x < \tan x$ —— 译者注.

b) 非增的 ($f\downarrow$ 在 A), 若对于一切 $a,b\in A, a<b$ 有

$$f(a)\geqslant f(b);$$

c) (严格) 增的 ($f\uparrow\uparrow$), 若对于一切 $a,b\in A, a<b$ 有

$$f(a)<f(b);$$

d) (严格) 减的 ($f\downarrow\downarrow$), 若对于一切 $a,b\in A, a<b$ 有

$$f(a)>f(b).$$

若函数 $f(x)$ 在 A 上非减, 或非增, 或增, 或减, 则说它是 A 上的单调函数.

定义 5 若函数 $f(x)$ 在自己的定义域中不在点 x_0 连续, 则它叫作是在点 x_0 处间断的. 点 x_0 叫作是 $f(x)$ 的间断点.

定义 6 点 x_0 称作是函数 $f(x)$ 的第一类间断点, 如果存在有限的极限 $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)$. 在相反的情形, 函数 $f(x)$ 的间断点叫作是第二类间断点.

例 1. $y=\{x\}$ 在整点处发生第一类间断.

2. $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x_0=0$ 处发生第二类间断 $\left(\text{考虑两个数列}: x_n=\dfrac{1}{\pi n}, y_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+\pi n}\right)$.

定义 7 在点 x_0 处的第一类间断称为是可去的, 如果存在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ 而 $l\neq f(x_0)$.

如果重新定义 (或也可能要补充定义) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的值为 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, 则此间断即被去除. 若函数 $f(x)$ 并不曾在 $x=x_0$ 处定义而当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to l$, 则也说发生可去间断. 在相反的情形下, 第一类间断叫作是不可去的.

定理 1 (关于闭区间上的单调函数的间断点) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调, 那么, 它在此区间内只可能发生第一类间断. 而且, 对于一切 $x_0\in[a,b]$ 有

$$\lim_{x\to x_0+}f(x)=\inf_{x>x_0}f(x)=l_1,\quad \lim_{x\to x_0-}f(x)=\sup_{x<x_0}f(x)=l_2,\quad l_2\leqslant f(x_0)\leqslant l_1,$$

如果 $f(x)$ 不减. 而若函数 $f(x)$ 不增, 则

$$\lim_{x\to x_0+}f(x)=\sup_{x>x_0}f(x)=l_1,\quad \lim_{x\to x_0-}f(x)=\inf_{x<x_0}f(x)=l_2,\quad l_1\leqslant f(x_0)\leqslant l_2.$$

► 仅考察函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不减 ($f\uparrow$) 这一种情况. 其他情形可类似地考察, 在这种情况下来证明定理. 我们有

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x) = l_1.$$

类似地可得

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x) = l_2.$$

由于 l_1 是函数 $f(x)$ 当 $x > x_0$ 时的值的集合的下确界, 所以:

1) $\forall x > x_0 \quad f(x) \geqslant l_1$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_1 > x_1$ 使得 $f(x_1) < l_1 + \varepsilon$.

根据 $f(x)$ 是一个非增函数, 我们有

$$\forall x : x_0 < x \leqslant x_1 \Rightarrow l_1 \leqslant f(x) < l_1 + \varepsilon,$$

因此, $l_1 = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$. 还有, 数 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 当 $x > x_0$ 时的下界, 因此 $f(x_0) \leqslant l_1$.

类似地, $f(x_0) \geqslant l_2$. 因此 $l_2 \leqslant f(x_0) \leqslant l_1$. ◄

定理 2 (单调函数的连续性准则) *设函数 $f(x)$ 定义在闭区间 $[a,b]$ 上并且单调. 那么, 为使它在此闭区间上连续, 必要且充分的是对于任意的 $l \in [f(a), f(b)]$, 存在点 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = l$.*

► 我们仅考察在闭区间上的非减函数 $f(x)$ 的情形.

必要性 任取一数 $l \in [f(a), f(b)]$. 考察使 $f(x) \geqslant l$ 的点 x 的集合 $X = \{x\} \subset [a,b]$, 并令 $x_0 = \inf X$. 那么, 由于 $f(x)$ 是一个非减函数, 有

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x) = l_1 \geqslant l.$$

当 $x < x_0$(如果 $x_0 \neq a$ 的话), $f(x) < l$. 由此

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = l_2 \leqslant l,$$

即 $l_2 \leqslant l \leqslant l_1$.

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则它在点 x_0 处连续, 即 $l_2 = l_1 = f(x_0)$. 因此 $l = l_2 = l_1 = f(x_0)$.

而若 $x_0 = a$, 则 $f(a) \leqslant l \leqslant l_1$. 那么从 $f(x)$ 在点处的右连续性推出 $f(a) = l_1$, 这表明 $l = f(a) = l_1$.

充分性 反证. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处发生间断, 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不减. 那么, 对于值 $l_1 = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x), l_2 = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ 成立不等式 $l_2 < l_1$ 且 $l_2 \leqslant f(x_0) \leqslant l_1$.

取 $l \in (l_2, l_1)$ 且 $l \neq f(x_0)$. 我们有:

$$l > f(x) \text{ 当 } x < x_0,\quad l < f(x) \text{ 当 } x > x_0,\quad l \neq f(x) \text{ 当 } x = x_0.$$

这说明，函数在 $[a,b]$ 上不取值 l. 从而得到矛盾. ◄

定理 3 (关于反函数) 设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上严格增且连续. 那么存在定义在 $[f(a),f(b)]$ 上的严格增且连续的函数 $x=g(y)$，使得 $g(f(x))=x$，也就是说 $g=f^{-1}$.

► 1. 映射 $f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$ 是单射，其中 $[a,b]=I_1,[f(a),f(b)]=I_2$，即，$f$ 是嵌入. 换句话说，对于任何点 $x_1\neq x_2$ 有不等式 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

2. 映射 f 是满射，即覆盖. 此事之真确是根据定理 2，它断言对于任何 $l\in[f(a),f(b)]$，存在 $x_0\in[a,b]$ 使 $f(x_0)=l$. 因此,f 是双射，即 f 建立了 I_1 和 I_2 之间的一个双方单值对应. 那么，存在逆映射 g，即反函数 $x=g(y)$.

1) 这个函数 g 是单调增的，因为若 $y_1<y_2$，则 $g(y_1)=x_1,g(y_2)=x_2$，并且 $f(x_1)=y_1$ 且 $f(x_2)=y_2$. 由此可见 $x_1<x_2$，因为 $f(x)$ 单调增.

2) 这个函数 $g(y)$ 取遍 $[a,b]$ 的一切值，因为对于每个 $x\in[a,b]$，存在 y 使 $g(y)=x$，且此 y 就是数 $f(x)$. 由此，根据定理 2 知函数 $g(y)$ 在闭区间 I_2 上连续. ◄

使用上面证明的关于单调函数的定理，我们重新转来研究初等函数. 首先，我们注意到，对于自然数 m，函数 $f(x)=x^m=\underbrace{x\cdots x}_{m\text{次}}$ 是连续的且当 $x\geqslant 0$ 时是严格增的.

实际上，如果 $a>b>0$，那么

$$a^m>a^{m-1}b>a^{m-2}b^2>\cdots>ab^{m-1}>b^m.$$

而函数 $f(x)=x^m$ 的连续性从它是 m 个形如 $y=x$ 的连续函数的乘积这一事实推出.

根据定理 3，对于一切 $x\geqslant 0$，此函数存在反函数 $g(x)$，它也是连续且严格增的. 对于这个函数，正像从初等数学课程中已知的，使用记号 $g(x)=\sqrt[m]{x}$ 标记之，且称之为开 m 次方根运算. 现固定 $x>0$ 和自然数 m，来考察数 $y=\sqrt[m]{x},z=\sqrt[m]{x^n}$，那么 $y^m=x,y^{mn}=x^n,z^m=x^n$. 由此得到 $(y^n)^m=z^m$ 和 $y^n=z$，即 $(\sqrt[m]{x})^n=\sqrt[m]{x^n}$. 这表明，开整数阶方根与整数阶乘幂的运算可交换次序，且对于数 z 可使用形如 $z=x^{\frac{n}{m}}$ 和 $z^{-1}=x^{-\frac{n}{m}}$ 的记号.

现设 $r=\dfrac{a}{b}$ 和 $r_1=\dfrac{a_1}{b_1}$ 是有理数，其中 a,a_1 是整数而 b,b_1 是自然数. 置 $d=x^{\frac{1}{bb_1}}$，我们有

$$x^rx^{r_1}=d^{ab_1}d^{a_1b}=d^{ab_1+a_1b}=x^{\frac{ab_1+a_1b}{bb_1}}=x^{r+r_1}.$$

类似地得到

$$(x^r)^{r_1}=(d^{ab_1})^{\frac{a_1}{b_1}}=d^{aa_1}=x^{\frac{aa_1}{bb_1}}=x^{rr_1}.$$

因此，对于固定的数 x 的有理数次幂成立着与它的整数次幂同样的函数关系式.

往下，使用前面的记号，设 $r > r_1$ 且 $x > 1$. 那么，$d > 1, ab_1 > a_1b$ 且 $d^{ab_1} > d^{a_1b}, x^r > x^{r_1}$.

因此，对于 $x > 1$，当有理数 r 增加时，x^r 的值随之增加. 往下设 $x = e$. 先前已对任意的自然数 b 得到不等式

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^b < e < \left(1+\frac{1}{b}\right)^{b+1}.$$

由此推出

$$e^{\frac{1}{1+b}} < 1+\frac{1}{b} < e^{\frac{1}{b}}.$$

经明显的变换之后，得到

$$e^{\frac{1}{1+b}} < 1+\frac{1}{b} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{b+1}}, \quad e^{-\frac{1}{b+1}} > 1-\frac{1}{b+1}.$$

下面，设 $|r| < 1$ 且 $r = \dfrac{m}{n}$. 那么 $|m| < n$. 使用伯努利不等式，我们求得不等式

$$(e^{\pm\frac{1}{n}})^{|m|} \geqslant 1 \pm \frac{|m|}{n}, \quad e^{\frac{m}{n}} = e^r \geqslant 1+r.$$

由此，在 $0 < r < 1$ 的情况下我们得到

$$e^{-r} > 1-r, e^r < \frac{1}{1-r} = 1+\frac{r}{1-r}.$$

现设 α 是无理数且有理数 r_1 和 r_2 满足不等式 $r_1 < \alpha < r_2$. 那么，如果 $\{r_1\}$ 是由条件 $r_1 < \alpha$ 确定的一切有理数 r_1 的集合，那么对应于此集合的数集 $M_1 = \{e^{r_1}\}$ 以数 e^{r_2} 为上界. 因此，存在数 $\gamma_1 = \sup\limits_{r_1<\alpha}\{e^{r_1}\}$. 根据对于集合 $M_2 = \{e^{r_2}\}$ 的类似的考虑，知存在数 $\gamma_2 = \inf\limits_{r_2>\alpha}\{e^{r_2}\}$.

我们来证明，其实成立等式 $\gamma_1 = \gamma_2$. 为此，首先注意每个数 e^{r_2} 都是集合 M_1 的上界，同时 γ_1 是此集合的上确界. 因此，对于任何 $\gamma_2 > \alpha$ 都成立不等式 $\gamma_1 \leqslant e^{r_2}$. 这表明，$\gamma_1$ 是集合 M_2 的下界. 但因 γ_2 是此集合的下确界，所以 $\gamma_1 \leqslant \gamma_2$.

现选择满足条件

$$[\alpha] < r_1 < \alpha < r_2 < [\alpha]+1$$

的某些值 r_1 和 r_2. 那么成立不等式

$$e^{r_1} \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant e^{r_2} \leqslant e^{[\alpha]+1},$$
$$0 \leqslant \gamma_2 - \gamma_1 \leqslant e^{r_2} - e^{r_1} = e^{r_1}(e^{r_2-r_1}-1) \leqslant e^{[\alpha]+1}\frac{r_2-r_1}{1-(r_2-r_1)}.$$

但由于数 $\gamma_2-\gamma_1$ 是固定的，而数 $\gamma_2-\gamma_1 > 0$ 可以任意小 (例如，作为 r_1 和 r_2 可以选取数 α 的任意的过剩的和不足的舍入值①)，所以 $\gamma_2-\gamma_1 = 0$，即 $\gamma_1 = \gamma_2$. 把指出

①舍入值已在第一章 §3 定义 17 中定义，若 r 是 α 的 n 位不足舍入值，则 $r+10^{-n}$ 叫作 α 的 n 位过剩舍入值 —— 译者注.

的量 $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$ 取作幂 e^{α} 的值, 也就是说, 作为定义, 令 $\gamma=\gamma_1=\gamma_2=e^{\alpha}$. 这样我们就对一切实数值 x 定义了函数 $y=e^x$.

剩下的事是证明这个函数是严格增的, 且满足形如 $e^{x_1}e^{x_2}=e^{x_1+x_2}$ 的函数方程.

首先应该指出, 由定义推出, 若 $r_1<\alpha<r_2$, 其中 r_1 和 r_2 是有理数, 则 $e^{r_1}<e^{\alpha}<e^{r_2}$. 那样的话, 若 $\alpha<\beta$, 则在开区间 (α,β) 中存在有理数 r_3, 使得不等式 $e^{\alpha}<e^{r_3}<e^{\beta}$ 成立.

这样一来, 函数 $y=e^x$ 的严格单调性就建立起来了. 现设 $\mu=\alpha+\beta$. 我们注意到, 如果 μ 是有理数, 则在这种情况下对于有理数 r_1 和 r_2 有

$$e^{\mu}=\sup_{r_1<\mu}e^{r_1}=\inf_{r_2>\mu}e^{r_2}.$$

这个等式的证明本质上是重复上面已对无理数 μ 进行过的讨论.

现在把有理数 r_1 表示成 $r_1=r_1'+r_1''$, 其中 $r_1'<\alpha, r_1''<\beta$, 而数 r_2 表示成 $r_2=r_2'+r_2''$, 其中 $r_2'>\alpha, r_2''>\beta$. 那么将有

$$e^{r_1}=e^{r_1'+r_2''}<e^{\alpha}e^{\beta}<e^{r_2'+r_2''}=e^{r_2},\quad e^{r_1}<e^{\mu}<e^{r_2}.$$

由此推出

$$h=|e^{\mu}-e^{\alpha}e^{\beta}|<e^{r_2}-e^{r_1}.$$

然而先前已然证明, 该不等式对于一切满足条件 $r_1<\mu<r_2$ 的有理数 r_1 和 r_2 都成立，紧跟着就推出 $h=0$. 换言之, 这就表明

$$e^{\mu}=e^{\alpha+\beta}=e^{\alpha}e^{\beta},$$

由此, 先前在整个实数轴上定义的函数 $y=e^x$ 的全部所需的性质都已完全获得证实.

那么, 对于把实数轴 $\mathbb{R}$ 映成射线 $(0,+\infty)$ 的函数 $f(x)=e^x$, 存在反函数 $g(x)$，它把射线 $(0,+\infty)$ 映成全实数轴. 这个函数叫作自然对数, 并记作: $g(x)=\ln x$. 它是处处连续的, 严格增且满足条件: $x=e^{\ln x}$. 由此, 我们有

$$e^{\ln(xy)}=xy=e^{\ln x}e^{\ln y}=e^{\ln x+\ln y}.$$

因此成立等式

$$\ln(xy)=\ln x+\ln y.$$

这就确立了函数 $y=\ln x$ 的基本性质.

我们来考察幂函数 $y=x^{\alpha}$, 其中 $x>0$. 对于有理数值 α, 其性质已然在定义指数函数时描述过了. 而若 α 是无理数, 则此函数可由等式 $x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ 来定义. 此时, 它的一切初等性质都从指数函数和对数函数的已经考察过的性质推出.

这里, 再次适时地强调指出, 在课程的本部分不讨论三角函数的性质的严格理论依据.

我们来考察几个应用上面所证明的定理的例子.

例 1. 函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 在它们的整个定义域上是连续的. 这个论断是上面所证的定理的直接结果.

2. 存在唯一的函数 $x=x(y)(-\infty<y<\infty)$ 满足开普勒方程

$$x-\varepsilon\sin x=y \quad (0<\varepsilon<1).$$

实际上:

1) 函数 $y(x)$ 单调增, 因为对于 $x_1>x_2$

$$\begin{aligned} y_1-y_2&=x_1-x_2-\varepsilon(\sin x_1-\sin x_2)\\ &=x_1-x_2-2\varepsilon\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}, \end{aligned}$$

$$\left|2\varepsilon\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\leqslant 2\varepsilon\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|=\varepsilon(x_1-x_2),$$

$$y_1-y_2\geqslant(1-\varepsilon)(x_1-x_2)>0;$$

2) $y(x)=x-\varepsilon\sin x$ 是连续函数.

根据定理 3, 由此推出, 在任意的区间 $a<y<b$ 上存在唯一的连续函数 $x(y)$ 满足开普勒方程.

第十四讲

§5. 闭区间上的连续函数的一般性质

定理 4 (关于函数之取零值) *设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义且连续, 而且在此闭区间的端点取异号的值, 即 $f(a)f(b)<0$. 那么存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=0$.*

► 使用波尔查诺的方法. 以中点 $x_1=\frac{a+b}{2}$ 等分区间 $J_0=[a,b]$. 若 $f(x_1)=0$, 则已证完. 若不然, 则 $f(x_1)$ 或与 $f(a)$ 异号或与 $f(b)$ 异号. 用 J_1 代表两区间 $[a,x_1]$ 和 $[x_1,b]$ 之中那个在其端点处 $f(x)$ 取异号的值的区间. 现在用 J_1 的中点 x_2 等分 J_1, 并取其中一个为 J_2 使在其两端 $f(x)$ 取异号的值. 继续下去就得到一个嵌套闭区间列 $J_0\supset J_1\supset J_2\supset\cdots$. 这是一个收缩闭区间列, 因为 J_n 的长度 $\delta_n=\frac{\delta_0}{2^n}$ 当 $n\to\infty$ 时趋于零. 设 x_0 是这些闭区间的公共点. 那么, 若 $J_n=[a_n,b_n]$, 则当 $n\to\infty$ 时 $a_n\to x_0$ 且 $b_n\to x_0$, 于是, 当 $n\to\infty$ 时

$$f(a_n)\to f(x_0) \text{ 且 } f(b_n)\to f(x_0).$$

由于 $f(a_n)f(b_n)<0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)f(b_n)=f^2(x_0)\leqslant 0$. 因此, $f(x_0)=0$. ◄

定理 5 (关于连续函数的中间值) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)=\alpha, f(b)=\beta$, 并设 c 是任意一个满足下面条件的数:

$$\alpha \leqslant c \leqslant \beta, \ \text{若}\ \alpha \leqslant \beta,$$
$$\beta \leqslant c \leqslant \alpha, \ \text{若}\ \beta \leqslant \alpha.$$

那么存在点 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0)=c$.

► 考察函数 $g(x)=f(x)-c$. 若 $g(a)$ 或 $g(b)$ 等于 0 则 $x_0=a$ 或 $x_0=b$. 而若 $g(a)g(b)\neq 0$, 则 $g(a)$ 与 $g(b)$ 取异号的值. 根据定理 4, 存在点 $x_0\in[a,b]$ 使 $g(x_0)=0$, 由此 $f(x_0)=c$. ◄

定理 6 (关于连续函数的有界性) 在 $[a,b]$ 上连续的函数在此闭区间上有界.

► 用波尔查诺的方法进行证明, 假设相反, 即设函数 $f(x)$ 无界. 那么以中点划分闭区间 $J_0=[a,b]$. 取 $f(x)$ 在其上无界的那半个闭区间为 J_1. 再以中点划分 J_1 且取 $f(x)$ 在其上无界的那半个闭区间为 J_2. 我们有

$$J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_n \supset \cdots$$

得到一个收缩闭区间列. 设 x_0 是这些闭区间的公共点. 在 x_0 处函数 $f(x)$ 连续. 取点 x_0 的邻域 $\delta(1)$, 使在 $\delta(1)$ 上 $|f(x)-f(x_0)|<1$. 那么

$$|f(x)|=|(f(x)-f(x_0))+f(x_0)|\leqslant|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|<1+|f(x_0)|,$$

于是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 $\delta(1)$ 邻域上有界. 由于 $\delta(1)>0$, 所以只要 J_n 的长度 $\delta_n=\dfrac{b-a}{2^n}<\delta(1)$, J_n 就整个含在此邻域中, 而那时 $f(x)$ 就得在闭区间 J_n 上有界, 这与 $\{J_n\}$ 的构作相矛盾. ◄

定理 7 (关于连续函数之达到上确界和下确界) 闭区间上的连续函数达到上确界和下确界, 即

$$\exists x_1 \in [a,b] \ \text{使得} \ \sup_{x\in[a,b]} f(x)=f(x_1),$$
$$\exists x_2 \in [a,b] \ \text{使得} \ \inf_{x\in[a,b]} f(x)=f(x_2).$$

我们仅对 $\sup f(x)$ 证明定理, 因为对于 $\inf f(x)$ 的情形可以考虑函数 $f_1(x)=-f(x)$.

► 用反证法. 设 $A=\sup f(x)$, 而对于一切 $x\in[a,b]$ $A\neq f(x)$. 那么, 对于任意的 x, $A>f(x)$. 那样的话, $A-f(x)$ 是连续函数且对于一切 $x\in[a,b]$, $A-f(x)>0$.

因此, 函数 $g(x)=\dfrac{1}{A-f(x)}$ 同样连续. 那么根据定理 6, 函数 $g(x)$ 有界. 而这表明, 存在 $B>0$ 使得

$$\frac{1}{A-f(x)}<B.$$

由此,

$$A - f(x) > \frac{1}{B}, \quad f(x) < A - \frac{1}{B},$$

即数 $A - \frac{1}{B}$ 是上界, 而它比 A 小. 但这与 A 是最小上界矛盾. ◀

因为闭区间上的连续函数 $f(x)$ 达到上确界和下确界, 所以 $A = \sup f(x)$ 叫作 $f(x)$ 的最大值, 而 $B = \inf f(x)$ 叫作 $f(x)$ 的最小值, 并记

$$A = \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad B = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

例 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 并设 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 那么存在 $\xi \in [a,b]$ 使得成立等式

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)).$$

实际上, 设 $m = \min(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)), M = \max(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))$. 那么

$$m \leqslant \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)) = A \leqslant M.$$

因此, 根据关于连续函数的中间值的定理 5, 闭区间 $[m, M]$ 属于函数 $f(x)$ 的值域. 于是存在点 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = A$. 这就是所求的点.

第十五讲

§6. 一致连续的概念

我们写出给定在集合 X 上且在点 $x_0 \in X$ 处连续的函数的定义: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在这样的 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于一切 $x \in X$ 只要 $|x - x_0| < \delta$ 就有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

一般说来, 对于固定的 $\varepsilon > 0$, 在每点 x_0 处有自己的 $\delta(\varepsilon)$ 的值, 也就是说, $\delta(\varepsilon)$ 与 x_0 有关. 此事可用记号写成: $\delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, x_0)$.

如果是这样, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和任何点 $x_0 \in X$, 量 $\delta(\varepsilon)$ 与 x_0 无关, 那么函数 $f(x)$ 叫作是在集合 X 上一致连续的.

我们以等价的形式更明白地写出这个定义.

定义 8 *函数 $f(x)$ 叫作是在 X 上一致连续的, 如果 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得*

$$\forall x_1, x_2 \in X : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

定理 8 (海涅–康托尔定理) 在闭区间上连续的函数在此区间上一致连续.

► 用反证法来证. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续但不一致连续. 那么

$$\exists\varepsilon>0,\forall\delta>0:\exists\alpha,\beta\in X:|\alpha-\beta|<\delta \text{ 且 } |f(\alpha)-f(\beta)|\geqslant\varepsilon.$$

考察数列 $\delta=\delta_n=\frac{1}{n}$. 那么对应于每个 n 有一对点 α_n,β_n, 使得

$$|\alpha_n-\beta_n|<\frac{1}{n},\quad |f(\alpha_n)-f(\beta_n)|\geqslant\varepsilon.$$

数列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 都是有界的. 根据波尔查诺–魏尔斯特拉斯定理, 从 α_n 中可取出收敛的子列 $\{\alpha_{n_k}\}$. 那么当 $k\to\infty$ 时 $\alpha_{n_k}\to x_0\in X=[a,b]$. 还有

$$|\alpha_{n_k}-\beta_{n_k}|<\frac{1}{n_k},$$

因此 $\gamma_{n_k}=\alpha_{n_k}-\beta_{n_k}$ 是无穷小数列, 于是当 $k\to\infty$ 时 $\beta_{n_k}\to x_0$. 那么当 $k\to\infty$ 时,$y_k=f(\alpha_{n_k})\to f(x_0), z_k=f(\beta_{n_k})\to f(x_0)$, 从而当 $k\to\infty$ 时, $t_k=|y_k-z_k|\to 0$, 但这与 $t_k=|y_k-z_k|\geqslant\varepsilon$ 相矛盾, 因为在这个不等式中令 $k\to\infty$ 取极限就得到 $0\geqslant\varepsilon$, 这是不可能的. ◄

康托尔定理对于不必是闭区间的集合 X 可类似地证明, 只要集合 X 是有界的且含有其一切极限点.

§7. 闭集和开集的性质. 紧致性. 紧致集上的连续函数

定义 9 点集 (在实直线上) 叫作是闭的, 如果它含有自己的一切极限点.

我们记得, x_0 是集合 A 的极限点, 如果在点 x_0 的任何邻域中都存在集合 A 的无限多个点 (点 x_0 自己可以属于也可以不属于 A).

定义 10 集合叫作是开的, 如果它的每点都含在该点的一个全由此集合的点组成的 δ 邻域内.

例 开区间是开集而闭区间是闭集.

定义 11 有界闭集 (在实直线上) 叫作是紧致的.

命题 6 a) 若 A 是闭集则 $A_1=\mathbb{R}\backslash A$ 是开集.
b) 若 B 开, 则 $B_1=\mathbb{R}\backslash B$ 闭.

► a) 用反证法. 若存在 $\alpha\in A_1,\alpha$ 的任何邻域都不全由 A_1 的点组成, 那么在点 α 的任何邻域中都至少含有 A 的一个异于 α 的点, 从而含有 A 的无限多个点. 于是点 α 是集合 A 的极限点, 从而根据 A 的闭性, $\alpha\in A$. 但是 $\alpha\in A_1$. 发生矛盾.

b) 设 β 是 B_1 的极限点而 $\beta \in B$. 则在其任何邻域中皆含 B_1 的点. 此事与对于集合 B 的任何一点皆有仅由集合 B 的一些点组成的邻域这一事实相矛盾. 这表明 $\beta \notin B$, 即 $\beta \in B_1$. 因此 B_1 闭. ◄

命题 7 a) 开集的任意并仍是开集, 开集的有限交还是开集.

b) 闭集的任意交是闭集, 闭集的有限并是闭集.

► 设 $a \in \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha, A_\alpha$ 开. 则存在号码 α_0 使 $a \in A_{\alpha_0}$, 于是存在点 a 的 δ 邻域整个属于 A_{α_0}. 记之为 $O_\delta(a)$. 那么 $O_\delta(a) \subset \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$. 因此 $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ 开.

现设 $a \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. 则 $\exists O_{\delta_m}(a) \subset A_m \forall m$. 于是对于 $\delta = \min(\delta_1, \cdots, \delta_n)$ 有

$$O_\delta(a) = \bigcap_{k=1}^{n} O_{\delta_k}(a) \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

这样一来, 断言 a) 获得证实. 而断言 b) 由断言 a) 推出. ◄

定义 12 设给定集合 A 和集合族 $\{B\}$. 说 $\{B\}$ 是 A 的覆盖, 如果对于任何 $\alpha \in A$, 都存在 $B \in \{B\}$ 使得 $\alpha \in B$.

下述命题常被作为紧致性的定义.

命题 8 (博雷尔引理) 从紧致集的任何由开集作成的覆盖中都可以选出有限的子覆盖.

► 用反证法. 设 A 是紧致集, 则存在闭区间 J_0 使得 $A \subset J_0$(由于 A 有界) 借助于使用中点分划闭区间的方法构作一组收缩闭区间 $J_0 \supset J_1 \supset \cdots \supset J_k \supset \cdots$, 具有这样的性质: 对于任何 k, 集合 $A \bigcap J_k$ 都不被有限覆盖. 设 x_0 是这些闭区间的公共点.

由于 $J_k \bigcap A$ 不被有限覆盖, 所以在每个闭区间 J_k 中都含 A 的点. 这表明 $x_0 \in A$, 因为 A 是闭的. 集 A 的任何一点都被集族 $\{B\}$ 覆盖, 那么存在集合 B, 使 $x_0 \in B$. 进而, 存在号码 k, 使得 $J_k \subset B$, 这是因为 J_k 的长度 $\to 0$, 而集 B 开. 这样一来, B 就覆盖了 J_k, 从而 $A \bigcap J_k$ 被有限覆盖. 发生矛盾. ◄

定理 9 (海涅–康托尔定理的推广) 紧集上的连续函数在此集上一致连续.

► 任取 $\varepsilon > 0$ 并固定之. 把每个点 $x_0 \in K$ 包上一个半径为 $\delta' = \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, x_0\right)$ 的 δ' 邻域, 其中 $\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, x_0\right) = \delta$ 由如下条件来决定: 对于任意的满足条件 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in K$, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 每个这样的 δ' 邻域都是开集. 根据博雷尔引理, 我们选出 K 的一个有限子覆盖. 设它由开区间 $J_1, \cdots, J_k$ 组成, 这些开区间分别有长度 $\delta_1, \cdots, \delta_k$ 以及中心 $a_1, \cdots, a_k$. 置 $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1, \cdots, \delta_k)$. 现在, 如果点 x_1 和 x_2 满足 $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$, 那么对于某 $a = a_s$, 点 x_1 属于 a 的 $\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, a\right)$ 邻域, 即

$|x_1 - a| < \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, a\right)$. 然而 $\delta(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, a\right)$, 因此

$$|x_2 - a| = |(x_2 - x_1) + (x_1 - a)| \leqslant |x_2 - x_1| + |x_1 - a| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, a\right).$$

由此,$|f(x_2) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 但由于 $|f(x_1) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 所以

$$\begin{aligned}|f(x_1) - f(x_2)| &= |(f(x_1) - f(a)) + (f(a) - f(x_2))| \\ &\leqslant |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(a)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

这就表明, $f(x)$ 在 K 上一致连续. ◄

例 1. 函数 $y = \sqrt{x}$ 当 $x > 1$ 时一致连续. 实际上, 对于任意的 $x_1, x_2 > 1$, 有不等式

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leqslant \frac{|x_1 - x_2|}{2} \left(< \frac{\delta}{2} = \varepsilon\right).$$

由此得知, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 对于 $\delta = 2\varepsilon$

$$\forall x_1, x_2 \in (1, \infty) : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon.$$

2. 函数 $y = x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是一致连续的, 因为对于 $\varepsilon = 1$ 成立对于差 $y\left(n + \frac{1}{n}\right) - y(n)$ 的不等式

$$y\left(n + \frac{1}{n}\right) - y(n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} > 1 = \varepsilon,$$

它对于一切自然数 n 成立. 这表明不存在数 $\delta(1) > 0$, 使得对于任何两个位于小于 $\delta(1)$ 的距离之内的两点其函数值之差的模都小于 1.

为了完整起见, 我们引入关于函数在集合 A 上不是一致连续的这一性质的正面叙述.

定义 13 函数 $f(x)$ 在集合 A 上不是一致连续的, 如果可以指出这样的 $\varepsilon > 0$, 使得对于任何 $\delta > 0$ 都存在点 $a_1 = a_1(\delta) \in A$ 和 $a_2 = a_2(\delta) \in A$, 满足条件 $|a_1 - a_2| < \delta$, 但却使 $|f(a_1) - f(a_2)| \geqslant \varepsilon$.

注 1. 在该定义中, 代替一切 $\delta > 0$, 只限于形如 $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$ 的数就够了.

2. 函数在某点 x_0 处的连续性, 假定了函数 $f(x)$ 在该点的某 δ 邻域中已定义. 上面证明了的定理 9 在某种更一般的情形下成立. 我们来引入相应的定义.

定义 14 定义在集合 A 上的函数 $f(x)$ 叫作是在点 x_0 处相对于集合 A 连续的, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得对于一切满足条件 $|x - x_0| < \delta$ 的 $x \in A$, 成立不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

考虑到前面所作的注记, 该连续性定义可以通过函数沿某个基的极限来写出.

在证明定理 9 时所做的讨论, 当把函数在一点处连续的条件按上述关于集合 A 连续的定义加以更改时, 完全保持成立, 只要集合 $A = K$ 是紧致的.

第五章　单变量函数的微分

第十六讲

§1. 函数的增量. 函数的微分和导数

函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续这一性质等价于差 $\alpha(x)=f(x)-f(a)$ 当 $x\to a$ 时是无穷小量. 换言之, 这就是说

$$f(x)=f(a)+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 当 $x\to a$ 时是无穷小量.

于是, 对于任何在点 $x=a$ 处连续的函数考察表达式 (即公式)

$$\alpha(x)=f(x)-f(a)$$

都是有意义的.

这个表达式叫作 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的**函数增量**, 记作 $\alpha(x)=\Delta f(x)$. 此记号也对于 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处不连续的情形来使用.

于是, 如果当 $x\to a$ 时 $\Delta f(x)\to 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续, 反之亦然, 对于最简单的函数 $f(x)=x$, 其增量 $\alpha(x)=x-a$ 叫作**自变量增量**, 因为对于 $f(x)=x$ 函数 $f(x)$ 的值等于自变量的值. 此表达式有个专门的记号: $\alpha(x)=\Delta x$. 我们有, 当 $x\to a$ 时 $\Delta x\to 0$.

自变量 x 可以通过它的增量 Δx 来表示. 实际上, $x = a + (x - a) = a + \Delta x$. 因此, 对于固定的 a, 增量 $\Delta f(x)$ 可以看作是 Δx 的一个函数, 即

$$\alpha(x) = \Delta f(x) = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \beta(\Delta x).$$

若要强调指出, 当 $x = a$ 和 $\Delta x = b$ 时 $\Delta f(x) = A$, 则记

$$\Delta_b f(a) = A \quad \text{或者} \quad \Delta f(x)\Big|_{\substack{x=a \\ \Delta x = b}} = A.$$

例 若 $f(x) = x^2, x = 1, \Delta x = 2$, 则

$$\Delta x^2\Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=2}} = ((x + \Delta x)^2 - x^2)\Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=2}} = 9 - 1 = 8.$$

现在我们来更仔细地考察作为自变量的增量 Δx 的函数的增量 $\Delta f(x)$. 对于数学分析课程结构非常重要的情形是, $\Delta f(x)$ 是无穷小且与线性函数 $c\Delta x$ 等价 —— 其中 c 是某个实的常数. 在这种情况下, 我们说增量 $\Delta f(x)$ 有线性部分, 它叫作**函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处的微分**, 而函数 $f(x)$ 叫作是**在点 $x = a$ 处可微的**.

换句话说, 我们过渡到下述定义, 设 $f(x)$ 在点 $x = a$ 的某个 δ 邻域上定义.

定义 1 线性函数 $g(\Delta x) = c\Delta x$ 叫作是增量 $\Delta f(x)$ (或函数 $f(x)$ 本身在点 $x = a$ 处) 的微分, 如果

$$\Delta f(x) \sim c\Delta x \quad \text{当} \Delta x \to 0,$$

即

$$\Delta f(x) = c\Delta x + \gamma(\Delta x)\Delta x,$$

其中 $c \in \mathbb{R}$ 且当 $\Delta x \to 0$ 时 $\gamma(\Delta x) \to 0$.

函数 $f(x)$ 的微分记作 $df(x)$ 或简记作 df. 从定义推出

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = c.$$

若此时 $c \neq 0$, 则

$$\frac{\Delta f}{df} \to 1 \ \text{当} \ \Delta x \to 0.$$

我们发现, 函数 $\gamma(\Delta x)$ 定义在点 $x = a$ 的某个去心邻域中, 函数 $\Delta f(x)$ 定义在该点的某个 δ 邻域中, 而函数 $df(x) = c\Delta x$ 对于一切 $x \in \mathbb{R}$ 有定义. 定义函数 $\gamma(\Delta x)$ 使 $\gamma(0) = 0$, 对于我们是方便的. 结果在我们定义微分 $df(x)$ 的等式

$$\Delta f(x) = df(x) + \gamma(\Delta x)\Delta x$$

中, 所有的函数都定义好了, 且都在点 $\Delta x = 0$ 的某个邻域中连续. 进而易见, $\Delta x = dx$.

定义 2 数 $c=\dfrac{df(x)}{dx}$ 叫作函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的导数, 对于导数, 使用下述通用的记号:

$$c=f'(a)=\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}=Df(x)|_{x=a}.$$

如果 $df(x)$ 存在, 则从定义 1 和定义 2 出发, 我们也可以写出

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=c,$$

亦即

$$f(x)-f(a)\sim f'(a)(x-a) \text{ 当 } x\to a \text{ 时.}$$

上面引入的函数的微分和导数的概念不仅有深刻的分析学的意义, 而且也具有完全确定的物理的, 更确切地说, 具有完全确定的力学的意义, 同样也具有完全确定的几何意义.

定义 3 曲线 $y=f(x)$ 在坐标平面上的坐标为 $x=a, y=f(a)$ 的点处的切线, 确言之为斜切线, 是这样的一条直线, 它通过点 $(a,f(a))$, 且其斜率 k, 即它的倾角的正切, 等于通过点 $(a,f(a))$ 和 $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$ 的 "割线" 的斜率 $k(\Delta x)$ 当 $\Delta x\to 0$ 时的极限.

因此说, 切线是割线的极限位置.

几何意义 导数的几何意义由其下述性质所揭示: 数 $f'(a)$ 是平面坐标系 xOy 中由方程 $y=f(x)$ 给出的曲线在点 $(a,f(a))$ 处的切线的倾角的正切 (斜率).

力学解释 若 t 为时刻, $S(t)$ 为物体在时间间隔 $t-t_0$ 中走过的路程, 其中 t_0 为初始时刻, 那么 $\Delta S(t)|_{t=a}$ 是物体从时刻 $t=a$ 到时刻 $t=a+\Delta t$ 这段时间中走过的路程, 即 $\Delta S(t)=S(a+\Delta t)-S(a)$.

比值 $\left.\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}\right|_{t=a}$ 是在时间间隔 $[a,a+\Delta t]$ 中的平均速度, 而当 $\Delta t\to 0$ 时, 此速度之极限是物体在瞬间 $t=a$ 的瞬时速度, 小汽车在运动中它的速度表上标示的就是这个量.

命题 1 若函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可微, 则它在此点连续.

实际上, 由于 $\Delta f\sim df=c\Delta x$, 所以当 $\Delta x\to 0$ 时, Δf 是无穷小, 这表明 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续.

例 1. 设 $f(x)=x^2, a=2.5$. 那么

$$\begin{aligned}&\Delta f(x)=(a+\Delta x)^2-a^2=2a\Delta x+(\Delta x)^2,\\&\Delta f(2.5)=5\Delta x+(\Delta x)^2,\\&\Delta x=dx,\ df(x)=2adx,\ df(2.5)=5dx.\end{aligned}$$

2. 设 $f(x) = 3x - 1, a = 2$. 那么

$$\Delta f(x)|_{x=2} = f(2 + \Delta x) - f(2) = 3\Delta x = df(2) = 3dx.$$

函数的微分如果存在的话, 就是自变量的增量的线性函数, 因此称之为*自变量增量的线性部分*[①]. 若 $f'(a) \neq 0$, 则点 $x = a$ 处的微分也叫作*增量之主部*. 这个说法反映了形如 $\beta(\Delta x) = \Delta f - df$ 的差的性质, 这个差是 $o(\Delta x)$, 因此也是 $o(df)$, 即 $\Delta f - df = o(df)$. 因此, 这个差是比 Δf 高阶的无穷小量, 从而对于小的 Δx, 微分 df 成为增量 Δf 的值的主要成分.

容易举出在点 $x = 0$ 处连续而在此点不可微的函数 $f(x)$ 的例子 (即 $f(x)$ 在此点无微分和导数). 实际上, 对于函数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & 若\ x \geqslant 0, \\ -x, & 若\ x < 0, \end{cases}$$

有 $\Delta(|x|) = |x + \Delta x| - |x|$. 由此, 当 $x = 0$ 时得

$$\Delta(|x|)_{x=0} = |\Delta x|.$$

那么

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \to 1 \ \text{当}\ \Delta x \to 0^+, \quad \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \to -1 \ \text{当}\ x \to 0^-,$$

故 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在.

然而, 此时右极限和左极限都存在, 它们叫作函数的**右导数**和**左导数**.

定义 4 *有限的极限 (如果它们存在的话)*

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad 和 \quad \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

分别叫作函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处的右导数和左导数.

在前面考察的情况 $y = |x|$ 中, 在点 $x = 0$ 处的单侧导数都存在, 且在此点右导数等于 1 而左导数等于 -1. 下述显然的命题表述了单侧导数与通常导数概念之间的联系.

命题 2 *函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处有导数, 当且仅当左导数和右导数皆存在且彼此相等.*

[①] 似应为函数增量的线性部分 —— 译者注.

第十七讲

§2. 复合函数的微分

定理 1 设函数 $\varphi(t)$ 在点 $t=a$ 处可微, 并且 $\varphi(a)=b, \varphi'(a)=\alpha$. 还设函数 $f(x)$ 在点 $x=b$ 处可微, 且 $f'(b)=\beta$. 那么复合函数 $g(t)=f(\varphi(t))$ 在点 $t=a$ 处可微, 且 $g'(a)=\beta\cdot\alpha$.

► 根据函数 $\varphi(t)$ 和 $f(x)$ 的可微性, 我们有

$$\Delta\varphi(t)=\alpha\Delta t+\alpha_1(\Delta t)\Delta t, \quad \alpha_1(0)=0;$$
$$\Delta f(x)=\beta\Delta x+\beta_1(\Delta x)\Delta x, \quad \beta_1(0)=0.$$

这里, 函数 $\alpha_1(\Delta t)$ 和 $\beta_1(\Delta x)$ 分别在 $\Delta t=0$ 和 $\Delta x=0$ 的某个邻域内定义, 且当 $\Delta t\to 0$ 和 $\Delta x\to 0$ 时都趋于零, 在第二个等式中取量 Δx 等于 $\Delta\varphi(t)$, 那么得到

$$\begin{aligned}\Delta f(x)&=\beta\Delta\varphi(t)+\Delta\varphi(t)\beta_1(\Delta\varphi(t))\\&=\beta\alpha\Delta t+\Delta t[\alpha\beta_1(\Delta\varphi(t))+\alpha_1(\Delta t)\beta_1(\Delta\varphi(t))+\beta\alpha_1(\Delta t)].\end{aligned}$$

此外还有 $\Delta f(x)=\Delta g(t)$, 即

$$\Delta g(t)=\beta\alpha\Delta t+\Delta t\gamma(\Delta t),$$

其中

$$\gamma(\Delta t)=\alpha\beta_1(\Delta\varphi(t))+\alpha_1(\Delta t)\beta_1(\Delta\varphi(t))+\beta\alpha_1(\Delta t).$$

然而, 作为 Δt 的函数, 当 $\Delta t\to 0$ 时 $\Delta\varphi(t)\to 0$, 因为函数 $\varphi(t)$ 在点 $t=a$ 处可微. 由此, 根据关于复合函数的极限的定理, 当 $\Delta t\to 0$ 时 $\beta_1(\Delta\varphi(t))$ 和 $\alpha_1(\Delta t)$ 都是无穷小量. 因此, 函数 $\gamma(\Delta t)$ 当 $\Delta t\to 0$ 时也是无穷小量, 而这表明,$\beta\alpha\Delta t$ 正是函数 $g(t)$ 在点 $t=a$ 处的微分, 即

$$dg(t)=\beta\alpha\Delta t=\beta\alpha dt, \quad \frac{dg(t)}{dt}=\beta\alpha. \quad ◄$$

注 由等式

$$\Delta\varphi(t)=\alpha\Delta t+\alpha_1(\Delta t)\Delta t, \quad \Delta f(x)=\beta\Delta x+\beta_1(\Delta x)\Delta x$$

给出的函数 $\alpha_1(\Delta t)$ 和 $\beta_1(\Delta x)$ 的定义域分别整个包含点 $\Delta t=0$ 和 $\Delta x=0$ 的某个邻域, 因为在定义微分时, 我们按连续性而补充定义了它们在零处的值: $\alpha_1(0)=\beta_1(0)=0$. 如果不这样做,

则在证明关于复合函数的微分的定理时所做的论述会出现错误, 因为 $\alpha_1(\Delta t)$ 对于点 0 的邻域中的某些值 $\Delta t \neq 0$ 也可以等于零.

还要指出, 我们谈到函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的导数时, 只是就此点为 $f(x)$ 的定义域的内点的情形而论. 而若只谈右导数 $f'(a+)$, 则函数 $f(x)$ 的定义域应该包含一个区间 $(a, a+\delta)$, 若只谈及左导数, 则定义域应含有 $(-\delta+a, a)$.

函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 的任何一点 $x=x_0$ 处的微分 $df(x)$ 都是自变量 Δx 的线性函数 $c\Delta x$. 此处, 每个导数值 $f'(x_0)=c$ 都有自己的特定的意义. 这样一来, 取微分的过程就产生了闭区间 $[a, b]$ 到线性函数的集合的一个映射. 这个映射不是数值函数, 因为它的像不由数构成, 而是由函数构成. 把这样的映射叫作"算子", 在这里所说的情况下就是微分算子. 求函数在一点处的微分或导数的过程本身叫作微分运算, 或简称为微分 (法). 我们还要记住, 在点 x_0 处有导数的函数叫作是在此点处可微的.

例 设 $f(x)=x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1$. 那么当 $0<x<1$ 时. $f'(x)=2x, f'(0+)=0, f'(1-)=2$.

现在我们来证明关于反函数的导数的定理. 一般说来, 反函数的微分法则可从关于复合函数的导数的定理推出. 但我们将在不预先要求反函数存在导数的更弱的假定之下来证明这个法则.

定理 2 (关于反函数的导数) *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上定义且连续, 有反函数 $g(y)$ 定义在闭区间 I 上, I 的端点是 $f(a)$ 和 $f(b)$. 设 x_0 是闭区间 $[a, b]$ 的内点, 而 y_0 是闭区间 I 的内点, 并且 $f(x_0)=y_0, g(y_0)=x_0$. 设在点 $x=x_0$ 处函数 $f(x)$ 有异于零的导数, 即 $f'(x_0) \neq 0$. 那么在点 y_0 处函数 $g(y)$ 有导数 $g'(y_0)$, 且*

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=g(y_0)}.$$

► 如果知道 $g'(y_0)$ 存在, 那么使用前一个定理, 得到 $g(f(x))=x, (g(f(x)))_x'=1$. 但 $(g(f(x)))_x'|_{x=x_0}=g'(y_0)f'(x_0)$, 因此 $g'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

如果并不预先假定导数的存在, 那么我们这样来证. 我们注意到, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调, 因此, $g(y)$ 在 I 上连续且严格单调. 根据导数的定义,

$$g'(y_0)=\lim_{y \to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0},$$

如果这个极限存在的话.

根据 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的连续性和关于反函数的极限的定理, 当 $y \to y_0$ 时 $g(y) \to g(y_0)=x_0$.

在 $[a,b]$ 上定义一个函数 $F(x)$, 置 $F(x_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ 以及

$$F(x)=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\quad \text{当}\quad x\neq x_0.$$

那么 $F(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 因为

$$F(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

作变量变换 $x=g(y)$:

$$F(g(y))=\frac{g(y)-g(y_0)}{f(g(y))-f(g(y_0))}=\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}.$$

使用关于复合函数的极限的定理, 我们就得到, 存在极限

$$\lim_{y\to y_0}F(g(y))=F(x_0)=\left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=g(y_0)}.$$

而另一方面,

$$\lim_{y\to y_0}F(g(y))=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=g'(y_0).\quad ◄$$

定理 3 (关于一阶微分形式不变性) 如果在函数 $f(x)$ 的微分 $df(x)$ 的公式中以某个函数 $x=\varphi(t)$ 的微分代替独立变量 x 的微分, 则所得的表达式恰为复合函数 $g(t)=f(\varphi(t))$ 的微分.

换言之, 设 $df=c_1dx$ 是函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的微分, 而 $d\varphi=c_2dt$ 是 $\varphi(t)$ 在点 $t=\alpha$ 处的微分且 $\varphi(\alpha)=a$. 那么函数 $c_1d\varphi=c_1c_2dt$ 是函数 $g(t)=f(\varphi(t))$ 在点 $t=\alpha$ 处的微分.

► 这个定理是关于复合函数的微分的定理的直接推论, 因为根据后者, $dg(t)=g'(t)dt=c_1c_2dt=c_1d\varphi(t)$. ◄

这个很简单的且看似 “空洞” 的定理的意义, 稍后当我们看到高阶微分不再具有不变性时, 就会明白.

例 开普勒方程 $x-\varepsilon\sin x=y(0<\varepsilon<1)$ 的解 $x=x(y)$ 根据关于反函数的导数的定理, 是可微函数, 且

$$x'(y)=\frac{1}{1-\varepsilon\cos x(y)}.$$

§3. 微分法则

我们来考察微分的法则.

设函数 $f(x), g(x)$ 都是可微的, $c \in \mathbb{R}$. 那么:

1. $(cf(x))' = cf'(x)$.

2. 若 $f(x) = \text{const}$, 则 $f'(x) = 0$.

3. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

这些命题都可从导数的定义推出. 作为例子我们来证明命题 3. 我们有 $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$. 因此

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \to f' + g' \text{ 当 } \Delta x \to 0 \text{ 时}.$$

4. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

► 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &\to g(x)f'(x) + f(x)g'(x) \quad \text{当 } \Delta x \to 0,\end{aligned}$$

这是因为当 $\Delta x \to 0$ 时 $g(x+\Delta x) \to g(x), \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x), \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x)$. ◄

5. $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$.

► 我们有

$$\frac{\Delta\left(\dfrac{1}{g}\right)}{\Delta x} = \frac{\dfrac{1}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{1}{g(x)}}{\Delta x} = \frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{\Delta x\, g(x)\, g(x+\Delta x)} \to -\frac{g'}{g^2} \qquad \text{当} \quad \Delta x \to 0,$$

这是因为当 $\Delta x \to 0$ 时,

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} \to g', \quad \frac{1}{g(x+\Delta x)} \to \frac{1}{g(x)}. \quad ◄$$

推论

1. $(g_1 \cdot \cdots \cdot g_n)' = \sum\limits_{k=1}^{n} g_1 \cdots g_k' \cdots g_n$.

2. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

初等函数的导数

$$x' = 1;$$

$$(x^n)' = nx^{n-1};$$

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x;$$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x,\quad \text{因为}\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right);$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x},\quad f(x) = \ln x,$$

$g(x) = e^x$ 是反函数.

$y = x^\alpha$　$\alpha\neq 0$, 是幂函数,

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha\ln x})' = (\alpha\ln x)'e^{\alpha\ln x} = \alpha x^{\alpha-1};$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cos x+\sin x\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x;$$

$$(\cot x)' = \left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\tan^2(\arctan x)+1} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\mathrm{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

从关于复合函数的微分的定理 2 和微分法则推出:

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x\ln a;$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x};$$

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)};$$

$$(u^v)' = (e^{v\ln u})' = e^{v\ln u}(v\ln u)' = u^v\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right).$$

注 如果 $h(x)=f(g(x))$, 那么记号 $f'_x(g(x))$ 和 $f'_g(g(x))$ 由等式 $f'_x(g(x))=h'(x)$, $f'_g(g(x))=f_1(g(x))$, 其中 $f_1(x)=f'(x)$, 来确定.

第十八讲

§4. 高阶导数和高阶微分

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 的每点处都可微, 那么对应于每点 $x\in(a,b)$ 有在该点处的导数值 $f'(x)$. 所得到的函数叫作所给函数的导函数, 记作 $f'(x)$. 此函数本身可以有导数. 那么这个导数叫作函数 $f(x)$ 的**二阶导数**. 记作 $f''(x)=(f'(x))'$.

类似地可以定义三阶、四阶及一切其他的导数: $f'''(x)=(f''(x))', f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$.

例 $(x^3)''=((x^3)')'=(3x^2)'=6x$.

定理 4 (莱布尼茨公式) 设 u,v 有第 n 阶导数. 那么成立公式

$$\begin{aligned}(uv)^{(n)}&=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v''+\cdots+uv^{(n)}\\&=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}u^{(m)}v^{(n-m)},\end{aligned}$$

其中 $u^{(0)}=u, v^{(0)}=v$.

► 使用归纳法. 对于 $n=1$, 定理的结论成立, 设结论对于 $n=s\geqslant 1$ 成立. 我们来证明它对于 $n=s+1$ 成立. 我们有

$$\begin{aligned}(uv)^{(s+1)}&=((uv)^{(s)})'=\sum_{m=0}^{s}\binom{s}{m}(u^{(m)}v^{(s-m)})'\\&=\sum_{m=0}^{s}\binom{s}{m}u^{(m+1)}v^{(s-m)}+\sum_{m=0}^{s}\binom{s}{m}u^{(m)}v^{(s-m+1)}\\&=\sum_{t=1}^{s+1}\binom{s}{t-1}u^{(t)}v^{(s-t+1)}+\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}u^{(t)}v^{(s-t+1)}\\&=\binom{s}{0}u^{(0)}v^{(s+1)}+\binom{s}{s}u^{(s+1)}v^{(0)}+\sum_{t=1}^{s}\left(\binom{s}{t}+\binom{s}{t-1}\right)u^{(t)}v^{(s-t+1)}\\&=\sum_{t=0}^{s+1}\binom{s+1}{t}u^{(t)}v^{(s+1-t)},\end{aligned}$$

这是因为

$$\binom{s}{t}+\binom{s}{t-1}=\binom{s+1}{t}. \quad ◀$$

对于第 n 阶导数还有另一个记号:

$$f^{(n)}(x)=D^n f(x)=\frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

最后那个记号与**高阶微分**的概念相关. 我们现在就来引入高阶微分的定义.

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上可微. 那么它的微分

$$df(x)=f'(x)dx.$$

固定自变量增量 $dx=\Delta x=h$ 的值. 那么 $df(x)$ 可以看作是 x 的函数, 定义在同一区间 (a,b) 上. 如果它可微, 那么微分等于

$$d(f'(x)h)=f''(x)h\Delta x.$$

如果此时 Δx 的值又取为 h, 则得到

$$d(f'(x)h)=f''(x)h^2=f''(x)dx^2$$

这个表达式叫作**二阶微分**并记作 $d^2f(x)$, 即

$$d^2f(x)=f''(x)dx^2.$$

类似地定义

$$d^3f(x)=d(d^2f(x))=f'''(x)dx^3,$$
$$d^nf(x)=d(d^{n-1}f(x))=f^{(n)}(x)dx^n.$$

显然, 根据这个定义可以写:

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

稍后将明白引入 n 阶微分的概念的理由. 例如, 将要证明在许多情形下, 增量 $\Delta f(x)$ 可以表示成

$$\Delta f=\frac{df}{1!}+\frac{d^2f}{2!}+\frac{d^3f}{3!}+\cdots+\frac{d^nf}{n!}+\cdots$$

的形状 (伯努利公式). 这个等式的意思将在它的证明中予以说明.

我们发现, 二阶微分已不具有不变性. 实际上, 如果 $f'(x)=f_1(x)$ 且 $f''(x)=f_2(x)$, 那么对于 $x=g(t)$ 有

$$(f(g(t)))''_{tt}=(f_1(g(t))g'(t))'_t=f_2(g(t))(g'(t))^2+f_1(g(t))g''(t).$$

由此得到

$$d^2f(g(t)) = f''_{tt}(g(t))dt^2 = f''_{gg}(g(x))(dg(x))^2 + f'_g(g(x))d^2g(x),$$

而函数 $f(x)$ 的第二微分等于

$$d^2f(x) = f''_{xx}(x)dx^2,$$

于是在把函数 $g(t)$ 代入到等式右边时得到 $f''_{gg}(g(t))(dg(t))^2$, 它显然与关于 $d^2f(g(t))$ 的等式的右端不同. 因此, 不变性对于二阶微分不复成立.

为了更深刻地弄清楚微分不变性的实质, 我们来考察几个更一般的概念.

我们把下面的表达式叫作是同一变量 x 的 n 个函数 $f(x), g(x), \cdots, h(x)$ 的 k 阶**微分单项式** $D_k, n \leqslant k$:

$$D_k = cf^{(\alpha)}(x)g^{(\beta)}(x)\cdots h^{(\gamma)}(x)dx^k,$$

其中 $\alpha+\beta+\cdots+\gamma = k$, 且 $\alpha, \beta, \cdots, \gamma$ 皆为自然数而 c 是某个实常数.

任何由同一组函数 $f, g, \cdots, h$ 的面定阶数 k 的微分单项式作成的线性组合叫作 **k 阶齐次微分表达式**.

同一组函数 $f, g, \cdots, h$ 的不同阶数的单项式的有限线性组合叫作**非齐次微分表达式**.

我们指出, 任何微分表达式都可看作是两个独立的变量 x 和 dx 的函数. 然而此刻, 我们所感兴趣的并不是问题的函数方面, 而是问题的代数方面, 更准确些说, 我们所感兴趣的是微分表达式在把独立变量 x 代之以函数 $\varphi(t)$ 且相应地把 dx 代之以 $d\varphi(t) = \varphi(t)dt$ 之后仍保持自己的形式的性质. 我们将更准确地弄明白这具体指的是什么. 若在 k 阶齐次微分表示 D 中以函数 $\varphi(t)$ 代替 x, 那么代替微分 dx^k 将有 $(d\varphi(t))^k = (\varphi'(t))^k(dt)^k$, 而代替导数 $f^{(\alpha)}(x), g^{(\beta)}(x), \cdots, h^{(\gamma)}(x)$ 的是表达式 $f^{(\alpha)}_{\varphi^\alpha}(\varphi(t)), g^{(\beta)}_{\varphi^\beta}(\varphi(t)), \cdots, h^{(\gamma)}_{\varphi^\gamma}(\varphi(t))$. 于是我们得到某个依赖于 t 和 dt 的微分表达式 B_1. 而若将同一齐次表达式 D 应用于函数 $f(\varphi(t)), g(\varphi(t)), \cdots, h(\varphi(t))$, 也就是说代替 $f^{(\alpha)}(x), g^{(\beta)}(x), \cdots, h^{(\gamma)}(x)$ 来考虑 $f^{(\alpha)}_{t^\alpha}(\varphi(t)), g^{(\beta)}_{t^\beta}(\varphi(t)), \cdots, h^{(\gamma)}_{t^\gamma}(\varphi(t))$, 而以表达式 $(dt)^k$ 代替 $(dx)^k$, 则得到另一个依赖于 t 和 dt 的微分表达式 B_2. 如果此时, 不管函数 $\varphi(t)$ 的形式如何, 成立 $B_1 = B_2$, 那么就说微分表达式 D 具有**不变性**, 或说它关于变量变换不变. 在相反的情形则认为 D 不具有上述性质. 换言之, 不变性 B 表示可以交换实施变量变换的运算和计算此微分表达式的运算的次序, 即这两种运算可交换.

就所引入的概念的目的而言, 一阶和高阶的微分都是指齐次微分表达式, 而且一阶微分具有不变性 (关于任何的变量变换), 而高于一阶的微分不具有此性质, 不过我们指出, 在变量的线性变换的情形, 不变性依然成立.

这样的问题产生了，是否存在具有不变性的高于一阶的微分表达式，已经知道，一般而言，由多个函数组成的不变的微分表达式是存在的，依赖于一个函数的唯一的不变的微分表达式是一阶微分，对于两个函数 f 和 g 而言，全部不变的表达式由形为 $B_1 = f'g'dx^2$ 和 $B_2 = (f''g' - f'g'')dx^3$ 的两种齐次微分表达式 B_1 和 B_2 给出. Ф. М. 马雷舍夫 (Ф. М. Малышев) 于 1978 年证明了一个一般的定理，断言由 n 个函数“组成”的齐次微分表达式的数量 $N(n)$ 是有限的，且得到估计式 $N(n) \leqslant n!$. 此外，对于不变的微分表达式的阶数 k 成立不等式 $k \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$[21].

我们还要引入一个涉及复合函数的高阶导数的定理.

定理 5 (法 · 地 · 伯鲁诺 (Фаа ди бруно) 公式)　设函数 $F(x)$ 和 $u(x)$ 都有 n 阶导数. 那么对于函数 $G(x) = F(u(x))$ 的 n 阶导数成立下述公式:

$$G^{(n)}(x) = \sum_{\alpha+2\beta+3\gamma+\cdots=n} F^{(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)}(u)P_{\alpha+\beta+\gamma+\cdots},$$

$$P_{\alpha+\beta+\gamma+\cdots} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots}\left(\frac{u'}{1!}\right)^{\alpha}\left(\frac{u''}{2!}\right)^{\beta}\left(\frac{u'''}{3!}\right)^{\gamma}\cdots.$$

右边的求和取遍一切满足等式 $\alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots = n$ 的非负整数 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$.

► 逐次使用复合函数的微分法则，我们得到形如

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)F^{(n)}(u)$$

的等式，其中 $c_k(x)$ 是某些其形状与函数 $y = F(u), u = f(x)$ 的具体给法无关的表达式. 因此，为了确定 $c_k(x)$ 通过函数 $u(x)$ 的精确表达式，可以使用任何适宜的函数. 据此，我们将认为 $F(u)$ 和 $u(x)$ 都是 n 阶多项式，写作

$$F(u) = F(u_0 + z) = F(u_0) + z\frac{F'(u_0)}{1!} + \cdots + z^n\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!},$$

$$u(x) = u(x_0 + t) = u(x_0) + t\frac{u'(x_0)}{1!} + \cdots + t^n\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}$$

这里，我们设变量 z 和 t 由等式 $z = u - u_0, u_0 = u(x_0), t = x - x_0$ 确定. 在这种情况下，函数 $G(x)$ 是一个 n^2 阶多项式，它可以写成

$$G(x) = G(x_0) + \frac{G'(x_0)}{1!}t + \cdots + \frac{G^{(n)}(x_0)}{n!}t^n + \cdots + \frac{G^{(n^2)}(x_0)}{(n^2)!}t^{n^2},$$

同时也可写成

$$G(x) = F(u_0) + \frac{F'(u_0)}{1!}\left(\frac{u'(x_0)}{1!}t + \cdots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}t^n\right) + \cdots$$
$$+ \frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}\left(\frac{u'(x_0)}{1!}t + \cdots + \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}t^n\right)^n.$$

在后一等式中, 借助于牛顿多项式 (见第二章 §1 的注) 打开括号, 并比较所得的表达式和第一个等式中 t^n 的系数, 就得到定理的结论. ◀

§5. 函数在一点处的增与减

设 x_0 是 $f(x)$ 的定义域的内点.

定义 5 如果存在点 x_0 的一个邻域, 使在其中:

a) 当 $x > x_0$ 时 $f(x) > f(x_0)$;

b) 当 $x < x_0$ 时 $f(x) < f(x_0)$

则说函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处增.

显然, 如果在点 $x = x_0$ 的某邻域中当 $\Delta x \neq 0$ 时有 $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$, 则 $x = x_0$ 是函数 $f(x)$ 的增点.

定义 6 如果存在点 x_0 的一个邻域, 使在其中:

a) 当 $x > x_0$ 时 $f(x) < f(x_0)$;

b) 当 $x < x_0$ 时 $f(x) > f(x_0)$

则说函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处减.

如果在点 $x = x_0$ 的某邻域中当 $\Delta x \neq 0$ 时有 $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0$ 则 $x = x_0$ 是函数 $f(x)$ 的减点.

定义 7 函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处有局部极大 (局部极小), 如果在此点的某一去心邻域中成立不等式 $f(x_0) > f(x)$ (对应地 $f(x_0) < f(x)$) 的话.

定义 8 函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处有局部极值, 如果它在此点有局部最大或局部最小的话.

定理 6 (函数在一点处增或减的充分条件)

1. 若 $f'(x_0) = c > 0$, 则点 $x = x_0$ 是函数 $f(x)$ 的增点.
2. 若 $f'(x_0) = c < 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处减.

► 对情形 1. 由于

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

那么存在数 $\delta = \delta\left(\dfrac{c}{2}\right) > 0$ 使得不等式

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c\right| < \frac{c}{2}$$

对于点 $x = x_0$ 的去心 δ 邻域中的所有的点都成立. 在此邻域中, 有

$$0 < \frac{c}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{3c}{2}.$$

因此, Δf 与 Δx 取同样的符号, 也就是说 x_0 是增点. 只要把 $f(x)$ 换为 $-f(x)$, 情形 2 就归结为情形 1. ◀

这个定理叫作达布 (Darboux) **引理** .

我们来证明一个更一般些的定理, 即费马定理. 如前一样, 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

定义 9 1) 内点 x_0 称为广义局部最大点, 如果存在点 x_0 的去心 δ 邻域, 在其中

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \leqslant 0.$$

类似地定义广义局部最小点.

2) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有广义局部最小, 如果存在去心 δ 邻域, 在其中

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \geqslant 0.$$

3) 广义局部最小点和广义局部最大点都叫作广义局部极值点.

显然, 极值点可看作广义极值点, 而反之不真.

定理 7 (费马) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上定义且连续. 设 $[a,b]$ 的内点 x_0 是此函数的广义极值点且 $f'(x_0)$ 存在. 那么 $f'(x_0)=0$.

► 点 x_0 不可能是增点 (减点), 否则的话在此点的某去心邻域中 $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0$ $\left(\text{相应地}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} < 0\right)$. 于是不等式 $f'(x_0) > 0(f'(x_0) < 0)$ 是不可能的. 剩下只有 $f'(x_0)=0$. ◀

第十九讲

§6. 罗尔定理, 柯西定理以及拉格朗日定理

定理 8 (罗尔定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且在此闭区间的内点处皆可微, 又设 $f(a)=f(b)$. 那么在区间 (a,b) 中存在点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$.

► 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 因此在此闭区间中存在点 $x_1, f(x)$ 在 x_1 处有最大值, 同样, 也存在点 x_2, 是 $f(x)$ 的最小点. 如果 $x_1=x_2$, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上为常数, 从而在 $[a,b]$ 上处处有 $f'(x)=0$. 若 $x_1 \neq x_2$, 则或者 $f(x_1)$ 或者 $f(x_2)$, 不等于 $f(a)=f(b)$. 于是使不等式成立的点必是闭区间 $[a,b]$ 的内点且同时也是局部极值点记此点为 ξ, 根据 §5 定理 7, $f'(\xi)=0$. ◀

定理 9 (柯西定理) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且在其内可微. 设对于一切 $x \in (a,b), g'(x) \neq 0$. 那么在区间 (a,b) 内存在点 c 使得

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

► 考虑到 $g'(c) \neq 0$, 以等价的方式把要求的等式变换为

$$(f(a)-f(b))g'(c) - (g(a)-g(b))f'(c) = 0.$$

我们发现, 此等式的左边乃是函数 $H(x)$ 的导数在点 $x=c$ 处的值, 其中

$$H(x) = g(x)(f(a)-f(b)) - f(x)(g(a)-g(b)).$$

这样一来, 只要证明存在点 c 使 $H'(c)=0$. 然而函数 $H(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 的内点处皆可微且

$$H(a) = H(b) = -g(a)f(b) + f(a)g(b).$$

因此, 根据罗尔定理, 存在点 $c \in (a,b)$ 使 $H'(c)=0$. ◄

推论 (拉格朗日定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且在开区间 (a,b) 上可微. 那么成立公式

$$f(a)-f(b) = f'(c)(a-b),$$

其中 c 是此闭区间的某个内点.

推论的断言乃是柯西定理当 $g(x)=x$ 时的特殊情形. 此推论也叫作有限增量公式.

注 1. (**关于达布引理的证明模式**) 此引理断言, 若 $f'(x_0)>0$ 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处增. 从另一方面来说, 它的增加指的是在点 x_0 的某邻域内函数的增量 $\Delta f(x) = f(x)-f(x_0)$ 与自变量的增量 $\Delta x = x - x_0$ 有同样的符号, 且当 $\Delta x \neq 0$ 时 $\Delta f(x) \neq 0$. 此事之证明, 本质上是根据具有正的极限的函数在基的某个终端上是正的这一性质. 在当前的情况下

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0,$$

于是在点 x_0 的某个去心邻域中有不等式

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0.$$

这表明在点 x_0 的此去心邻域中值 $\Delta f(x)$ 与 Δx 有同样的符号且当 $\Delta x \neq 0$ 时 $\Delta f(x) \neq 0$.

2. a) (**关于柯西定理**) 为使定理的断言为真, 特别地要求 $g'(x) \neq 0$ 对于每个属于开区间 (a,b) 的点 x 都成立. 由此推出 $g(a)-g(b) \neq 0$, 这就是说在定理的表达式中的比例式的分母不是零. 实际上, 如果 $g(a)=g(b)$, 则根据罗尔定理, 存在 c 使得 $g'(c)=0$, 而根据定理的条件, 这是不可以的.

b) (柯西定理的几何解释) 设对于 $a \leqslant t \leqslant b$ 有

$$\begin{cases} y = f(t), \\ x = g(t). \end{cases}$$

那么在某点 c 处此曲线的切线的倾角正切值等于弦的倾角正切值:

$$\tan\varphi = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}.$$

3. (关于罗尔定理) 此定理本质上断言, 在某种补充条件之下, 在函数的两个 "零点" 之间永远存在其导数的一个 "零点". 定理的证明基于这样的事实, 若整体极值点是内点, 则它既不可是增点也不可是减点, 于是推出在此点处的导数为零.

我们还要证明一个关于导数取值零的定理.

定理 10 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 可微, $a < a_1 < b_1 < b$ 且 $f'(a_1)\cdot f'(b_1) < 0$. 那么存在点 $\xi \in (a_1,b_1)$ 使 $f'(\xi) = 0$.

► 先考虑 $f'(a_1) > 0$ 的情形. 设 ξ 是在闭区间 $[a_1,b_1]$ 上的最大值点, 那么它是此区间的内点, 因为 a_1 是增点而 b_1 是减点, 于是有 $f'(\xi) = 0$. 情形 $f'(a_1) < 0$ 借助于将函数 $f(x)$ 变成 $g(x) = -f(x)$ 而归结为第一种情形. ◄

推论 (达布定理) 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 可微且对于某些 $a_1, b_1 \in (a,b)$:

$$f'(a_1) = \alpha, \quad f'(b_1) = \beta.$$

那么对于任何介于 α 和 β 之间的数 ξ 都存在介于 a_1, b_1 之间的点 x_0 使得 $f'(x_0) = \xi$.

► 考虑函数 $g(x) = f(x) - x\xi$. 有

$$g'(a_1) = \alpha - \xi, \quad g'(b_1) = \beta - \xi.$$

由于 ξ 介于 α 和 β 之间, 所以 $\alpha - \xi$ 和 $\beta - \xi$ 有相异的符号. 那么根据定理 10, 存在点 x_0 使 $g'(x_0) = 0$, 由此推出

$$f'(x_0) - \xi = 0, \text{ 即 } f'(x_0) = \xi. \quad ◄$$

定理 11 函数 $g(x) = f'(x)$ 不能有第一类间断点. 也就是说, 如果在点 x_0 的某邻域内存在 $f'(x)$ 且 x_0 是 $f'(x)$ 的间断点, 则 x_0 是第二类间断点.

► 设当 $x \to x_0+$ 时 $f'(x) \to a$, 当 $x \to x_0-$ 时 $f(x) \to b$. 我们来证明 $a = b$. 假设不是这样, 那么 $a \neq b$. 设

$$x_n = x_0 + \frac{1}{n} \to x_0+, \quad y_n = x_0 - \frac{1}{n} \to x_0-,$$

那么当 $n \to \infty$ 时

$$f'(x_n) \to a, \quad f'(y_n) \to b.$$

由于 $a \neq b$, 那么或者 $a \neq f'(x_0)$, 或者 $b \neq f'(x_0)$.

假定 $a \neq f'(x_0)$. 由于数 $\dfrac{f'(x_n)+f'(x_0)}{2}$ 介于 $f'(x_n)$ 和 $f'(x_0)$ 之间, 那么根据达布定理, 存在 c_n 满足条件 $x_n > c_n > x_0$ 而且

$$f'(c_n) = \frac{1}{2}(f'(x_n)+f'(x_0)).$$

由于 $c_n \to x_0$, 根据右极限的定义, 按照海涅定理有 $f'(c_n) \to a$. 由此,$a = \frac{1}{2}(a+f'(x_0))$, 即 $a = f'(x_0)$, 而这与 $f'(x_0) \neq a$ 矛盾. 因此, $a \neq b$ 的假定是不对的, 于是 $a = b$. 这表明, 函数 $f'(x)$ 不能有第一类间断点.

我们顺便证明了, 如果当 $x \to x_0+$ 时 (或 $x \to x_0-$ 时) $f'(x) \to z_0$, 则 $z_0 = f'(x_0)$. ◀

我们来考察导数的间断点的例子.

例 令

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

对于 $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x},$$

而当 $x = 0$ 时, 按导数的定义

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 0.$$

在点 $x = 0$ 处, $f'(x)$ 既无右极限又无左极限.

定义 10 *若当 $x \to x_0$ 时 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to +\infty(-\infty)$, 则说 $f(x)$ 在点 x_0 处有无穷导数, 并记*

$$f'(x_0) = +\infty \quad (-\infty).$$

关于右导数和左导数有同样的说法和记号.

例 $f(x) = \sqrt{x}$. 当 $x \neq 0$ 时有 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. 那么

$$f'(0+) = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\sqrt{\Delta x}-0}{\Delta x} = +\infty.$$

第二十讲

§7. 拉格朗日定理的推论

定理 12 *设对于一切 $x \in (a,b)$ $f'(x)=0$. 那么 $f(x)=\text{const}$.*

► 据拉格朗日定理,

$$\Delta f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'(c)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)=0.$$

由此,

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad ◄$$

定理 13 *设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可微. 那么, 为使 $f(x)$ 在 (a,b) 上不减, 必要且充分的是*

$$f'(x)\geqslant 0 \quad \forall x\in(a,b).$$

► *必要性* 函数 $f(x)$ 不减的条件等价于 $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}\geqslant 0$. 在不等式中过渡到极限就得到

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

充分性 若 $f'(x)\geqslant 0$ 则根据拉格朗日定理

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=f'(c)\geqslant 0$$

对于某 $c\in(a,b)$, 这表明函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上不减. ◄

定理 14 *若在开区间 (a,b) 上 $f'(x)>0$, 则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调增.*

► 根据拉格朗日定理

$$\Delta f(x)=f'(c)\Delta x>0 \quad \text{当 } \Delta x>0 \text{ 时}. \quad ◄$$

定理 15 *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可微. 那么, 为使函数 $f(x)$ 在此区间上严格增, 必要且充分的是在开区间 (a,b) 上 $f'(x)\geqslant 0$ 且在任何含于闭区间 $[a,b]$ 内的闭区间 $[a_1,b_1]$ 上 $f'(x)$ 都不恒为零.*

► *必要性* 用反证法. 如果定理的条件不成立, 那么或者对于某点 $x_0\in(a,b)$ $f'(x_0)<0$, 或者对于一切 $x\in[a_1,b_1]$ $f'(x)\equiv 0$. 在第一种情况, x_0 是 $f(x)$ 的减点, 而在第二种情况, $f(x)$ 在 $[a_1,b_1]$ 上为常数. 这与函数 $f(x)$ 增的条件矛盾.

充分性　由于按条件 $f'(x) \geqslant 0$, 所以对于任何 $a_1 < b_1, a_1, b_1 \in [a,b]$, 有

$$f(b_1) - f(a_1) = f'(c)(b_1 - a_1) \geqslant 0,$$

即函数 $f(x)$ 不减.

我们来证 $f(x)$ 增. 设不然, 且对于 $b_1 > a_1, f(a_1) = f(b_1)$. 那么根据 $f(x)$ 在闭区间 $[a_1, b_1]$ 上不减而得在此区间上 $f(x) = \text{const}$, 从而在 (a_1, b_1) 上 $f'(x) = 0$, 这与定理的条件矛盾. ◄

§8. 一些不等式

定理 16 (杨格不等式)　设 $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$. 那么对于 $x > 0$ 有

$$x^\alpha \leqslant \alpha x + \beta.$$

► 考察函数 $f(x) = x^\alpha - \alpha x - \beta$. 我们发现, $f(1) = 1 - \alpha - \beta = 0$. 另外, 由于

$$f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) < 0 \quad 对于\ x > 1,$$

函数 $f(x)$ 当 $x > 1$ 时减. 因此, 当 $x > 1$ 时成立不等式 $f(x) < f(1) = 0$.

而若 $0 < x < 1$, 则

$$f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) > 0.$$

由此得知, 当 $0 < x < 1$ 时 $f(x) < f(1) = 0$. 这样一来, 对于一切 $x > 0$ 成立不等式 $x^\alpha - \alpha x - \beta \leqslant 0$, 由此推出定理的真确性. ◄

置 $x = \dfrac{a}{b} > 0$. 从杨格不等式得到不等式 $a^\alpha b^\beta \leqslant a\alpha + b\beta$. 这个不等式对于任何 $a, b > 0$ 都成立, 现在令

$$a_k = \frac{u_k^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} u_\nu^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad b_k = \frac{v_k^{\frac{1}{\beta}}}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} v_\nu^{\frac{1}{\beta}}}, \quad u_\nu, v_\nu \geqslant 0,$$

并且关于 k 从 1 到 n 求和. 我们得到

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{u_k^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} u_\nu^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^\alpha \left(\frac{v_k^{\frac{1}{\beta}}}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} v_\nu^{\frac{1}{\beta}}} \right)^\beta \leqslant \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k = 1,$$

即

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu v_\nu \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^{\frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha \left(\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu^{\frac{1}{\beta}} \right)^\beta.$$

此不等式叫作**赫尔德** (Hölder) **不等式**.

现设成立下述条件: $p>1; a_\nu, b_\nu>0, \nu=1,\cdots,n$. 那么

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu+b_\nu)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

► 引入记号 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 使用赫尔德不等式, 有

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu+b_\nu)^p = \sum_{\nu=1}^{n}a_\nu(a_\nu+b_\nu)^{p-1} + \sum_{\nu=1}^{n}b_\nu(a_\nu+b_\nu)^{p-1} \\
&= B+C, \\
B &= \sum_{\nu=1}^{n}a_\nu(a_\nu+b_\nu)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu+b_\nu)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}, \\
C &= \sum_{\nu=1}^{n}b_\nu(a_\nu+b_\nu)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu+b_\nu)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

由于 $q(p-1)=p$, 所以

$$A \leqslant \left[\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] A^{\frac{1}{q}},$$

由此, 因为 $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, 我们有

$$A^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad ◄$$

此不等式叫作闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式.

§9. 以参数形式给出的函数的导数

设 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是两个在 $[0,1]$ 上定义并且可微的函数, 而且对于一切 $t\in[0,1]$ 成立不等式 $\varphi'(t)>0$ (或者 $\varphi'(t)<0$). 那么 $\varphi(t)$ 严格增(当 $\varphi'<0$ 时 φ 严格减) 且此函数有反函数 $t=g(x)$. 数偶 $(\varphi(t),\psi(t))$ 之全体如下地给出了一个函数 $y=f(x)$:

$$(x,y)=(x,f(x))=(\varphi(t),\psi(t)),$$

其中 $x=\varphi(t), t=g(x), f(x)=\psi(g(x))$.

我们来求这个函数的导数, 我们有

$$f'(x)=\psi_g'(g(x))g'(x)=\frac{\psi_g'(g(x))}{\varphi_g'(g(x))},$$

这是由于

$$g'(x) = \frac{1}{\varphi'_g(g(x))}.$$

对于 $f'(x)$ 的等式可写成如下形式:

$$f'_\varphi(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

这给出了求以参数方式给出的函数的导数的法则. 以同样的方式也可以计算任意阶的导数. 例如我们来求二阶导数的公式. 我们有

$$f''(x) = f''_{\varphi\varphi}(\varphi(t)).$$

一方面, 成立等式

$$(f'_\varphi(\varphi(t)))'_t = f''_{\varphi\varphi}(\varphi(t))\varphi'(t),$$

而另一方面,

$$(f'_\varphi(\varphi(t)))'_t = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}.$$

因此,

$$f''_{\varphi\varphi}(\varphi(t)) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

第二十一讲

§10. 不定式的展开

定理 17 (洛必达第一法则; 当 $x \to a-$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型不定式) 设

1) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在某个形如 $(a-\delta_1, a)$ 的区间中可微, $\delta_1 > 0$;

2) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} g(x) = 0$;

3) 对于某 $\delta_2 > 0$, 和一切 $x \in (a-\delta_2, a), f'(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$;

4) 当 $x \to a-$ 时, 比式 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 有有限的或无穷极限, 即 $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在.

那么比式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 也有极限且

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

► 可认为当 $x \to a-$ 时 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限是有限的数 l, 因为不然的话可考察比式 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

补充 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 $x = a$ 处的定义为 $f(a) = g(a) = 0$. 那么函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆在点 a 处左连续. 由于 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 当 $x \to a-$ 时有极限 l, 所以对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) > 0$ 使得对于一切 $x \in I(\delta_3) = (a - \delta_3, a)$ 有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon.$$

置 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, 那么对于每个 $x \in (a - \delta, a)$, 使用柯西定理, 得

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \varepsilon,$$

其中 $c \in (x, a) \subset (a - \delta, a)$.

于是, 按定义 $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$. ◄

推论 1 在定理 1 中可以把条件 $x \to a-$ 和区间 $(a - \delta, a)$ 改换为条件 $x \to a+$ 和区间 $(a, a + \delta)$.

► 我们来证明这个事实. 只要做变量变换 $y = 2a - x$ 并使用定理 1 于函数 $f_1(y) = f(x)$ 和 $g_1(y) = g(x)$. 显然这些函数都满足定理的条件, 并且当 $x \to a+$ 时 $y = 2a - x \to a-$. ◄

推论 2 (洛必达第一法则; 当 $x \to a$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式) 设

1) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在某区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 中的点 $x = a$ 外处处有定义且可微;

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$;

3) 当 $x \in (a - \delta, a + \delta), x \to a$ 时 $f'(x), g'(x) \neq 0$[①];

4) 存在有限的或无穷极限: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

那么, 极限 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在且等于 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

证明直接由定理 1 和推论 1 得出.

对于比式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限, 类似的定理对于当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 趋于 ∞ 的情形 $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型不定式}\right)$ 也成立. 不过此时证明复杂, 其缘由于下文可明白, 下述定理成立.

定理 18 (洛必达第二法则; 当 $x \to a-$ 时的 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式) 设

1) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在形如 $(a - h, a)$ 的区间中可微, $h > 0$;

---

①此语当理解为: 存在 $\delta_1 \in (0, \delta]$, 当 $0 < |x - a| < \delta_1$ 时 $f'(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ —— 译者注.

2) 对于一切 $x \in (a-h, a), f'(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$;

3) 当 $x \to a-$ 时 $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty$;

4) 存在有限的或无穷极限 $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

那么, 函数之比的极限亦存在, 且

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

► 显然, 可以认为

$$\lim_{x \to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R},$$

即极限有限. 实际上, 如果 $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, 则

$$\lim_{x \to a-} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0.$$

而代替证明 $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, 只要证 $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ 就够了, 此式同时表明 $\lim\limits_{x \to a-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$. 和在证明定理 17 时一样, 我们将使用柯西公式. 但此时情形更为复杂, 因为我们不能直接把比式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 换为比式 $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)}$. 但是可以带有小的误差来作成此事, 而这个误差实际上是趋于零的. 我们认为在点 a 的某个半邻域 $(a-h_1, a)$ 中 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$. 这是可以做到的, 因为当 $x \to a-$ 时 $f(x) = \infty, g(x) \to \infty$.

设 ε_1 是任意的满足 $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{1}{2}$ 的数, 取 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ 使得不等式

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon_1, \quad \delta_1 < \min(h, h_1)$$

对于一切属于区间 $(a-\delta_1, a)$ 的 x 成立. 这是可能的, 因为根据条件

$$\lim_{x \to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}.$$

设 x_0 是此邻域 $(a-\delta_1, a)$ 中的某个点. 由于 $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \infty$, 所以存在 $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_1) > 0$ 使得

$$|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{\varepsilon_1} \quad \forall x \in (a-\delta_2, a).$$

类似地, 存在 $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) > 0$ 使得

$$|g(x)| > \frac{|g(x_0)|}{\varepsilon_1} \quad \forall x \in (a-\delta_3, a).$$

令 $\delta_4=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3), I_4=\{x|x\in(a-\delta_4,a)\}$. 那么对于任意的 $x\in I_4$, 根据柯西定理, 有

$$\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}-l\right|=\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right|=\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-l\right|<\varepsilon_1,$$

其中 $c\in(x,x_0)\subset I_4$. 由此得到

$$\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}\right|=\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}-l+l\right|<\varepsilon_1+|l|<1+|l|.$$

进而, 对于这些 x 值将有一串不等式:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|&=\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}+\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}-l\right|\\&\leqslant\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}\right|+\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}-l\right|\\&\leqslant\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}\right|\left|\frac{\dfrac{\Delta g(x_0)}{g(x)}}{\dfrac{\Delta f(x_0)}{f(x)}}-1\right|+\varepsilon_1\\&=\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}\right|A+\varepsilon_1.\end{aligned}$$

但由于

$$\frac{\Delta g}{g}=1-\frac{g(x_0)}{g(x)}=1+\alpha,\quad 其中\ |\alpha|<\varepsilon_1,$$
$$\frac{\Delta f}{f}=1-\frac{f(x_0)}{f(x)}=1+\beta,\quad 其中\ |\beta|<\varepsilon_1,$$

所以

$$A=\left|\frac{1+\alpha}{1+\beta}-1\right|=\left|\frac{\alpha-\beta}{1+\beta}\right|\leqslant\frac{2\varepsilon_1}{0.5}=4\varepsilon_1.$$

因此我们得到

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|\leqslant(|l|+1)4\varepsilon_1+\varepsilon_1=\varepsilon_1(4|l|+5)=\varepsilon.$$

置

$$\delta(\varepsilon)=\delta_4\left(\frac{\varepsilon}{4|l|+5}\right).$$

那么对于任何 $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{4|l|+5}{2}\right)$ 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)=\delta_4\left(\dfrac{\varepsilon}{4|l|+5}\right)$ 使得对于任何 $x\in(a-\delta,a)$ 都成立不等式 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\varepsilon$. 这表明

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=l.\quad ◀$$

推论 1 若在定理 2 中将条件 $x \to a-$ 和 $x \in (a-h, a)$ 换为条件 $x \to a+$ 和 $x \in (a, a+h)$, 则定理的结论仍成立.

► 只要使用定理 2 于函数

$$f_1(y) = f_1(2a - x) = f(x), \quad g_1(y) = g_1(2a - x) = g(x)$$

就可以了. ◄

推论 2 (洛必达第二法则; 当 $x \to a$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式) 设

1) $f(x), g(x)$ 在点 a 的某去心 h 邻域可微;

2) 在点 a 的同一邻域内 $f'(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$;

3) 当 $x \to a$ 时 $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty$;

4) 导数之比的极限 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在.

那么函数之比的极限存在且等于

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

此结论之证明直接从定理 2 和推论 1 的结论得出.

注 1. 在定理 17 和定理 18 中, 条件 $x \to a-$ 可以改为 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$, 而在定理 17 和定理 18 的第二个推论中, 条件可改为 $x \to \infty$.

证明借助于引入变量变换来进行. 例如, 在 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 的情形, 应置 $x = -\frac{1}{t}$. 那么

$$\left.\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|_{x=-\frac{1}{t}} = \frac{f_t'\left(-\frac{1}{t}\right)}{g_t'\left(-\frac{1}{t}\right)} = \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)}.$$

由此推出极限

$$\lim_{t \to 0-} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = l$$

存在, 而后按定理 17, 有

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = l = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

2. 应用关于两数列的比的极限的施托尔茨定理可从本质上简化洛必达第二法则的相当笨重的证明. 我们来给出定理 18 一个基于上述思想的证明.

► 我们来证明定理 18. 按照海涅关于极限的定义, 当 $x \to a-$ 时 $\frac{f(x)}{g(x)} \to l$ 指的是对于任何收敛到 a 的增数列 $\{x_n\}, x_n \neq a$, 条件 $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to l$ 都成立. 而由于按定理的条件, 当 $x \to a-$ 时 $g(x) \to \infty$, 所以当 $n \to \infty$ 时 $g(x_n) \to \infty$, 而这就表明, 对于比式 $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ 可以使用施托尔茨定理. 因此, 再用柯西定理, 有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)},$$

如果最后的极限存在的话. 然而, 此处数 c_n 满足不等式 $x_n < c_n < x_{n+1}$, 由此推出当 $n \to \infty$ 时 $c_n \to a$, 因此最后的极限存在且等于 l.

应该指出, 使用施托尔茨定理必须要有数列 $g(x_n)$ 的单调性, 而此性质是由在点 $x = a$ 的某左半邻域中 $g'(x) \neq 0$ 这一条件来保证的. ◄

例 1. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 1$. 根据洛必达第二法则, 有

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{\ln x^x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

2. 使用洛必达第一法则, 我们得到

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

第二十二讲

§11. 局部泰勒公式

作为应用, 我们来证明带佩亚诺型余项的泰勒公式, 人们也称之为*局部泰勒公式*.

我们看到, 微分 df 近似于增量 Δf 精确到高于 1 阶的无穷小. 此事记作 $\Delta f(a) - df(x)|_{x=a} = o(\Delta x)$, 即

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = o(|x-a|) \quad 当\ x \to a.$$

洛必达法则可用来推广这个结论.

我们来考察 n 阶泰勒多项式:

$$g(x) = f_n(a,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}(\Delta x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n,$$

其中 $\Delta x = x - a$.

定理 19 (带有佩亚诺型余项的泰勒公式) *设 $f(x)$ 在点 $x = a$ 的某邻域内 $n-1$ 次可微且存在 $f^{(n)}(a)$. 那么*

$$r(x) = f(x) - f_n(a,x) = o((\Delta x)^n) \quad 当\ \Delta x \to 0\ 时.$$

► **局部泰勒公式的第一个证明** 当 $x \to a$ 时, 把洛必达第一法则应用于比式 $\alpha(x) = \dfrac{r(x)}{(x-a)^n}$ 共 $n-1$ 次, 我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a}\frac{r'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to a}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}\\ &= \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-g^{(n-1)}(x)}{x-a}.\end{aligned}$$

我们还有

$$g^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a).$$

由此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\alpha(x) &= \lim_{x\to a}\frac{r^{(n-1)}(x)}{((x-a)^n)^{(n-1)}}.\\ &= \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a} - f^{(n)}(a)\right)\\ &= \frac{1}{n!}(f^{(n)}(a)-f^{(n)}(a)) = 0.\end{aligned}$$

换言之, $\alpha(x)$ 当 $x \to a$ 时是无穷小函数. 因此 $r(x) = (x-a)^n\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是无穷小, 即

$$r(x) = o((x-a)^n). \quad ◄$$

具有佩亚诺型余项的泰勒公式适合于计算极限. 实际上, 例如当 $x \to 0$ 时, 有

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

由此,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \dfrac{x^3}{6}}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^5}{120} + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{120}.$$

重要的是指出, 局部泰勒公式还具有深刻的内涵. 特别是, 它推广了函数在一点处可微的概念, 因为当 $n=1$ 时, 我们从它得到前面给出的函数的微分的定义.

我们说, 对于某 $n \in \mathbb{N}$ 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ **在点 x_0 处有 n 阶切触**, 如果当 $x \to x_0$ 时成立关系式 $f(x) - g(x) = o((x-x_0)^n)$. 那么, 局部泰勒公式断言, 泰勒多项式 $f_n(x)$ 与函数 $f(x)$ 有 n 阶切触.

我们发现, 如果两个 n 阶多项式 $P_n(x)$ 和 $Q_n(x)$ 在某点 x_0 处都与某一函数 $g(x)$ 有 n 阶切触, 那么它们的系数重合, 从而 $P_n(x) = Q_n(x)$, 实际上, 那时

$$h_n(x) = P_n(x) - Q_n(x) = (P_n(x) - g(x)) + (g(x) - Q_n(x)) = o((x-x_0)^n).$$

但由于多项式 $h_n(x)$ 的阶数为 n, 所以令 $x \to x_0$ 就得知 $h_n(x)$ 的一切系数全是零. 这表明 $P_n(x)$ 和 $Q_n(x)$ 实为同一多项式, 由此亦得出, 上面所证的定理中的泰勒多

项式 $f_n(x) = f_n(a, x)$ 是唯一确定的. 函数 $f(x)$ 在点 a 处的导数值通过此多项式的系数 c_k 按下述公式给出

$$f^{(k)}(a) = k!c_k, \quad k = 1, \cdots, n.$$

有趣的是, 可能出现这样的情形, 函数 $f(x)$ 在点 a 处已经不存在二阶导数 $f''(a)$, 但同时在此点处该函数都与 n 阶多项式 $P_n(x)$ 具有 $n \geqslant 2$ 阶切触. 此时, 对于 $k \geqslant 2$, 量

$$\partial_k = k!c_k,$$

其中 c_k 是多项式 $P_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$ 的系数, 可以看作是函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处的相应阶数的导数的概念的推广. 我们称这些数为函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处的 k **阶标号**并记作 $\partial_k = \partial_k(f(a))$.

例 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上 "几乎处处" 间断, 但同时它在一个 "处处稠密的集合" 上不仅有一阶导数而且有一切阶数的标号 $\partial_k(f(x))$ (引号中的短语的确切含义在下面说明). 这个函数是这样给出的:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 是无理数}, \\ n^{-n}, & \text{如果 } x = \dfrac{m}{n}, (m, n) = 1. \end{cases}$$

► 我们仅限于证明该函数的一阶导数的存在性的论断.

显然, 如果 x_0 是闭区间 $[0, 1]$ 中的有理数, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处间断. 如果 x_0 是无理数, 那么对于任给的 $\varepsilon > 0$, 仅存在有限个分数其分母不超过 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 记它们为 $r_1, \cdots, r_k$.

设 $\delta = \min\limits_{i \leqslant k} |x_0 - r_k|$. 那么对于任何满足条件 $|x - x_0| < \delta$ 的 x 都有

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| < N^{-N} \leqslant N^{-1} < \varepsilon.$$

我们还需要下面的定义和定理.

定义 数 α 叫作是代数数, 如果它满足一个整系数代数方程. 数 α 叫作无理数, 如果它不满足任何一阶整系数代数方程.

我们不加证明引入下述定理.

定理 20 (罗斯 (Roth)[①] 定理) 设 ξ 是无理数且是代数数, 设 $\rho > 2$ 是任意一个常数. 那么仅存在有限个整数对 $(p, q), q \geqslant 1, (p, q) = 1$, 使得 $\left|\xi - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^\rho}$.

① K. F. Roth, 英籍德国人, 1925—, 获 1958 年菲尔兹奖 —— 译者注.

设 x_0 是任意的一个代数无理数. 根据罗斯定理, 对于 $\rho > 2$ 不等式

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\rho}$$

仅有有限个解. 把这些解记作 $\frac{p_1}{q_1}, \cdots, \frac{p_r}{q_r}$. 任意给定 $\varepsilon > 0$ 并置

$$N = \max\left(q_1, \cdots, q_r, \rho, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right), \quad \delta = \min_{i \leqslant r}\left|x_0 - \frac{p_i}{q_i}\right|.$$

那么, 若 $|x - x_0| < \delta$[①] 则对于 $x = \frac{m}{n}(m, n) = 1$, 有

$$n > N, \quad \left|\frac{m}{n} - x_0\right| \geqslant \frac{1}{n^\rho}, \quad |f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{n^n}.$$

因此,

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leqslant \frac{n^{-n}}{n^{-\rho}} = n^{\rho - n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

而若 x 是无理数, 则

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = 0 < \varepsilon. \quad ◀$$

于是已证实, 函数 $f(x)$ 在代数无理数 x_0 处有导数零.

称一个集合 A 是在闭区间 $[a, b]$ 中处处稠密的, 如果对于任何点 $x \in [a, b]$, 在每个含 x 的开区间中都至少含有集合 A 的一个点.

那么, 上述函数: 1) 在闭区间 $[0, 1]$ 的一个处处稠密的集合上间断 (意指在其每点处间断 —— 译者注); 2) 在闭区间 $[0, 1]$ 中的一个处处稠密的集合上连续 (意指在其每点处连续 —— 译者注); 3) 在 $[0, 1]$ 中的一个处处稠密的集合上有导数 [34].

与所考察的例子相联系, 可能发生这样的问题: 如果闭区间 $[a, b]$ 上的函数 $g(x)$ 在此区间的每点处都有 n 阶标号 $\partial_n g(x)$, 那么此函数是 n 次可微的吗? 函数 $y = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin e^{\frac{1}{x^2}}$ 作为例子给出了否定的回答.

作为本节之结尾, 我们引入局部泰勒公式的另一个证明, 此证明可以简单地推广到多变量函数的情形.

► **局部泰勒公式的第二个证明** 我们使用关于参数 n 的数学归纳法, 当 $n = 1$ 时, 定理的结论从函数的微分的定义推出. 现假定 $n > 1$, 从定理的条件推出, 函数 $r(x)$ 在点 $x = a$ 的某邻域 U 内 $n - 1$ 次可微. 此外, 在点 a 处, 函数本身及其一切直到 n 阶的导数值都等于零.

往下, 设 $x \in U$ 且 $\Delta x = x - a$. 用 $g(t)$ 证函数 $g(t) = r(a + t\Delta x)$. 那么有

$$r(x) = r(x) - r(a) = r(a + \Delta x) - r(a) = g(1) - g(0).$$

---

① 此处应为 $|x - x_0| < \min\left(\delta, \frac{1}{2N}\right)$, (其中 $\frac{1}{2N}$ 不必是精确值) —— 译者注.

由此, 用拉格朗日公式于函数 $g(t)$, 得知对于某 $\xi, 0<\xi<1$, 有

$$r(x)=g'(\xi)=r_x'(a+\xi\Delta x)\Delta x.$$

我们指出, 点 $a+\xi\Delta x\in U$. 因此, 对于最后的等式的右端的导数可以把参数 n 的值改为 $n-1$ 而使用归纳假设, 那么将有

$$r_x'(a+\xi\Delta x)=o(|x-a|^{n-1}).$$

由此推出 $\qquad r(x)=o(|x-a|^n).$ ◄

§12. 带有一般型余项的泰勒公式

根据具有佩亚诺型余项的泰勒公式, 在点的邻域内可写出近似等式 $f(x)\approx f_n(a,x)$. 有时在点 a 的某个甚至很大的邻域内, 多项式 $f_n(a,x)$ 可以很好地近似 $f(x)$. 此外, 对应于仅仅一个点 a 的全体数 $f^{(n)}(a)$ 的值, 常可用来计算在任意一点 x 处的 $f(x)$ 值而达到任意需要的精度. 这个事实不单对于计算来说是重要的, 对于理论结构也很重要. 确切地说, 我们现在来证明分析中最重要的定理中的一个, 即带有一般型(或叫施勒米希–劳思 (Schlömilch-Routh) 型) 余项的泰勒公式[①].

定理 21 (泰勒公式) 设 $f(x)$ 是在区间 (x_0,x_1) 上 $n+1$ 次可微的函数. 设 $a<b$ 是此区间内的任意两点. 那么对于任意的正数 $\alpha>0$, 存在介于 a 和 b 之间的点 c 使得

$$r_n(b)=f(b)-f_n(a,b)=\frac{n+1}{\alpha}\left(\frac{b-a}{b-c}\right)^{\alpha}(b-c)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

我们证得

$$f_n(a,b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n.$$

► 定义数 H 为

$$H=\frac{f(b)-f_n(a,b)}{(b-a)^{\alpha}}.$$

实质上, 要证的是在区间 (a,b) 中存在点 c, 使

$$H=\frac{n+1}{\alpha}(b-c)^{n+1-\alpha}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

我们借助于罗尔定理来证明此式, 定义数 H 的等式可写成:

$$f(b)-f_n(a,b)-H(b-a)^{\alpha}=0.$$

[①] O. Schlömilch, 1823—1901, 德国人, E. J. Routh,1831—1907, 英籍加拿大人 —— 译者注.

我们来考虑在 $[a, b]$ 上以关系式

$$\varphi(t) = f(b) - f_n(t, b) - H(b-t)^\alpha$$

定义的函数 $\varphi(t)$, 显然, $\varphi(a) = 0$, 此外, $\varphi(t)$ 在 (a, b) 上可微且在 $[a, b]$ 上连续, 还有, 由于成立等式 $f_n(b, b) = f(b)$, 所以

$$\varphi(b) = f(b) - f(b) - H(b-b)^\alpha = 0.$$

因此, 根据罗尔定理, 在区间 (a, b) 上, 导数 $\varphi'(t)$ 在某点 c 处取值为零, 即当 $t = c, c \in (a, b)$ 时, $\varphi'(t) = 0$. 把 $\varphi'(t)$ 写成展开的形式:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -f_n'(t, b) + \alpha H(b-t)^{\alpha-1}\\ &= -\left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(b-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(b-t)^n\right)_t' + \alpha H(b-t)^{\alpha-1},\end{aligned}$$

由于当 $s = 1, \cdots, n$ 时有

$$\left(\frac{f^{(s)}(t)}{s!}(b-t)^s\right)_t' = \frac{f^{(s+1)}(t)}{s!}(b-t)^s - \frac{f^{(s)}(t)}{(s-1)!}(b-t)^{s-1},$$

所以

$$\varphi'(t) = \alpha H(b-t)^{\alpha-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n.$$

由此, 当 $t = c$ 时得到

$$\varphi'(c) = \alpha H(b-c)^{\alpha-1} - f^{(n+1)}(c)\frac{(b-c)^n}{n!} = 0.$$

所以

$$H = \frac{n+1}{\alpha}(b-c)^{n+1-\alpha}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}. \quad ◄$$

推论 *带有施勒米希–劳思型余项的泰勒公式当 $a \geqslant b$ 时也成立.*

► 1. 若 $b = a$, 则 $f_n(a, b) = f(a), r_n(b) = 0$ 从而公式成立.

2. 若 $b < a$, 则使用定理于函数 $g(x) = f(2a - x), b_1 = 2a - b$. 那么 $b_1 > a$ 且成立等式

$$g(b_1) = g_n(a, b_1) + R_n(b_1).$$

但容易确认, $g(b_1) = f(b), g_n(a, b_1) = f_n(a, b), R_n(b_1) = r_n(b)$. 实际上

$$\begin{aligned}&(b_1 - a)^s = (a-b)^s = (-1)^s(b-a)^s; \quad 0 \leqslant s \leqslant n;\\ &g_n(a, b_1) = g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(b_1 - a) + \cdots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(b_1 - a)^n\\ &\qquad = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n = f_n(a, b).\end{aligned}$$

还有, 对于某 $c_1, a < c_1 < b_1$, 成立等式

$$R_n(b_1) = \frac{n+1}{\alpha}\left(\frac{b_1 - a}{b_1 - c_1}\right)^{\alpha}(b_1 - c_1)^{n+1}\frac{g^{(n+1)}(c_1)}{(n+1)!}.$$

置 $c = 2a - c_1$, 那么 $b < c < a$,

$$R_n(b_1) = \frac{n+1}{\alpha}\left(\frac{b-a}{b-c}\right)^{\alpha}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-c)^{n+1} = r_n(b).$$

于是, 带有施勒米希–劳思型余项的泰勒公式当 $a \geqslant b$ 时与当 $a < b$ 时具有相同的形式. ◀

泰勒公式的特殊情形

1. 拉格朗日型余项 $(\alpha = n+1)$. 此时

$$r_n(b) = \frac{n+1}{n+1}\left(\frac{b-a}{b-c}\right)^{n+1}(b-c)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

2. 柯西型余项 $(\alpha = 1)$:

$$r_n(b) = (n+1)\left(\frac{b-a}{b-c}\right)(b-c)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

$$c = a + \theta(b-a),\ 0 < \theta < 1,\ 1 - \theta = \frac{b-c}{b-a},$$

$$r_n(b) = (b-a)^{n+1}(1-\theta)^n\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(b-a))}{n!}.$$

注　1. 泰勒公式 (带任意型余项) 在 $a = 0$ 的特殊情形常叫作麦克劳林公式.

2. 将带一般型余项的泰勒公式与带佩亚诺型余项的泰勒公式进行比较, 我们看到在第一种情形我们有更精确的结果, 而做到这一点, 对于函数要有更严苛的要求. 果然, 在第一种情形, 在考察展开式的点的邻域内要求所给的函数具有 $n+1$ 阶导数, 而在第二种情形只要求具有 $n-1$ 阶导数, 就是说少两阶的导数.

第二十三讲

§13. 泰勒公式对于某些函数的应用

1. 指数函数: $f(x) = e^x$. 我们有

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1, f^{(n+1)}(x) = e^x.$$

带拉格朗日型余项的泰勒公式取如下形式:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

对于任何固定的 x, 式中的余项趋于零, 因为

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

2. 函数 $f(x) = \sin x$. 我们有

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$
$$f^{(2n+1)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = (-1)^n \cos \theta x.$$

带拉格朗日型余项的泰勒公式给出

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cos \theta x.$$

3. 函数 $f(x) = \cos x$. 我们有

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$
$$f^{(2k)}(\theta x) = \cos\left(\theta x + \frac{2k\pi}{2}\right) = (-1)^k \cos \theta x.$$

那么

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cos \theta x.$$

4. 函数 $f(x) = \ln(1+x)$. 我们有

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

因此,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n,$$
$$R_n = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1}.$$

我们发现, 若 $|x| < 1$, 则当 $n \to \infty$ 时 $R_n \to 0$. 此外:

a) 若 $0 < x < 1$, 则 $|R_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

b) 若 $-1 < -r \leqslant x < 0$, 则 $|R_n| \leqslant \dfrac{r^{n+1}}{n(1-r)}$, 其中

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{x^{n+1}}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

(柯西型余项).

5. 函数 $f(x) = (1+x)^\alpha$. 我们有

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

因此

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n,$$

其中

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta_1 x)^{\alpha-n-1}, \quad 0 < \theta_1 < 1$$

(拉格朗日型余项),

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta_2 x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta_2}{1+\theta_2 x}\right)^n, \quad 0 < \theta_2 < 1$$

(柯西型余项). 若 $|x| < 1$ 则当 $n \to \infty$ 时 $R_n \to 0$.

我们看到, 在所有这些情形, 当 $n \to \infty$ 时 $R_n \to 0$. 换言之,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0,x) = f(x).$$

这个极限表达式用如下记法写出:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

并称作**函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处的泰勒级数**.

我们发现, 对于一切 $n \in \mathbb{N}$, 对于级数的第 n 项成立等式

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \left.\frac{d^n f(x)}{n!}\right|_{\substack{x=a \\ \Delta x = x-a}}.$$

因此, 泰勒级数可改写成如下形式:

$$\Delta f = \frac{df}{1!} + \frac{d^2 f}{2!} + \cdots + \frac{d^n f}{n!} + \cdots.$$

这就确定了第十八讲 §4 中引入的等式的精确含义.

注 泰勒级数并不总是收敛到生成它的函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

那么对于任何自然数 k 都有 $f^{(k)}(0) = 0$.

于是我们看到, 泰勒级数是零, 而生成它的函数并不恒为零.

第二十四讲

§14. 借助于导数研究函数. 极值点. 凸性

我们的下一个目标是应用所建立的理论来解决与函数的性状的研究有关的问题. 问题之一是探求函数的局部的和总体的极值, 我们来回忆一些已经证明了的类似类型的结论并引入一些进一步需要的概念.

1. 使 $f'(x) = 0$ 的点 x 叫作稳定点.

2. 为使函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上不减, 必要且充分的是在 (a, b) 上 $f'(x) \geqslant 0$ (可微函数在区间 (a, b) 上广义增的准则).

3. 为使函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上严格增, 必要且充分的是在 (a, b) 上 $f'(x) \geqslant 0$ 且在每个区间 $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ 上 $f'(x) \not\equiv 0$ (严格增准则).

由此我们有: 为使 $f(x)$ 严格增, 只需对于一切 $x \in (a, b), f'(x) > 0$ (严格增的充分条件).

4. 若在点 $x_0 \in (a, b)$ 处取得非正常局部极值, 则 x_0 是稳定点 (费马定理).

下面我们引入几个使函数在给定点达到局部极值的充分条件.

定理 22 *设函数 $f(x)$ 在稳定点 x_0 (即在此点 $f'(x_0) = 0$) 的某邻域中可微, 那么*

1a) 若在 x_0 的左边 $f'(x) > 0$ 而在 x_0 的右边 $f'(x) < 0$, 则 x_0 是函数 $f(x)$ 的严格局部极大点;

1b) 若在 x_0 的左边 $f'(x) < 0$ 而在 x_0 的右边 $f'(x) > 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的严格局部极小点;

2. 若 $f'(x)$ 在点 x_0 的右边和左边有相同的符号, 则 x_0 既非广义的也非狭义 (即严格意义) 的极值点.

► 1a) 根据拉格朗日定理, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0),$$

其中 c 位于以 x_0 和 x 为端点的开区间之中.

根据条件, $f'(c)(x-x_0)<0$. 实际上, 若 $x-x_0>0$ 则 $c>x_0$, 于是 $f'(c)<0, (x-x_0)f'(c)<0$; 而若 $x-x_0<0$ 则 $f'(c)>0$ 且 $(x-x_0)f'(c)<0$. 由此得到 $f(x)<f(x_0)$, 而这就是要证的. 1b) 款之证明是类似的.

2. 若在 x_0 的右边和左边 $f'(x)>0$, 那么 $f'(c)(x-x_0)$ 在 x_0 左边小于零而在 x_0 右边大于零, 由此, 对于 $x_1<x_0<x_2$ 有 $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$, 这就是要证的. $f'(x)<0$ 的情形可类似地处理. ◄

上述定理给出了下述的在**稳定点处取极值的探查法则**:

若当从左到右通过稳定点时, 导数的符号由正变负, 则函数在此点有局部极大值, 而若符号由负变正, 则函数有局部极小, 若导数不变号, 则不存在极值.

定理 22′ *设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内连续而在此点的去心邻域中可微. 若当从左到右通过 x_0 时, $f'(x)$ 的符号由正变负, 则 $f(x)$ 在 x_0 达局部极大值, 由负变正, 则 $f(x)$ 在 x_0 达局部极小值, 若不变号, 则无极值.*

此定理之证明完全类似于定理 22 的证明, 因为彼处并未用到函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 存在导数的性质.

我们来叙述寻求 (局部的和总体的) 极值的一般法则. 这里假定函数在一个闭区间上连续且分段可微 (即去掉有限个点外处处可微):

求出所有的稳定点和导数不存在的点, 检验所有这些点的极值性质. 然后添上区间的端点, 并找出函数在这些点处的值中的最大者和最小者, 就得到函数的总体极值.

定理 23 (极值点的第二个充分条件) *设 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)$ 存在, 那么*

1) 若 $f''(x_0)<0$, 则 x_0 是 (严格) 局部极大点;

2) 若 $f''(x_0)>0$, 则 x_0 是 (严格) 局部极小点.

► 1. 由于 $f''(x_0)<0$, 所以 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处减, 而因 $f'(x_0)=0$, 故 $f'(x)$ 当 x 从左到右通过 x_0 时, 从正号变为负号, 因此, 根据定理 22, 点 x_0 是局部极大值点.

2. $f''(x_0)>0$, 故 $f'(x)$ 在点 x_0 处增. 那么从定理 22 推出, 点 x_0 是局部极小值点. ◄

定理 24 (极值点的第三个充分条件) *设*

$$f'(x_0)=\cdots=f^{(2k-1)}(x_0)=0,\quad f^{(2k)}(x_0)\neq 0.$$

那么

1) 若 $f^{(2k)}(x_0)<0$, 则 x_0 是局部极大值点;

2) 若 $f^{(2k)}(x_0)>0$, 则 x_0 是局部极小值点.

► 情形 1. 当 $k=1$ 时, 结论从定理 23 得出, 设 $k>1$, 按泰勒公式表出 $f'(x)$:

$$f'(x)=f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-3)!}(x-x_0)^{2k-3}$$
$$+\frac{f^{(2k-1)}(c)}{(2k-2)!}(x-x_0)^{2k-2}.$$

由此

$$f'(x)=\frac{f^{(2k-1)}(c)}{(2k-2)!}(x-x_0)^{2k-2}.$$

由于 $f^{(2k)}(x_0)<0$, 所以 $f^{(2k-1)}(x)$ 减, 从而 $f^{(2k-1)}(x)$ 当 x 从 x_0 通过时, 从正号变负号, 这表明 $f'(x)$ 从正号变负号. 所以 x_0 是局部极大值点. 情形 2 的讨论类似. ◄

定义 11 函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上叫作是上凸的, 如果它的图像位于它在该区间中每点处的切线的下方.

这就是说, 如果 x_0 是 (a,b) 中的任意一个固定的点且

$$f_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)+(x-x_0)$$

那么

$$f_1(x)\geqslant f(x)\quad \forall x\in(a,b).$$

我们说明, 线性函数 ① $f_1(x)$ 的图像是函数 $f(x)$ 的图像在点 x_0 处的切线.

定义 12 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上叫作是下凸的, 如果它的图像位于切线的上方, 即

$$f_1(x)\leqslant f(x)\quad \forall x\in(a,b).$$

定理 25 1) 若在 (a,b) 上 $f''(x)\leqslant 0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是上凸的.

2) 若在 (a,b) 上 $f''(x)\geqslant 0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是下凸的.

► 1) 从泰勒公式得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2,$$

其中 $c\in(a,b)$. 由于 $f''(x)\leqslant 0$, 所以 $\forall x\in(a,b) f(x)\leqslant f_1(x)$, 这就是要证的. 情形 2) 的讨论类似.. ◄

定理 25′ 若 $f''(x_0)<0$ 且 $f''(x)$ 在点 x_0 处连续, 则存在点 x_0 的 δ 邻域使 $f(x)$ 在此邻域上是上凸的.

①注意, 这里把 "线性函数" 等同于一次多项式 —— 译者注.

► 由于 $f''(x)$ 在点 x_0 处连续且 $f''(x_0)<0$, 所以存在数 $\delta>0$, 使在点 x_0 的 δ 邻域中 $f''(x)<0$. 于是根据定理 25, 函数 $f(x)$ 在此邻域上是上凸的. ◄

注 1. 若在定义 11 和定义 12 中成立严格的不等号, 则函数叫作是**严格凸的**. 在定理 25 和定理 25′ 中, 严格的不等号蕴含函数的严格凸性.

2. 函数 $f(x)$ 的凸性的定义, 等价在每点 $x=x_0$ 处

$$g(x)=g_{x_0}(x)=f(x)-f_1(x)$$

在点 x_0 处有局部极值. 此外, 在点 x_0 处成立条件

$$g(x_0)=0,\quad g'(x_0)=0,\quad g''(x_0)=f''(x_0).$$

因此, 使用关于函数 $g(x)$ 在点 x_0 处的极值的定理, 我们得到, 若 $f''(x_0)<0$ 则 $g(x)$ 在点 x_0 有局部极大值, 而当 $f''(x_0)>0$ 时在此点有局部极小值. 在第一种情形说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处严格上凸, 而在第二种情形则说严格下凸.

定理 26 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是凸函数, 且有一阶导数. 那么导数 $f'(x)$ 是此区间上的连续且单调的函数, 并且 $f(x)$ 的严格凸性蕴含 $f'(x)$ 的严格单调性. 这里上凸性对应于导数 $f'(x)$ 的减性, 下凸性对应于 $f'(x)$ 的增性.

► 我们只讨论函数是按照非严格意义下凸的这样一种情形. 在 (a,b) 中任取两点 $x_1<x_2$, 设 $y_1=f(x_1), y_2=f(x_2)$, 在平面坐标系中以弦联结点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2), 并记此弦之斜率 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 为 k_0. 过点 (x_1,y_1) 作函数 $y=f(x)$ 的图像的切线. 由于函数 $f(x)$ 下凸, 此切线位于图像的下方, 从而也位于与它有公共点 (x_1,y_1) 的弦的下方, 但这只可能发生于切线的斜率 $f'(x_1)$ 不超过弦的斜率 k_0, 即 $f'(x_1)\leqslant k_0$ 的情形.

关于点 (x_2,y_2) 作类似的讨论, 导致不等式 $k_0\leqslant f'(x_2)$, 由此, 得 $f'(x_1)\leqslant k_0\leqslant f'(x_2)$. 根据点 $x_1<x_2$ 的选取的任意性, 这就表明 $f'(x)$ 在 (a,b) 上不减.

现指出, 根据达布定理, $f'(x)$ 取遍其中间值, 而根据 $f'(x)$ 的单调性, 这就推出函数 $f'(x)$ 的连续性. 于是, 所讨论的情形已完全解决.

其他情形的讨论完全类似. ◄

注 从定义 11 和定义 12 推出, 联结函数图像上不同两点的弦, 对于上凸函数来说, 总在图像之下, 而对于下凸函数则总在其图像之上, 此性质常用来作为函数凸性 (对应地上凸或下凸) 的原始定义.

我们来更详细地考察凸函数的性质. 作为例子, 我们只考虑上凸函数. 借助于不等式来解析地写出上凸函数的凸性. 具有端点 $(x_1,y_1), y_1=f(x_1)$ 和 $(x_2,y_2), y_2=f(x_2)$ 的弦上的点 (x,y) 的坐标的值可写成

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,\quad y=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2,$$

其中 $\lambda_1>0, \lambda_2>0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$. 这里假定 x_1 和 x_2 属于 (a,b) 满足条件 $x_1<x_2$. 由于此时量 y 不能超过 $f(x)$, 上凸性条件得以下述关系式表出:

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\geqslant y=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2=\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2).$$

在这种情况下, 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续且有右导数和左导数. 下面我们来证明函数的连续性, 并且只限于考察右导数.

我们先证明函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 的任意一点 x_0 处的右连续性. 首先指出下述几何事实, 即任何与函数 $f(x)$ 的图像相交的直线, 或者交于某一直线段, 或者交于不多于两个点, 实际上, 如果存在三个这样的点 $A=(x_1,y_1), B=(x_2,y_2)$ 和 $C=(x_3,y_3), x_1<x_2<x_3$ 的话, 那么在区间 (x_1,x_2) 或在区间 (x_2,x_3) 中必存在点 x_4, 使得 $D=(x_4,f(x_4))$ 不在以 A 和 C 为端点的弦上. 然而那时, 如果 $x_4\in(x_1,x_2)$ 的话, 则点 D 必位于弦 AB 之上, 而弦 DC 将位于点 B 之上方, 这与函数 $f(x)$ 的上凸性抵触. 而若 x_4 位于区间 (x_2,x_3) 内, 则弦 AD 必从点 B 之上方通过.

由此推出, 若点 $x_5\in(a,b)$ 位于点 x_0 的左边, 那么函数 $f(x)$ 的图像对应于点 $x>x_0$ 的那部分必位于联结点 $(x_5,f(x_5))$ 和 $(x_0,f(x_0))$ 的弦 l_1 的延长线的下方. 这表明, 如果 k_1 是弦 l_1 的斜率, 则对于一切 $x>x_0$ 有 $\Delta f(x_0)\leqslant k_1\Delta x$, 其中 $\Delta x=x-x_0$. 因此, 我们断定当 $\Delta x\to 0+$ 时 $\Delta f(x_0)=O(\Delta x)\to 0$, 这表明函数 $f(x)$ 在点 $x_0\in(a,b)$ 处右连续, 类似地可证函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续, 于是在区间 (a,b) 的所有的点处, 此函数都是连续的.

当转向证明 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有右导数时, 我们指出, 对于任何点 x_6 和 x_7, 只要满足 $x_0<x_6<x_7$, 联结点 $(x_0,f(x_0))$ 和 $(x_6,f(x_6))$ 的弦就一定不会位于联结点 $(x_0,f(x_0))$ 和点 $(x_7,f(x_7))$ 的弦的下方, 因此, 对于这两条弦的斜率 k_6 和 k_7 成立不等式 $k_6\geqslant k_7$, 即

$$k_6=\left.\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\right|_{\Delta x=x_6-x_0}\geqslant\left.\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\right|_{\Delta x=x_7-x_0}=k_7.$$

于是, 当差量 Δx 从右方单调趋于零时, 比值 $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ 是不减的. 另一方面, 这个比值是以量 k_1 为界的, 这里 k_1 是上面在证明 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的连续性时所考察过的量. 因此, 根据单调函数的性质, 比值的极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ 存在, 它依定义乃是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数. 左导数的情形类似.

于是, 我们证明了, 对于上凸函数, 在闭区间 $[a,b]$ 的每个内点处都存在右导数和左导数, 虽然它们不必相等.

另一方面, 我们证明了函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数不超过斜率 k_1. 而当 $x_5\to x_0$ 时量 k_1 的极限是函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的左导数 $f'(x_0-)$, 由此推出, 在开区间的任何一点处, 右导数不超过左导数, 而若考察两个不同的点 $x_0<x_1$, 那么联结 $(x_0,f(x_0))$ 和 $(x_1,f(x_1))$ 的弦的斜率 k 把在点 x_0 处的右导数 $f'(x_0+)$ 的值和在点 x_1 处的左导数 $f'(x_1-)$ 的值 "分开", 即

$$f'(x_0+)\geqslant k\geqslant f'(x_1-)\geqslant f'(x_1+).$$

由此推出, $f'(x+)$ 在区间 (a,b) 上不增. 对于左导数有同样的结论. 由于这两个函数都是单调的, 它们中的每个都具有不多于可数多个的第一类的间断点. (a,b) 区间的其他的点都是这两个函数的连续点. 根据最后的不等式, 在这样的点处, 两函数的值相等, 而此时函数 $f(x)$ 有常义的导数

$$f'(x_0)=f'(x_0+)=f'(x_0-),$$

此常义导数同样是在该点处连续的, 非增的函数.

此外, 根据第一类间断点的性质, 在这样的点处对于 $f'(x+)$ 和 $f'(x-)$ 都有右极限和左极限, 且这些极限分别与该点处的右导数和左导数重合. 其实, 对于上凸函数, 右导数在每一点都右连续, 而左导数则左连续, 我们还是只考察函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数, 根据定义, 它等于当点 x 从右边趋于 x_0 时联结点 $(x_0, f(x_0))$ 和 $(x, f(x))$ 的弦的斜率 k 的值的极限. 我们指出, 随着 x 的减小, 量 k 不减. 如果 $x_0 < x_1 < x$, 则通过点 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x, f(x))$ 的弦的斜率不超过 $f'(x_1+)$. 而量 k_1 当 $x_1 \to x$ 时趋于 k. 因此, 函数 $f'(x_1+)$ 当 $x_1 \to x_0+$ 时的极限 l 不小于 k, 即 $l \geqslant k$. 由此推出

$$l \geqslant \lim_{x \to x_0+} k = f'(x_0+),$$

然而由于 $f'(x+)$ 不增, 总有 $l \leqslant f'(x_0+)$, 所以 $l = f'(x_0+)$, 这表明函数 $f'(x+)$ 在点 x_0 处右连续.

第二十五讲

§15. 拐点

定义 13 区间 (a, b) 中的点 x_0 叫作是可微函数 $f(x)$ (或它的图像) 的拐点, 如果存在点 x_0 的去心邻域, 使得在它的右半邻域中和左半邻域中函数 $f(x)$ 分别都有凸的图像但两边凸性的方向相反.

定理 27 (拐点的必要条件) 若函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处有二阶导数且点 x_0 是拐点, 则

$$f''(x_0) = 0.$$

► 根据条件在点 x_0 处存在二阶导数 $f''(x_0)$, 因此 $f'(x)$ 在该点连续, 为确定起见, 我们认为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右半邻域内上凸, 而在左半邻域内下凸, 那么根据 §14 定理 26, 导数 $f'(x)$ 在点 x_0 右边不增, 而在它左边不减, 这表明它在点 x_0 有局部极小值, 使用费马原理, 由此断言

$$(f'(x))'_{x=x_0} = f''(x_0) = 0. \quad ◄$$

往下仅在严格的意义谈论拐点, 就是说在拐点的定义中在两个半邻域中皆成立严格的凸性.

定理 28 (严格拐点的第一个充分条件) 设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的去心邻域中二次可微且当 $x < x_0$ 和当 $x > x_0$ 时 $f''(x)$ 有相异的符号, 那么, 若 $f''(x_0) = 0$ 或者 $f''(x_0)$ 不存在则 x_0 是函数 $f(x)$ 的图像的严格拐点. ①

① 只要 f 在点 x_0 处有一阶导数, 条件 "若 $f''(x_0) = 0$ 或 ……" 是多余的 —— 译者注.

► 由于 $f''(x)$ 在 $x<x_0$ 和 $x>x_0$ 分别保持相反的符号, 所以 $f(x)$ 在这两部分有方向相反的严格凸性, 依定义,x_0 是严格拐点. ◄

此定理可叙述为: 若 $f''(x_0)=0$ 且 $f''(x)$ 在点 x_0 处严格增, 则 x_0 是严格拐点 (当 $f''(x_0)=0$ 且 $f''(x)$ 在点 x_0 严格减时有同样的结论).[①]

定理 29 (严格拐点的第二个充分条件) *设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上二次可微, $f''(x_0)=0$ 且存在 $f^{(3)}(x_0)\neq 0$. 则 x_0 是严格拐点.*

► 由于 $f^{(3)}(x_0)\neq 0$, 那么或者 $f^{(3)}(x_0)>0$ 或者 $f^{(3)}(x_0)<0$. 在第一种情况, $f''(x)$ 在点 x_0 处严格增, 而在第二种情况 $f''(x)$ 在此点处严格减, 所以, 从定理 28 推出, 在两种情况下,x_0 都是严格拐点. ◄

定理 30 (严格拐点的第三个充分条件) *设 $x_0\in(a,b)$ 且设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $2k$ 次可微. 设存在 $f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0$ 且 $f^{(2)}(x_0)=f^{(3)}(x_0)=\cdots=f^{(2k)}(x_0)=0$. 那么 x_0 是严格拐点.*

► 我们指出, 根据条件 $f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0$, x_0 是 $f^{(2k)}(x)$ 的增点或减点, 考察点 x_0 的去心 δ 邻域 U, $f^{(2k)}(x)$ 在 U 中当 x 通过 x_0 时改变符号且在 x_0 的两个左右半邻域中分别保持不变号.

下面可认为 $k\geqslant 2$, 因为 $k=1$ 时定理 30 从定理 29 推出设 $x\in U$. 根据泰勒公式, 有

$$
\begin{aligned}
f^{(2)}(x)&=f^{(2)}(x_0)+\cdots+\frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-3)!}(x-x_0)^{2k-3}+\frac{f^{(2k)}(c)}{(2k-2)!}(x-x_0)^{2k-2}\\
&=\frac{f^{(2k)}(c)}{(2k-2)!}(x-x_0)^{2k-2},
\end{aligned}
$$

其中 $c=c(x)\in U$ 且 $(x-x_0)(c-x_0)>0$. 但 $(x-x_0)^{2k-2}$ 对于 $x\in U$ 不变号, 而 $f^{(2k)}(c)$ 变号. 因此 $f^{(2)}(x)$ 变号, 所以根据定理 28, 点 x_0 是严格拐点. ◄

例 1. $y=x^3$: 点 $x=0$ 是 (严格) 拐点.

2. $y=x^{2k+1}$: 点 $x=0$ 是 (严格) 拐点.

定义 14 *平面 xOy 中的直线 $x=a$ 叫作函数 $f(x)$ 的竖直渐近线, 如果极限 $\lim\limits_{x\to a-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$ 中的一个等于 $\pm\infty$.*

例 $y=\dfrac{1}{x}$. 这里直线 $x=0$ 就是竖直渐近线.

定义 15 *直线 $y=kx+b$ 叫作函数 $f(x)$ (确言之, 是函数 $y=f(x)$ 的图像) 当 $x\to+\infty$ 时的斜渐近线, 如果当 $x\to+\infty$ 时*

$$\alpha(x)=f(x)-kx-b\to 0.$$

[①] 定理 28 蕴含这个说法, 但反之不真 —— 译者注.

当 $x \to -\infty$ 时的斜渐近线类似地定义.

定理 31 为使函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时存在斜渐近线 $y = kx + b$, 必要且充分的是当 $x \to +\infty$ 时下述条件 (同时) 成立:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k, \quad k \in \mathbb{R}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b, \quad b \in \mathbb{R}$.

► 必要性 设 $y = kx + b$ 是渐近线, 那么,

$$\text{当 } x \to +\infty \text{ 时} \quad \alpha(x) = f(x) - kx - b \to 0.$$

因此

$$\frac{f(x) - kx - b}{x} \to 0 \quad \text{当 } x \to +\infty,$$

由此推出

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

还有

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} [(f(x) - kx - b) + b] = b.$$

定理的第一部分获证.

充分性 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$ 所以

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0.$$

定理完全证实. ◄

如果对于函数 $f(x)$, 定理 31 的条件 1 成立, 则说直线 $y = kx$ 给出了**渐近方向**.

我们引入一个当函数由隐式给出时求斜渐近线的例子.

例 考察曲线方程

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

将其参数化, 置 $y = tx$, 那么得到

$$x^3(1 + t^3) - 3ax^2t = 0,$$

$$1 + t^3 - \frac{3at}{x} = 0, \quad x = \frac{3at}{1 + t^3}.$$

由此得知, $\dfrac{y}{x} = t = t(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时是有界量, 且 $t(x) \to -1$. 因此, $t = -1$ 即直线 $y = -x$ 给出了渐近方向. 现在来求渐近线方程 $y = -x + b$ 中参数 b 的值. 我们有

$$y = -x + b + o(1),$$

$$x^3 + (-x + b)^3 - 3ax(-x + b) = o(x^2),$$

由此

$$3x^2(b+a)+3x(ab-b^2)+b^3=o(x^2),$$
$$b+a+\frac{ab-b^2}{x}+\frac{b^3}{3x^2}=o(1).$$

在最后的等式中过渡到极限 $x\to\infty$ 得到 $b+a=0$, 由此 $b=-a$, 所以待求的当 $x\to\infty$ 时的渐近线的方程是 $y=-x-a$.

边界极值 设函数定义在闭区间 $[a,b]$ 上.

定义 16 点 a 叫作边界局部极大值 (极小值) 点, 如果存在开区间 $(a,a+\delta)\subset[a,b]$, 使得对于它的每点 x 都成立不等式 $f(a)>f(x)$ (对应地, $f(x)>f(a)$).

当 $f(a)\geqslant f(x)$ 时, 成立非正常 (局部) 极大; 当 $f(a)\leqslant f(x)$ 则成立非正常 (局部) 极小.

对于点 b 可作同样的定义, 只需把区间 $(a,a+\delta)$ 换为 $(b-\delta,b)$.

边界极大和边界极小都叫作边界极值.

引理 1 为使在点 a(或 b) 处有 (正常) 边界极值, 充分的条件是在此点处函数 $f(x)$ 有异于零的单侧导数.

► 证明与达布引理的证明类似.

例如, 若当 $x\in(a,a+\delta)$ 时 $f'(x)>0$, 则 a 是边界极小值点, 因为对于 $x\in(a,a+\delta)$ 存在 $c\in(a,a+\delta)$ 使得 $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)>0$, 从而 $f(x)>f(a)$. ◄

构作函数 $f(x)$ 的图像的一般方案

1. 找出函数 $f(x)$ 的定义域.

2. 考查函数的特性 (奇偶性, 周期性, 变号性). 找出图像与坐标轴的交点.

3. 指出函数在定义域的边界处的值以及在间断点处的值. 找出竖直渐近线.

4. 找出斜渐近线.

5. 确定单调性区间, 确定局部极值和边界极值.

6. 找出凸性区段以及拐点.

7. 在函数图像的构作中反映出所列出的它的特征.

第二十六讲

§16. 插值

插值或插值法的目的是根据函数及其导数在定义域内的某些给定的点处的已知的值来近似求出此函数. 这个问题是完全确定的, 如果函数的形式已给定, 且未知参数的数目不超过给定的函数值及其导数的值的数目的话. 譬如说, n 阶多项式有 $n+1$ 个参数 (它的系数), 就可以根据它在 $n+1$ 个不同的点处的值来确定.

设在点 $x_1,\cdots,x_n$ 处多项式 $P(x)$ 相应地取值 $f(x_1),\cdots,f(x_n)$.

定理 32 *存在唯一的 $n-1$ 阶多项式 $P(x)$, 使得 $P(x_k)=f(x_k), k=1,\cdots,n$.*

► 我们有

$$Q_k(x)=\begin{cases}1, 若\ x=x_k,\\ 0, 若\ x=x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n,\end{cases}$$

其中

$$Q_k(x)=\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

那么 $P(x)$ 可写成

$$P(x)=f(x_1)Q_1(x)+\cdots+f(x_n)Q_n(x).$$

我们来证明多项式 $P(x)$ 是唯一的. 实际上, 假定还存在一个具有上述性质的多项式 $Q(x)$. 那么 $Q(x_k)=f(x_k), k=1,\cdots,n$. 由此得到 $n-1$ 阶多项式 $F(x)=P(x)-Q(x)$ 有 n 个根, 即 $F(x_k)=0, k=1,\cdots,n$, 因此 $F(x)\equiv 0$, 即多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 恒等. ◄

给出多项式 $P(x)$ 的公式叫作**拉格朗日插值公式**. 这里, 点 $x_1,\cdots,x_n$ 叫作**插值节点**.

设 $f(x)$ 是某个函数. 用 $P_k(x)$ 代表在点 $x_1,\cdots,x_k$ 处取值 $f(x_1),\cdots,f(x_k)$ 的 $k-1$ 阶多项式. 那么插值公式可以写成

$$P(x)=P_1(x)+\sum_{k=2}^{n}(P_k(x)-P_{k-1}(x))=P_n(x).$$

根据定义 $k-1$ 阶多项式 $P_k(x)-P_{k-1}(x)$ 在点 $x_1,\cdots,x_{k-1}$ 处取值为零. 因此它等于 $A_k(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$. 系数 A_k 与多项式 $P_k(x)$ 的最高次系数重合且根

据拉格朗日插值公式, 它等于

$$A_k = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_k)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_k)} + \cdots + \frac{f(x_k)}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})}.$$

这样一来, 系数 A_k 是 $x_1, \cdots, x_k$ 的某个函数, 把它记作 $A_k = f_k(x_1, \cdots, x_k)$, 那么插值多项式 $P(x)$ 可写成

$$P(x) = f_1(x_1) + (x - x_1)f_2(x_1, x_2) + \cdots + (x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f_n(x_1, \cdots, x_n),$$

其中, 置 $x = x_1$ 显然有 $P(x_1) = f(x_1) = f_1(x_1)$. 这个公式叫作**牛顿 (Newton) 插值公式**. 函数 $f_k(x_1, \cdots, x_k), k = 1, \cdots, n$, 叫作**插值函数**.

在牛顿插值公式中令 $x = x_n$ 得

$$f(x_n) = P(x_n) = f(x_1) + (x_n - x_1)f_2(x_1, x_2) + \cdots + (x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1})f_n(x_1, \cdots, x_n).$$

这里插值节点 x_n 是一个任意的数, 因此把 x_n 换成 x, 我们得到

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f_2(x_1, x_2) + \cdots + (x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f_n(x_1, \cdots, x).$$

把插值节点去掉一个点 x_{n-1}, 对于插值节点 $x_1, \cdots, x_{n-2}$ 写出这个公式, 并从上式中减掉所得的恒等式, 于是得到

$$f_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, x) = \frac{f_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-2}, x) - f_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1})}{x - x_{n-1}}.$$

这样一来, 对于 $n = 2, 3, \cdots$ 成立关系式

$$f_2(x_1, x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad f_3(x_1, x_2, x) = \frac{f_2(x_1, x) - f_2(x_1, x_2)}{x - x_2}, \cdots,$$

这些关系式使得可借助简单的算法计算出插值函数. 为了确定 $n-1$ 阶牛顿插值多项式的全部系数, 只要计算插值函数在 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个点 (重数计算在内) 处的值, 这里本质的事情是, 每当增加一个新的插值点时, 先前算出的插值函数依然保留, 且仅需对它们添加插值函数在该点处的值.

定理 33 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有 n 阶导数, $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$. 那么成立公式

$$f(b) = P_n(b) + R(b)$$

其中 $R(b)=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-x_1)\cdots(b-x_n)$, 且 c 是属于 (a,b) 的某个点.

► 考虑辅助函数

$$g(x)=f(x)-P_n(x)-(x-x_1)\cdots(x-x_n)H,$$

其中 H 是某个数, 其值待定, 我们有

$$g(x_1)=\cdots=g(x_n)=0.$$

我们从关系式 $g(b)=0$ 来求量 H. 由此, 使用罗尔定理 n 次, 得知存在数 $c\in(a,b)$ 使 $g^{(n)}(c)=0$, 由此

$$f^{(n)}(c)-n!H=0.$$

所以

$$H=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}. \quad ◄$$

第二十七讲

§17. 割线法和切线法 (牛顿法). 快速计算

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可微, 那么函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 于是根据柯西关于中间值的定理, 对于任何介于数 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的 $\alpha\in\mathbb{R}$, 在闭区间 $[a,b]$ 内部存在点 c , 使得 $f(c)=\alpha$. 无论在理论意义上还是在实践意义上, 计算数 c 的达到预先给定的精确度的近似值都是一个自然而重要的问题, 例如, 可以提出这样的问题, 求方程 $x^2=2$ 的根, 精确到小数点后第十位, 也就是说, 求出 $\sqrt{2}$ 的近似值 c_0, 使得成立不等式 $|\sqrt{2}-c_0|<10^{-10}$, 及诸如此类的问题.

我们来考察求这样的近似值的两个自然的方法, 即: 割线法和切线法. 切线法也叫作牛顿法, 因为牛顿第一个使用了这种方法. 这些方法之重要, 不仅是由于它们自身的意义, 而且也是由于它们是许多应用于复杂得多的情形的计算程序的最简单的模型. 两个方法都是迭代式的, 即它们由顺次计算某些数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 作成. 这里, 当 $n\to\infty$ 时, 差 $|c-x_n|\to 0$, 因而从某个号码 n_0 开始, 它变得小于预先给定的值, 这个值叫作*给定精度*或*计算误差*.

割线法 我们确定 x_1 为水平直线 $y=\alpha$ 与函数图像的 "弦" 的交点的横坐标, 此弦即联结点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的线段, 用 I_0 代表闭区间 $[a,b]$. 令 $A=f(a)$ 和

$B = f(b)$, 从对应的三角形的相似性出发, 我们对于所求的量 x_1 有方程:

$$\frac{\alpha - A}{x_1 - a} = \frac{B - \alpha}{b - x_1} = \frac{\alpha - B}{x_1 - b}.$$

由此求得

$$x_1(\alpha - A) - b(\alpha - A) = x_1(\alpha - B) - a(\alpha - B), \quad x_1 = \frac{-a(\alpha - B) + b(\alpha - A)}{B - A}.$$

然后, 选取闭区间 $[a, x_1]$ 和 $[x_1, b]$ 之中的一个作 I_1, 使数 α 仍在它的两端点处的值之间, 即在 I_1 的端点处 $f(x) - \alpha$ 有相异的符号. 按照同样的原则选取 I_2, 并依此类推. 我们得到一个嵌套闭区间组: $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$. 如所周知, 这组区间含有公共点 c.

如果, 譬如说 $f'(x) \geqslant 0$ 则 $f(x)$ 不减, 从而由 $f(x)$ 的连续性推出 $f(c) = \alpha$, 因为在每个闭区间 I_n 的两端函数 $g(x) = f(x) - \alpha$ 都取异号的值.

切线法 这个方法如下作成. 为简单起见设 $\alpha = 0$. (如果不是这样, 则代替方程 $f(x) = \alpha$ 而考虑方程 $g(x) = 0$, 其中 $g(x) = f(x) - \alpha$.) 值 x_1 由关系式

$$\frac{f(b)}{b - x_1} = f'(b), \quad \text{即} \quad x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

来确定, 对于 $n \geqslant 1$ 有

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

在两种方法中, 还应该会确定何时终止计算过程. 为了简化此问题的求解并减少计算量, 人们使用下述的组合的方法.

割切线法 此方法的实质是寻找遵从条件 $x_n \leqslant c \leqslant y_n$ 的点对 x_n, y_n. 计算 x_n 和 y_n 的值的程序是这样的. 设在 $I_0 = [a, b]$ 上 $f''(x) > 0$. 用割线法确定 x_1, 而用切线法确定 y_1. 那么 $x_1 < c < y_1$, 接着把 $[x_1, y_1]$ 取作 I_1. 同样用割线法确定 x_2, 而用切线法确定 y_2, 得闭区间 $I_2 = [x_2, y_2]$, 依此类推. 一旦出现 $|x_n - y_n| < \delta$, 到此计算 c 的过程就达到精度 δ 而终止.

例 设 $f(x) = x^2 - a, \alpha = 0, a = 2$. 应用切线法, 为确定起见令 $x_0 = 1$. 值 x_{n+1} 由下面的公式求出:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

为了弄清这个计算程序收敛得多快, 我们来估计第 $n+1$ 步的误差. 为此, 用 r_n 表示量 $r_n = |\sqrt{a} - x_n|$. 那么

$$r_n^2 = (\sqrt{a} - x_n)^2 = a - 2x_n\sqrt{a} + x_n^2,$$

由此

$$\frac{r_n^2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} + x_n\right) - \sqrt{a} = r_{n+1}.$$

从不等式 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ 得知当 $n \geqslant 1$ 时

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{a},$$

因此, 由于 $a = 2$,

$$r_{n+1} \leqslant \frac{r_n^2}{2\sqrt{a}} < \frac{1}{2}r_n^2.$$

由此可断定, 如果 x_n 近似 $\sqrt{a}$ 精确到小数点后第 k 位, 即 $r_n \leqslant 10^{-k}$, 则 x_{n+1} 近似 $\sqrt{a}$ 已精确到第 $2k$ 位, 即 $r_{n+1} \leqslant 10^{-2k}$. 例如, 若取 1.4 为 x_0, 周知它近似 $\sqrt{2}$ 精确到小数点后第一位, 即 $|\sqrt{2} - 1.4| \leqslant 10^{-1}$, 那么得到 $r_1 < 10^{-2}, r_2 < 10^{-4}, \cdots, r_n < 10^{-2^n} \cdots$. 我们看到, 在第 n 步时, 精确度由小数点后不少于 k 位的数给出, 此处 $k = 2^n$. 于是为计算 $\sqrt{2}$ 精确到小数点后第 k 位, 只要完成 n 次迭代就可以了, 此处 $n = [\log_2 k] + 1$.

对于牛顿方法的这种类型的估计, 在求解方程 $f(x) = 0$ 的一般情况下也是成立的, 如果初始近似值取得足够 "好" 的话. 此断言之证明基于应用展开至第二项的泰勒公式.

要注意以下事实: 在估计数值算法的有效性时, 应该不仅注意到迭代的数量, 而且也要注意到在每次迭代时进行的算术运算的数目. 例如, 在计算 $\sqrt{a}$ 时, 每次迭代中进行的算术运算数目等于 3: 一个除法, 一个加法以及一个乘法, 因此, 为计算 $\sqrt{a}$ 精确到小数点后第 k 位, 应完成 $3[\log_2 k] + 3$ 次算术运算. 但这还不是全部, 首先应该注意到, 不必在迭代之初计算小数点后全部 k 位的值, 因为近似精度并不因此而提高; 其次, 竖式除法比乘以一个数困难得多, 而乘法又比加法困难.

我们还指出, 牛顿法提供了用乘法代替除法的可能性. 实际上, 例如 $f(x) = \frac{1}{x} - \alpha, x_0 = 1$. 那么

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - \alpha}{-\frac{1}{x_n^2}} = 2x_n - \alpha x_n^2.$$

和以前一样, 我们有

$$r_n = \left|\frac{1}{\alpha} - x_n\right|, \quad r_n^2 = \frac{1}{\alpha^2} - 2\frac{x_n}{\alpha} + x_n^2,$$

$$\alpha r_n^2 = \frac{1}{\alpha} - (2x_n - \alpha x_n^2) = r_{n+1}.$$

现在, 例如当 $\alpha < 1$ 且 $r_0 < 10^{-1}$ 时, 对于使计算精确到小数点后第 k 位的 (迭代次数) n 的值, 我们有: $n \leqslant [\log_2 k] + 1$.

对于数值算法的有效性问题的研究的更为精密的途径是考虑关于表示数的各位数字进行的运算, 那么可以说, 例如两个 n 位数字的自然数的加法需要进行不多于 $3n$ 次的运算, 而 "学校" 方式的数字竖式乘法需要 n^2 次分级相乘和 n^2 次加法. 因此, 两个 n 位数字的自然数的相乘运算速度为 $O(n^2)$, 好像是很自然的. 在 20 世纪 50 年代, A. H. 柯尔莫戈洛夫院士提出证明这个初看是正确的结论的问题. 但事情并非如此.

在 1961 年, A. A. 卡拉促巴证明了一个出色的定理, 在计算数学领域开辟了一个全新的方向 —— 快速计算理论. 他证明了两个 n 位数相乘可以经 $O(n^{\log_2 3})$ 次运算实现, 而不是 $O(n^2)$ 次.

定理 34 (A. A. 卡拉促巴定理) *存在一个算法, 使得经 $O(n^{\log_2 3})$ 次运算完成两个 n 位数字的乘法.*

► 用二进制表示数: $a = \bar{a}_n \cdots \bar{a}_1, b = \bar{b}_n \cdots \bar{b}_1$. 我们注意到

$$ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2].$$

一个数除以 4 只需把它向右退两位, 这只需 $O(n)$ 次运算. 于是只要证明进行 n 次数字的平方需要 $O(n^{\log_2 3})$ 次运算就可以了. 用归纳法来证. 为简单起见, 设 $n = 2^k$ 并设

$$a = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \alpha + \beta,$$

其中 α 和 β 是 $\frac{n}{2}$ 位数. 那么成立恒等式

$$a^2 = \alpha^2(2^n - 2^{\frac{n}{2}}) + (\alpha+\beta)^2 2^{\frac{n}{2}} - \beta^2(2^{\frac{n}{2}} - 1).$$

若记完成 n 位数的平方的运算数目为 $K(n)$, 则

$$\begin{aligned}
&K(n) \leqslant 3K\left(\frac{n}{2}\right) + cn\\
&K\left(\frac{n}{2}\right) \leqslant 3K\left(\frac{n}{4}\right) + c\frac{n}{2},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&K(2) \leqslant 3K(1) + c,\\
&K(n) \leqslant 3^k + c\left(n + \frac{3n}{2} + \frac{3^2 n}{4} + \cdots + 3^k\right),
\end{aligned}$$

其中 $k = \log_2 n$. 由此得

$$K(n) \leqslant 3^k(3c+1). \quad ◄$$

最后，我们来指出作为许多迭代数值计算算法的基础的共同的思路. 设要寻求函数在点 x_0 处的值，即计算 $f_0 = f(x_0)$. 用 f_n 来代表对 f_0 精确到 Δ_n (到小数点后 n 位) 的近似值:

$$\Delta_n = |f_n - f_0|.$$

假定已知一个具有以下性质的函数 $G(x)$:

$$G(f_0) = f_0, \quad G'(x)|_{x=f_0} = 0.$$

那么

$$G(f_n) = G(f_0) + G'(f_0)(f_n - f_0) + \frac{G''(\xi)}{2}(f_n - f_0)^2,$$

由此推出 $|f_0 - G(f_n)| \leqslant c\Delta_n^2$, 其中 $c = \max \frac{|G''(\xi)|}{2}$. 现在令 $f_{n+1} = G(f_n)$, 我们得到对 f_0 的精确到小数点后 $2n$ 位的近似值. 据此我们得到对于近似计算 f_0 的值的快速收敛算法. 我们发现，前面考察的计算数 x_0 的平方根的算法乃是当 $f(x_0) = \sqrt{x_0}$ 和 $G(f_n) = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{x_0}{f_n}\right)$ 时的特殊情形.

第六章　不定积分

第二十八讲

§1. 真实原函数. 可积函数

定义 1　函数 $F(x)$ 叫作函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上的真实原函数, 如果对于任意的 $x \in (a,b)$ 都有 $F'(x) = f(x)$, 即在区间 (a,b) 的每点 x 处, 函数 $f(x)$ 的值都是函数 $F(x)$ 的导数.

定理 1　设 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上且 $F_1(x), F_2(x)$ 是它的两个真实原函数. 那么存在数 $c \in \mathbb{R}$, 使得对于一切 $x \in (a,b)$

$$F_1(x) - F_2(x) = c.$$

► 设函数

$$G(x) = F_1(x) - F_2(x).$$

那么 $G(x)$ 是可微函数且在 (a,b) 上处处有

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0.$$

置 $x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$. 那么根据拉格朗日有限增量公式有

$$G(x) - G(x_0) = G'(\xi)(x - x_0) = 0$$

即

$$G(x) = G(x_0) \quad \forall x \in (a, b).$$

然而, 置 $c = G(x_0)$, 我们得到 $G(x) = c$ 对于区间 (a, b) 的一切点 x 成立. ◄

注 从定理 1 推出这样的结论: 任何两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 相差一个常数当且仅当它们的导数重合, 即 $F' = f = g = G'$. 早先曾指出, 远非一切定义在某区间 (a, b) 上的函数都有导数.

对于原函数, 也有类似的情形, 即并非一切函数都有原函数. 但若定义在 (a, b) 上的函数 $f(x)$ 有原函数, 则它叫作是**可积的**.

在转向研究可积函数类之前, 我们先对真实原函数的概念作些推广.

定义 2 *连续函数 $F(x)$ 叫作是函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的原函数, 如果在此区间的除去有限个点外的每点处都成立等式 $F'(x) = f(x)$.*

定理 2 *设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的原函数. 那么存在数 c 使得在此区间的每点都成立*

$$F_1(x) - F_2(x) = c.$$

► 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是使 $F_1'(x)$ 或 $F_2'(x)$ 不存在的点的有限集合. 那么集合 (a, b) 被分解成有限个开区间 I_k, 在这些开区间上两函数都有导数. 因此, 根据定理 1, 它们的差在每个这样的开区间上都是常数. 此外, 这个差在整个定义域上是连续函数. 由此推出, 在任何两个邻接的区间的公共边界点处, 它的值等于右极限和左极限. 这些值就该与它在相邻区间内的值重合. 而这表明, 函数在相邻区间上包括在它们的公共边界处取常数值. 因此, 它在整个区间 (a, b) 上是常数. ◄

定义 3 *某个函数 $f(x)$ 在开区间上的全体原函数所成的集合叫作 $f(x)$ 的不定积分. 这个集合记作 $\int f(x)dx$ (读作: $f(x)dx$ 的积分).*

从定理 2 推出, 这个集合中的所有函数彼此相差一个常数. 因此, 若 $F(x)$ 是某个原函数, 则可写出等式

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \tag{1}$$

其中 c 是任意常数. 这个等式应该理解作由定义在 (a, b) 上的函数组成的两个集合的等式, 且左边是生成 $f(x)$ 的不定积分的集合, 而右边是与函数 $F(x)$ 相差一个在此区间的每点 x 都取值 c 的函数的全体函数的集合.

例 **1.** $\int 1 \cdot dx = x + c$, 因为 $x' = 1$.

2. $\int 0 \cdot dx = c$

3. $\int \cos x dx = \sin x + c$, 因为 $(\sin x)' = \cos x$.

为了证明这些等式, 应该对右边部分求导数并确认其导数等于左边写在符号 $\int$ 和符号 dx 之间的函数. 此函数叫作**被积函数**. 符号 $\int$ 叫作**积分号**, 而写在它右边的表达式叫作**积分表达式**.

易见, 被积表达式不是别的, 恰是 $f(x)$ 的原函数的微分. 实际上, 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 即 $F'(x) = f(x)$, 则根据微分的定义 $dF(x) = f(x)dx$. 而由于

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad d(F(x) + c) = dF(x), \tag{1}$$

所以可以写出等式

$$\int dF(x) = F(x) + c, \quad d\left(\int f(x)dx\right) = dF(x) = f(x)dx, \tag{2}$$

并且最后的关系式中的等号指的是集合 $\int f(x)dx$ 中的全体函数都有同一个微分 $dF(x)$. 同样我们有

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \tag{3}$$

定义 4 *求给定在区间 (a, b) 上的函数 $f(x)$ 的不定积分叫作积分此函数. 求不定积分的问题本身可以看作是求函数的微分的问题的逆.*

第二十九讲

§2. 不定积分的性质

从函数的微分法则和定理 2 推出不定积分的一系列性质. 我们引入一些由等式给出的性质, 其证明借助于对等式两边求导. 首先证明真实原函数的等式

$$\int f(x)dx = \int g(x)dx \tag{4}$$

等价于以下四式之一:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(\int g(x)dx\right)';$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(\int g(x)dx\right)$$

$$f(x) = g(x);$$

$$f(x)dx = g(x)dx,$$

这些式子都对一切 $x \in (a, b)$ 成立.

事实上, 根据前面引入的性质 (1)—(3) (见第二十八讲), 这些等式的确是等价的. 而等式 (4) 仅表示函数 f 和 g 的任何两个原函数 F, G 彼此仅差一常数. 面根据定理 1 的注, 为此必须且只需 $f = g$.

注　性质 (4) 给出了两个不定积分相等的准则: 它们重合当且仅当它们的导数或微分重合. 我们现在证明下面的性质:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx, \tag{5}$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx \quad \forall \alpha \neq 0. \tag{5'}$$

这些等式应该理解为位于右边和左边的两个函数集之重合. (我们记得, 两个集合相等, 指的是它们由同样一些元素所组成.) 我们来说明, 集合

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx$$

是由一切可能的由函数的和 $F(x) + G(x)$ 生成的函数组成的, 其中 $F(x) \in \int f(x)dx$, $G(x) \in \int g(x)dx$, 即

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \{F(x) + G(x)\},$$

其中 $\{F(x)\} = \int f(x)dx, \{G(x)\} = \int g(x)dx$.

现在, 为证 (5), 根据性质 (4) 只要对这些等式求导就够了. 证明完毕.

我们指出, 为了应用的简便, 宜把记号 $\int f(x)dx$ 和 $\int g(x)dx$ 看作寻常的函数, 分别以它们代表函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的某原函数, 而把在由它们线性组成的表达式之间的等式理解为 "精确到常数", 即等式的右边和左边相差一个在 (a, b) 上取常数值的函数.

借助于性质 (4) 还可以容易地建立不定积分的两个性质, 它们对于直接的求积分是重要的.

分部积分法

$$u(x)v(x) - \int u(x)dv(x) = \int v(x)du(x), \tag{6}$$

变量变换法

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{7}$$

其中 $x = \varphi(t)$ 是定义在区间 (α, β) 上的 t 的可微函数, 并且值的集合 $\{\varphi(t)\}$ 含在区间 (a, b) 内. 我们假定在两个等式中, 左边的积分确实存在; 由此就推出这些等式右

边的积分的存在性.

► 我们来证性质 (6). 由于按条件等式左端的积分存在, 那么它的微分等于

$$d(uv - \int udv) = udv + vdu - udv = vdu.$$

由此, 根据性质 (4) 推出性质 (6).

为证性质 (7), 我们注意到, 根据复合函数的微分法并根据性质 (3), 当 $x = \varphi(t)$ 时有

$$\left(\int f(x)dx\right)'_t = \left(\int f(x)dx\right)'_x \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(x)\Big|_{x=\varphi(t)} \cdot \varphi'(t)$$
$$= f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此, 根据性质 (4), 积分 $\int f(x)dx$ 当 $x = \varphi(t)$ 时同时也是函数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的不定积分, 即

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad ◄$$

借助于求导数, 易于验证下面的对于最简单的初等函数的不定积分的等式成立:

1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1;$ 2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c;$[①]

3) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c;$ 4) $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + c;$

5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c;$ 6) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + c;$

7) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1;$ 8) $\int \sin x dx = -\cos x + c;$

9) $\int \cos x dx = \sin x + c;$ 10) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c;$

11) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c;$ 12) $\int \ln x dx = x\ln x - x + c.$

正如已经指出过的, 并非任何函数都有真实原函数, 因为并非任一函数都是另一函数的导数, 例如我们来考察函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{若 } x \in (0,1) \\ 2, \text{若 } x = 1, \\ 3, \text{若 } x \in (1,2). \end{cases}$$

这个函数定义在 $(0,2)$ 且不可能是某个 $[0,2]$ 上的函数 $F(x)$ 的导数, 因为根据达布定理, 导数取遍其中间值, 而函数 $f(x)$ 总共取三个值: $1, 2, 3$.

---

① 函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x + 2 & x > 0 \\ \ln|x| + 1 & x < 0 \end{cases}$ 也是 $\frac{1}{x}(x \neq 0)$ 的原函数 —— 译者注.

后面将要证明牛顿–莱布尼茨公式. 由此公式推出, 在开区间上连续的函数有原函数, 即可积. 因此, 一切初等函数都在整个定义域生成的开区间上可积. 不过积分的结果远非仍为初等函数, 这就像在求导的情形时一样, 例如, 可以证明函数

$$\mathrm{li}x = \int \frac{dx}{\ln x} \quad (积分对数),$$

$$\mathrm{si}x = \int \frac{\cos x}{x} dx \quad (积分正弦)$$

都不是初等的.

本身不是初等函数, 但却是通过初等函数借助于积分和微分形的解析关系式定义的函数, 通常叫作**特殊函数**, 不过应该回过头来说明, 例如从数值计算的观点来看, 特殊函数一般而言比初等函数 "一点也不坏", 有时甚至 "更好", 然而一切最简单的初等函数在它们满足的函数关系式的简洁方面还是有优越性的.

再次强调, 求初等函数的积分不可能仅只有一种方法, 因为原函数可能已不是初等函数, 但还是有一些办法以明显的形式来求原函数. 说起积分法, 再次指出, 要弄清楚我们已知的一个函数 $F(x)$ 是不是 $f(x)$ 的原函数, 没有必要 "取积分", 即计算 $\int f(x)dx$, 只需简单地求出 $F'(x)$ 且将其与 $f(x)$ 进行比较.

例　1. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有连续导数, $C(x) = \sum\limits_{a<n\leqslant x} c_n$. 那么

$$F(x) = \sum_{a<n\leqslant x} c_n f(n) - C(x)f(x) = -\int C(x)f'(x)dx.$$

实际上, 如果 x 不是整数, 则由于 $C(x)$ 和 $\sum\limits_{a<n\leqslant x} c_n f(n)$ 在不含整点的区间上逐段为常数,

$$F'(x) = -C(x)f'(x).$$

早已确认, $F(x)$ 在 (a,b) 上连续, 所以 $F(x)$ 是函数 $-C(x)f'(x)$ 的原函数.

2. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有连续导数,$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$. 那么成立公式

$$F(x) = \sum_{a<n\leqslant x} f(n) - \rho(x)f(x) + \rho(a)f(a) = \int (f(x) - \rho(x)f'(x))dx.$$

实际上, 若 x 不是整数, 则

$$F'(x) = (-\rho(x)f(x))' = f(x) - \rho(x)f'(x).$$

进而, 由于 $F(x)$ 是连续函数, 所以 $F(x)$ 是函数 $f(x) - \rho(x)f'(x)$ 的原函数.

有时, 施用微分来进行检验是一个很笨重的程序, 因此有理由借助于各种办法把计算过程归结为表格式的积分. 为了有把握地快速计算积分, 必须确定采用标准

的积分方法的技巧. 最简单和最一般的计算方法是变量变换法和分部积分法 (参阅性质 (5) 和 (6)).

各种不同的积分方法的更详细的材料可在文献 [4,7,15,16] 中找到.

第三十讲

补充. 按海涅[①]方式的极限概念向沿集合基收敛的函数的推广

本讲的主题是函数按海涅方式的经典的极限概念向沿集合基收敛的一般情形的推广. 众所周知, 数学分析课程的结构是建立在两个等价的收敛概念: 按柯西方式的极限和按海涅方式的极限的基础之上的. 课程的内容要求同时对两个概念进行研究. 特别是, 这样可以把极限的研究在各种形式下, 包括在积分论, 多元函数等等各方面, 能统一起来并做得明白.

必须指出, 沿集合基收敛的概念最先是由 A. 克雷瓦诺夫斯基 [22] (以某些不同的术语) 叙述的. 在 1937 年, В. И. 格利文科 [23] 对于积分的一般定义使用了这个概念. 其后, 如 A.H. 柯尔莫戈洛夫所指出的, 法国数学学派在滤子理论的框架之下引入了同样的概念.

随着按柯西方式收敛的理论的成功发展, 必须对函数按海涅方式 [24], [25] 的极限概念作相应的推广成为刻不容缓的事情. 这里我们来解决这个问题. 我们要引入沿着基的 H 极限的概念, 此概念与按海涅方式的极限的经典定义在最简单的具体情况下是一致的. 然后我们建立所引入的沿基的 H 极限概念与按柯西方式的函数极限的通用的定义的等价性. 最后, 作为所引入的沿着基 H 收敛的概念的一个不平庸的例子我们演示一个定义和研究沿着基的上极限和下极限的新途径.

1. 设 A 是一个元素 x 的基本集, $A = \{x\}$, 而 B 是它的子集的基, 它由无穷多个终端 b 组成, $b \subset A, b \in B$, 这些终端满足下述条件:

1) 每个终端都是不空的集合;

2) 对于任何两个终端 b_1, b_2, 存在终端 b_3, 使得 $b_3 \subset b_1 \bigcap b_2$.

定义 5 *称序列 $\{x_n\}, x_n \in A$, 是沿着基 B 的基本列, 如果对于任一终端 b, 仅存在序列的有限多项不属于 b.*

定义 6 *基本序列称作是 (沿着基 B) 单调的, 如果条件 $x_n \in b$ 蕴含条件 $x_{n+1} \in b$ 对于每个终端 b 都成立.*

下面我们限于考虑还满足下述条件的基:

①海涅 (H. E. Heine), 1821—1881, 德国人 —— 译者注.

3) 对于任何两个终端 b_1, b_2, 有或者 $b_1 \subset b_2$, 或者 $b_2 \subset b_1$.

4) 存在至少一个沿着集合基 B 的单调序列.

5) $\bigcap\limits_{b \in B} b = \varnothing$.

2. 我们来证明沿着基单调的序列的一些性质.

引理 1 单调序列 $\{x_n\}$ 的任何子序列 $\{y_k = x_{n_k}\}$ 本身是单调序列.

► 设 b 是基 B 中的任意一个终端. 那么在它外面只有序列 $\{x_n\}$ 的有限多项. 因此 $\{y_k = x_{n_k}\}$ 的不含在终端 b 中的项也只有有限个. 从这些项中选择具有最大脚标 $k = k_0$ 的项 y_k. 那么 $y_{k_0+1} \in b$. 而若 $k_1 > k_0 + 1$, 则 $n_{k_1} > n_{k_0+1}$, 由此, 根据原始序列 $\{x_n\}$ 的单调性, 有 $y_{k_1} = x_{n_{k_1}} \in b$, 从而序列 $\{y_k\}$ 是单调的. ◄

引理 2 设 $\{x_n\}$ 是沿着基 B 的单调序列. 那么存在其子列 $\{y_k\}, y_k = x_{n_k}$, 和依赖于 $\{y_k\}$ 的终端序列 $b_n \in B$, 使得 $x_{n_k} \in b_k$, 但 $x_{n_k} \notin b_{k+1}, b_{k+1} \subset b_k$.

► 我们任意从 B 中选一个终端作 b_1. 序列仅有有限多项不在 b_1 中. 设 $x_{n_1} \in b_1$, 那么 (根据 $\{x_n\}$ 的单调性) 对于任何 $k \geqslant 0$, 有 $x_{n_1+k} \in b_1$. 选一个使 x_{n_1} 不属于其中的终端作为 b_2. 这样的 b_2 是存在的, 因为 $H_B = \bigcap\limits_{b \in B} b = \varnothing$. 实际上, 如果对于任何终端 b 皆有 $x_{n_1} \in b$ 则 $x_{n_1} \in H_B$. 但那时 H_B 就不是空集. 作为 x_{n_2} 我们取序列的具有这样的指标 n_2 的项, 从 x_{n_2} 开始序列的在它后面的项都属于 b_2 且 n_2 是具有这种性质的脚标的最小值, 依此类推.

这样我们就得到两个序列: 元素 $y_s = x_{n_s}$ 的序列和终端的序列 $\{b_s\}, b_s \in B$ 使 $x_{n_s} \in b_s, x_{n_s} \notin b_{s+1}$ 且 $b_{s+1} \subset b_s$, 对于每个 $s \geqslant 1$ 成立. ◄

序列 $\{b_n\}$ 称为**基本终端序列**.

引理 3 设 $\{b_n\}$ 是基本终端序列. 那么对于每个终端 $b \in B$ 存在终端 $b_n \in B$ 使 $b_n \subset b$.

► 设 b 是基 B 中的任意一个终端. 在此终端之外, 仅有有限多个元 y_k. 那么存在至少一个值 $k = k_0$, 使 $y_{k_0} \in b$. 我们来考察基本终端序列中的终端 b_{k_0+1}.

根据赋予基 B 的条件, 成立两种包含关系之一: 1) $b \subset b_{k_0+1}$ 或 2) $b \supset b_{k_0+1}$. 但第一种情形是不可能的, 因为否则的话关系式 $y_{k_0} \in b \subset b_{k_0+1}$ 成立从而 $y_{k_0} \in b_{k_0+1}$, 这是不可能的, 因为根据序列 $\{y_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 的结构,$y_{k_0} \in b_{k_0}$ 但 $y_{k_0} \notin b_{k_0+1}$, 因此, 第二种形发生, 即 $b \supset b_{k_0+1}$. ◄

引理 4 成立关系式 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \varnothing$.

► 假设不然, 即存在 z 属于所有的 b_k. 由于 $\bigcap\limits_{b \in B} b = \varnothing$, 存在一个终端 b 不含 z.

按引理 3, 存在 b_{k_0} 使 $b_{k_0} \subset b$. 由此推出, z 不属于终端 b_{k_0}, 从而 $z \notin \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, 这与前面所作的假定矛盾. ◄

我们指出, 根据所证的引理, 基本终端序列本身构成了一个与初始的基 B 等价的基. 有时也把等价的基叫作是共尾的(confinal).

3. 设 $f(x)$ 是定义在 A 上的实函数. 称数 l 是函数 $f(x)$ 沿着基 B 的 C 极限, 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$ 存在终端 $b = b(\varepsilon)$, 使得对于一切 $x \in b$ 有 $|f(x) - l| < \varepsilon$. 记作 $l = C\text{-}\lim\limits_{B} f(x)$ 或简记为 $l = \lim\limits_{B} f(x)$.

这对应于函数极限按柯西方式的定义. 现在我们给出极限按海涅方式的类似的定义.

数 l 称作是函数 $f(x)$ 沿着基 B 的按海涅方式的极限, 如果对于每个沿着基 B 的单调序列 $\{x_n\}$ 都成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

记作: $l = Hm\text{-}\lim\limits_{B} f(x)$.

定理 3 *存在 $C\text{-}\lim\limits_{B} f(x)$ 的必要充分条件是存在 $Hm\text{-}\lim\limits_{B} f(x)$; 且两者相等.*

换言之, 函数沿着基 B 的 Hm 极限概念和 C 极限概念是等价的.

► *必要性* 设 C 极限存在, 即

$$C\text{-}\lim_{B} f(x) = l.$$

那么, 根据定义, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $b = b(\varepsilon)$ 使得对于一切 $x \in b$ 成立不等式 $|f(x) - l| < \varepsilon$.

考察任意一个沿着基 B 单调的序列 $\{x_n\}$. 从单调性的条件推出, 存在 n_0 使得对于一切 $n > n_0$ 成立关系式 $x_n \in b$. 因此

$$|f(x_n) - l| < \varepsilon \quad \forall n > n_0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

充分性 假设充分性不成立. 设 $Hm\text{-}\lim\limits_{B} f(x) = l$, 但 C 极限不存在或不等于 l. 这表明, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得对于每个终端 $b \in B$ 都存在 $x \in b$ 使 $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$.

我们来考察基本终端序列 $\{b_n\}$. 设 $z_1 \in b_1$ 且 $|f(z_1) - l| \geqslant \varepsilon$. 由于 $H_B = \bigcap\limits_{b\in B} b = \varnothing$, 所以存在终端 $b^{(1)} \in B$ 使得 $z_1 \notin b^{(1)}$. 根据引理 3, 对于某 n_1 有 $b_{n_1} \subset b^{(1)}$. 因此 $z_1 \notin b_{n_1}$.

接着, 存在点 $z_2 \in b_{n_1}$ 使得 $|f(z_2) - l| \geqslant \varepsilon$. 和上面一样, 我们找到终端 b_{n_2} 满足条件 $z_2 \notin b_{n_2}$. 然后选 $z_3 \in b_{n_2}$ 使 $|f(z_3) - l| \geqslant \varepsilon$, 依此类推. 这样一来, 我们得到序列 $\{z_n\}$, 它满足条件 $z_k \in b_{n_{k-1}}, z_k \notin b_{n_k}$, 并且终端序列 $b_1 = b_{n_0} \supset b_{n_1} \supset b_{n_2} \supset \cdots$.

我们来证明, 序列 $\{z_n\}$ 沿着基 B 是基本的且是单调的.

基本性　取任一终端 $b^* \in B$. 根据引理 3, 存在终端 $b_k \subset b^*$. 若 $n_s > k$, 则 $b_{n_s} \subset b_k \subset b^*$. 序列 $\{z_n\}$ 中仅有元素 $z_1, \cdots, z_s$ 不属于终端 b_{n_s}, 而且对于任何 $n > s$ 均有 $z_n \in b_{n_s} \subset b^*$. 这表明序列 $\{z_n\}$ 是基本的.

单调性　用反证法. 设存在终端 $b^* \in B$, 使得对于某号码 k 有 $z_k \in b^*, z_{k+1} \notin b^*$. 从序列 $\{z_n\}$ 的结构得到, $z_{k+1} \notin b_{n_k}$. 因此,$b_{n_k} \supset b^*$ (根据基的性质 3). 由于 $z_k \in b^*$, 所以 $z_k \in b_{n_k}$. 但这与根据序列 $\{z_k\}$ 的结构当有 $z_k \notin b_{n_k}$ 相矛盾. 从而序列 $\{z_k\}$ 是单调的.

接着, 从 $Hm\text{-}\lim\limits_B f(x) = l$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = l$. 因此, 可在不等式 $|f(z_n) - l| \geqslant \varepsilon > 0$ 中取极限得 $0 \geqslant \varepsilon > 0$, 而这是不可能的. ◄

我们说, 数 l 叫作**函数 $f(x)$ 沿着基 B 的 H 极限**, 如果对于任何沿着基 B 的基本列 $\{x_n\}$ 都成立条件

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

记作: $l = H\text{-}\lim\limits_B f(x)$.

定理 4　下述三个极限概念等价:

1) $\lim\limits_B f(x) = l$;
2) $H\text{-}\lim\limits_B f(x) = l$;
3) $Hm\text{-}\lim\limits_B f(x) = l$.

► 下列命题串成立: 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 1). 其中前两个是明显的, 第三个命题从定理 1 推出. ◄

4. 我们来证明沿着基的上、下极限的一些性质. 设 $\{x_n\}$ 是沿着基 B 的单调序列并设存在 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. 那么 l 叫作**沿着基 B 的部分极限**. 部分极限中的最大者 (如果存在的话) 叫作**函数 $f(x)$ 沿着基 B 的上极限**并记作 $\overline{\lim\limits_B} f(x)$; 类似地, 最小部分极限叫作**函数 $f(x)$ 沿基 B 的下极限**并记作 $\underline{\lim\limits_B} f(x)$.

数 l_1 称作**上极限数**, 如果

$$l_1 = \inf_{b\in B} \sup_{x\in b} f(x),$$

而数 l_2 称作**下极限数**, 如果

$$l_2 = \sup_{b\in B} \inf_{x\in b} f(x).$$

定理 5　设函数 $f(x)$ 终极有界. 那么沿着基 B 上、下极限存在且

$$\overline{\lim_B} f(x) = \inf_{b\in B} \sup_{x\in b} f(x), \qquad \underline{\lim_B} f(x) = \sup_{b\in B} \inf_{x\in b} f(x).$$

► 对于基 B 的任意两个终端 b_1, b_2, 有

$$\inf_{x\in b_1} f(x) \leqslant \sup_{x\in b_2} f(x).$$

实际上, 存在基 B 的终端 $b_3 \subset b_1 \bigcap b_2$. 那么

$$\inf_{x\in b_1} f(x) \leqslant \inf_{x\in b_3} f(x) \leqslant \sup_{x\in b_3} f(x) \leqslant \sup_{x\in b_2} f(x).$$

因此, 根据 $f(x)$ 沿着基 B 的终极有界性, 存在数 λ 使

$$\lambda = \inf_{b\in B} \sup_{x\in b} f(x).$$

我们来证明

$$\overline{\lim_{B}} f(x) = \lambda.$$

第一步. 可找到终端 $b^* \in B$, 使对于每个 $x \in b^*$ 有 $f(x) < \lambda + 1$. 从引理 3 推出, 存在终端 $b_{n_1} \in B$ 满足 $b_{n_1} \subset b^*$. 我们来证, 可找到元素 $x_1 \in b_{n_1}$ 使得 $\lambda + 1 > f(x_1) > \lambda - 1$. 只要证明

$$\sup_{x\in b_{n_1}} f(x) \geqslant f(x_1) > \lambda - 1$$

就够了. 如果这样的元素 x_1 不存在, 则 $\forall x \in b_{n_1}$ 满足不等式 $f(x) \leqslant \lambda - 1$. 因此

$$\sup_{x\in b_{n_1}} f(x) \leqslant \lambda - 1,$$

从而

$$\lambda = \inf_{b\in B} \sup_{x\in b} f(x) \leqslant \lambda - 1.$$

发生矛盾.

进而可以找到终端 $b_0^{(1)}$ 使得 $x_1 \notin b_0^{(1)}$ (这样的终端是存在的, 因为 $H_B = \bigcap\limits_{b\in B} b = \varnothing$).

第二步. 选择终端 $b^{(2)} \in B$ 满足条件

$$f(x) < \lambda + \frac{1}{2} \qquad \forall x \in b^{(2)}.$$

考察终端 $b_1^{(2)} \subset b^{(2)} \bigcap b_0^{(1)}$. 终端 $b_1^{(2)} \in B$ 不含 x_1. 进而同在第一步中一样, 存在终端 $b_{n_2} \subset b_1^{(2)}$, 它含有点 $x_2 \neq x_1$ 使得

$$\lambda - \frac{1}{2} < f(x_2) < \lambda + \frac{1}{2},$$

依此类推. 最后我们得到序列 $\{x_s\}$, 满足条件

$$x_s \in b_{n_s}, \quad x_s \notin b_{n_{s-1}}, \quad \lambda - \frac{1}{s} < f(x_s) < \lambda + \frac{1}{s}.$$

和在定理 1 的证明中一样, 我们确定 $\{x_n\}$ 是沿着基 B 的单调序列. 此外, 当 $n \to \infty$ 时成立等式 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$, 即 λ 是沿着基 B 的部分极限.

第三步. 我们证明, 函数 $f(x)$ 沿着基 B 的任何部分极限都不超过 λ. 从量 λ 的定义知, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在终端 b 满足条件

$$\sup_{x\in b} f(x)<\lambda+\varepsilon.$$

设 $\{x_n\}$ 是任意的使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在的沿着基 B 的单调序列. 根据序列 $\{x_n\}$ 的基本性, 它仅有有限个项不属于 b, 即存在号码 n_0 使得对于一切大于 n_0 的号码 $n, f(x_n)<\lambda+\varepsilon$. 过渡到极限 $n\to\infty$, 得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\leqslant\lambda+\varepsilon.$$

根据 $\varepsilon>0$ 的任意性, 得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\leqslant\lambda$. ◀

如前面那样, 设 l_1 和 l_2 分别是上、下极限数. 我们称数 $l_2-l_1>0$ 是函数 $f(x)$ 沿着基 B 的振幅, 并记

$$\operatorname*{osc}_B f(x)=l_2-l_1.$$

用这些记号, 柯西准则叙述如下.

为使函数 $f(x)$ 沿着基 B 存在极限, 必要且充分的是 $\operatorname*{osc}\limits_B f(x)=0$.

我们指出, 从定理 3 特别得到:

1) $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)=\inf\limits_{T>0}\sup\limits_{x>T} f(x)$;

2) $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x)=\inf\limits_{T>0}\sup\limits_{|x|>T} f(x)$;

3) $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)=\inf\limits_{\delta>0}\sup\limits_{0<|x-x_0|<\delta} f(x)$.

注 1. 定理 1 即使在最简单的情形也多少比断言按柯西方式和按海涅方式的逐点收敛的等价性的经典定理来得强, 因为它只要求序列的单调性. 这一点有时的确是便于应用的.

另一方面, 可以考察这样的基, 对于它每个基本列都不是单调的. 这时, Hm 收敛当然没有定义, 但是断言 H 收敛和 C 收敛的等价性的定理 2 依然成立, 因为它的证明本质上与定理 1 的证明是一样的, 只要简单地用基本列替换单调列就可以了.

2. 必须强调, 如果情况是这样, 即至少存在一个沿着基单调的基本列, 那么 Hm 收敛, H 收敛的概念皆可定义. 此外, 如在引理 2 中已证的, 对于这样的基, 总存在基本的终端序列, 它本身是可数基, 与初始的基共尾. 用滤子理论的语言来说, 这就是说, 推广关于 H 收敛性和 C 收敛性的等价性的海涅定理的问题, 只能对于具有可数基的滤子来考虑.

3. 我们只限于考察数值函数的收敛概念. 不过, 定理 2 可以毫无困难地推广到两个基的映射的情形, 当且仅当这两个基之上存在单调的或简单基本的序列.

4. 限制基 B 的条件 3, 有时不能满足. 这时, 常可代替基 B 而考虑满足这个条件的给定在同一基础集合上的与基 B 等价的基 D, 这里等价的含意是, 任一函数沿这两基中的一个收敛, 蕴含着它沿另一个收敛到同一值.

引理 2 中的基本终端序列 $\{b_n\}$ 和基 B 就是等价的基的一个例子.

第二部分

黎曼积分．多变量函数的微分学

数学分析课程的这部分包括单变量函数的积分学基础，和在多变量空间中的微分学. 作为主要研究对象出现在这两个题目中的几何概念把这两个题目联系了起来.

数学分析的基本概念，在很多情况下都来源于对现实空间中几何对象的最简单性质的表示. 可以举阿基米德的测量面积的方法和欧多克斯的"穷竭法"为例. 函数黎曼可积的概念与曲边梯形的面积，即其若尔当容积的存在性的问题联系了起来.

数学分析的概念的另一个来源是算术. 因此，我们尽力来阐明数学分析的算术观点. 根据这些算术观点数学分析的概念是由具有与自然数的性质相关联的算术属性的离散因素所引发的. 欧拉和阿贝尔求和公式的证明，积分和方法，黎曼积分理论中的均匀划分，模为 1 的数的序列的一致分布的外尔准则，由艾森斯坦给出的关于函数的代数性的判别法等均属此类. 我们将指出，曲线长度的公式是以简化的方式引出的.

有一系列被考察的概念会在以后其他课程中作更详细的研究. 对于这些概念，这里给出了初步的然而足够明确的表达. 这将使以后学习相关内容变得容易，并有助于将来对于理科专业课的理解.

第七章　定积分

第一讲

§1. 引言

设函数 $f(x)$ 定义在包含闭区间 $[a,b]$ 的区间 (α,β) 上. 夹在直线 $x=a, x=b, y=0$ 以及曲线 $y=f(x)$ 之间的图形叫作曲边梯形, 它的面积在横轴之上的部分取正号, 在横轴之下的部分取负号. 这个面积值叫作函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分, 记作

$$\int_a^b f(x)dx,$$

其中数 a 叫作积分下限, b 叫作积分上限.

关于积分的这个定义, 有一系列疑问.

1) 何谓面积? (下面要对这个原则问题给予极大的关注).

2) 为什么这个面积几乎用与不定积分同样的记号来标记?

3) 在不定积分与定积分之间存在怎样的联系?

我们提前来回答最后的一个问题.

首先指出, 定积分可以看作是积分上限 (或下限) 当另一积分限固定时的函数, 即譬如说固定数 a, 则对于任一 $b\in(\alpha,\beta)$, 得到在区间 $[a,b]$ 上的积分值作为函数的值. 这就定义了一个给定在区间 (α,β) 上的函数 $F(b)$. 其实, 如果函数 $f(x)$ 在 (α,β)

上连续, 则从后面将要谈到的牛顿-莱布尼茨定理推出, 函数 $F(x)$ 是可微的, 且是函数 $f(x)$ 的原函数, 即 $F'(x) = f(x)$, 此外还成立等式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

设 $F_1(x)$ 是 $f(x)$ 的另一个原函数. 那么, 由于 $F_1(x) = F(x) + c$, 其中 c 是常数, 所以

$$F_1(b) - F_1(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

换言之, 这个等式对于构成不定积分的集合中的任何原函数都成立. 于是, 牛顿-莱布尼茨定理指出了这一情况, 即不定积分和定积分乃是彼此紧密联系的概念. 而为了进一步研究这些概念, 必须弄清楚*曲边梯形的面积*概念是什么意思. 对于研究这个问题可有不同的途径, 且与此相关, 对于同一梯形, 面积可以存在也可以不存在. 然而如果在两种不同的意义下, 面积都存在, 则在两种情况之下它总该是同一个值.

§2. 黎曼积分的定义

已然指出, "*定积分*" 概念本质上归结为 "*曲边梯形面积*" 概念的定义, 曲边梯形指的是位于带状区域 $a \leqslant x \leqslant b$ 中, 夹在函数图像 $y = f(x)$ 与横坐标轴之间的图形. 换句话说, 此图形由形如

$$\{(x, y)|a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

的点集 A 和形如

$$\{(x, y)|a \leqslant x \leqslant b, f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$$

的点集 B 组成.

任何平面图形 D 的面积记作 $\mu(D)$. 注意到, 平面上任意图形的面积都是非负的数. 定积分与面积的不同之处是它等于图形 A 的面积与图形 B 的面积的差, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(A) - \mu(B)$$

而不是它们的和, 这可能出乎预料.

从中学的几何课程中知道具有面积的图形有下述最简单的性质:

1) 若 $D_1 \subset D_2$, 则 $\mu(D_1) \leqslant \mu(D_2)$.

2) 若 $D_1 \bigcap D_2 = \varnothing$, 则 $\mu(D_1 \bigcup D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2)$.

3) 矩形的面积等于它的相邻的两条边的长度的乘积.

由其边平行于坐标轴的矩形组合成的图形是有面积的. 这样的图形叫作是**最简单的**.

现可用以下方式来定义曲边梯形 D 的面积, 亦即函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分的概念. 为简单起见, 我们仅讨论函数 $f(x)$ 非负的情形.

在图形 D 内和包围图形 D 分别作内接的和外切的最简单的图形 D_1 和 D_2. 暂且可假定函数 $f(x)$ 是连续的. 显然, $D_1 \subset D \subset D_2$. 我们还发现, 图形 D_1 和图形 D_2 的边界的某些部分分别是闭区间 $[a,b]$ 上的阶梯函数. 我们记得, 函数 $h(x)$ 叫作**阶梯函数**, 如果它在每个间隔 (x_{i-1},x_i) 中取常数值 $h_i, i=1,\cdots,n, a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 设图形 D_1 对应于阶梯函数 $h(x)$ 而图形 D_2 对应于阶梯函数 $g(x)$. 那么 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$.

把量

$$I(h)=\sum_{i=1}^{n} h_i \Delta x_i$$

叫作**阶梯函数** $h(x)$ **的积分**. 成立不等式 $I(h)\leqslant I(g)$.

我们来考察两个数集合 $A=\{I(h)\}$ 和 $B=\{I(g)\}$. 根据关于这两个集合的分离性的引理, 存在数 I 分离这两个集合. 如果此数是唯一的, 则称之为**函数** $f(x)$ **在闭区间** $[a,b]$ **上的积分**, 而函数本身叫作是在此区间上**可积的**.

已经知道, 如果数 $\inf\limits_{D_2\supset D} I(g)$ 和 $\sup\limits_{D_1\subset D} I(h)$ 重合, 则它们的公共值等于 I. 因此, 成立下述关于有界函数的可积性的准则.

定理 1 *为使在闭区间上有界的函数 $f(x)$ 是在此区间上可积的, 必须且只需对于任意的 $\varepsilon>0$ 存在阶梯函数 $h(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ 并使得*

$$I(g)-I(h)<\varepsilon.$$

此刻我们不证这个定理, 因为我们将基于更为传统的途径来建立黎曼积分理论, 而在这个方法的框架之下可积性的准则将被证明. 据此我们证明两种建立黎曼积分的途径给出同一个可积函数类.

我们还指出, 上面所述的方法给出了通过内接和外切最简单图形来定义图形 D 的面积概念的可能性. 用类似的方式我们下面要定义若尔当可测的图形, 并证明为使对应于函数 $f(x)$ 的曲边梯形是若尔当可测的, 必要且充分的是 $f(x)$ 是黎曼可积的.

还存在其他的构建方法, 借助于这些方法可以引入面积的概念, 也可以引入我们开头感兴趣的定积分的概念. 这些构建方法的精义在于建立某一函数类到实数的对应, 使得此函数类的每个函数依这样的方式对应于一个特定的数字, 这种对应方式必须满足最简单的图形的面积所具有的自然的性质. 我们指出, 构建方法越复杂, 所建立的使 "定积分" 概念有意义的函数类就越广泛. 我们将考察由德国数学家黎曼提出的构建方法, 据此, 相应的积分叫作**黎曼积分**. 同样我们还要了解更一般类型的积分: 勒贝格积分. 然而, 基本上我们只学习黎曼积分. 黎曼的原始的构建方法的叙

述可在论文《关于函数用三角级数表示的可能性》中找到, 此论文是黎曼于 1853 年写成的. 此文首次发表于 1867 年, 而于 1914 年译成俄文.

举例来说, 勒贝格积分是比黎曼积分更为一般的, 因为一切黎曼可积的函数都是勒贝格可积的, 而反之不真. 我们强调, 如果函数依两种不同的方式都可积, 则积分的值总该一样. 因此, 积分概念的推广, 只可以这样来实现, 在更广泛的函数类上赋予的定积分数值对于那些已经具有定积分值的函数, 保持其定积分值不变.

我们来叙述黎曼积分的构建方法. 我们认为函数 $f(x)$ 定义在一个包含闭区间 $[a,b]$ 的区间 (α,β) 上.

定义 1 称有限多个点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 所成的集合 T 为闭区间 $[a,b]$ 的一个 (非标码) 分法, 如果 $n>1$ 且 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

定义 2 说分法 T_1 在分法 T_2 之前 (或分法 T_2 在分法 T_1 之后), 如果成立集合的包含关系 $T_1\subset T_2$ (或 $T_2\supset T_1$). 分法 T_2 叫作分法 T_1 的加细.

显然, 下述性质成立.

1° 任何分法都是自身的加细.

2° 若 $T_3=T_1\bigcup T_2$, 则分法 T_3 既是分法 T_1 的加细, 也是分法 T_2 的加细.

对于任一分法 $T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 用 Δ_k 表示闭区间 $[x_{k-1},x_k]$. 此区间之长度记作:

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}.$$

定义 3 量 $\Delta_T=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k$ 叫作分法 T 的直径.

在每个闭区间 Δ_k 上选取一点 $\xi_k, k=1,\cdots,n$, 则

$$x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k.$$

定义 4 点集 $\{x_0,\cdots,x_n;\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ 叫作闭区间 $[a,b]$ 的标码分法.

把标码分法记作 V, 而把对应于它的未标码分法记为 $T=T(V)$.

定义 5 和

$$\sigma(V)=f(\xi_1)\Delta x_1+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$$

叫作函数 $f(x)$ 对应于标码分法 V 的积分和.

定义 6 如果数 I 满足条件: 对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得对于闭区间 $[a,b]$ 任意的标码分法 V, 只要 $\Delta_V<\delta$ 就有

$$|I-\sigma(V)|<\varepsilon,$$

即

$$\left|I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| < \varepsilon,$$

那么就称 I 为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的 (黎曼) 定积分, 记作

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

定义 7 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有黎曼积分, 则称它是在 $[a,b]$ 上 (黎曼) 可积的.

容易证明下述命题: 若存在两个数 I_1 和 I_2 皆满足函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼积分的定义, 则它们相等, 即 $I_1 = I_2$.

► 实际上, 若 $I_1 < I_2$ 则将 $\dfrac{I_2 - I_1}{2}$ 取作量 ε. 那么根据积分的定义, 存在数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于任何标码分法 V 满足 $\Delta_V < \delta$ 者, 皆有

$$|\sigma_V - I_1| < \varepsilon, \quad |\sigma_V - I_2| < \varepsilon.$$

因此

$$I_2 - I_1 \leqslant |I_2 - \sigma_V| + |\sigma_V - I_1| < 2\varepsilon = I_2 - I_1.$$

由此得到 $I_2 - I_1 < I_2 - I_1$. 这是不可能的. 因此 $I_1 = I_2$. ◄

可将定积分看作是沿着某个基的极限. 我们来确定这个基, 就是说要刻画构成这个基的终端的集合.

回忆基本集 A 的子集 b 构成的基 B 的定义. 基 B 的终端 $b \subset A$ 满足下述条件:

1) 空集不是基的终端;

2) 对于基 B 的任何两个终端 b_1, b_2, 存在终端 $b_3 \in B$ 使得 $b_3 \subset b_1 \bigcap b_2$.

作为基本集 A, 我们取闭区间 $[a,b]$ 的一切标码分法的集合. 对于每个 $\delta > 0$, 令 b_δ 为直径小于 δ 的标码分法的全体所成的集合. 一切 b_δ 所成的集合 $\{b_\delta\}$ 就是要找的基. 积分和 $\sigma(V)$ 是定义在标码分法集 A 上的函数. 那么函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分不是别的, 恰是积分和 $\sigma(V)$ 沿着基 B 的极限, 即

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_B \sigma(V).$$

这个等式的意思是: 对于任何数 $\varepsilon > 0$ 都存在集 B 的终端 $b_\delta = b_\delta(\varepsilon)$, 使得对于任何标码分法 $V \in b_\delta(\varepsilon)$, 成立不等式 $|\sigma(V) - I| < \varepsilon$.

在前述积分的定义中, 作为量 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 应取产生终端 $b_\delta(\varepsilon)$ 的那个量 δ.

由于积分是积分和沿着基 B 的极限, 所以对于积分适用关于函数沿着某合基的极限的定理.

我们来证明可积函数的下述重要性质.

定理 2 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积. 那么它在 $[a,b]$ 上有界.

► 假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上不是有界的. 取此闭区间的任意一个直径小于 δ 的分法 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 那么存在闭区间 $\Delta_r=[x_{r-1},x_r]$ 使函数 $f(x)$ 在 Δ_r 上无界. 我们来证明函数 $\sigma(V)$ 无界. 取任一数 $M>0$. 这样来构作分法 T 的标码 V 使 $|\sigma(V)|>M$. 为此任取点 $\xi_1,\cdots,\xi_{r-1},\xi_{r+1},\cdots,\xi_n$. 置

$$A=\left|\sum_{k=1,k\neq r}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right|.$$

由于函数 $f(x)$ 在闭区间 Δ_r 上无界, 所以存在点 $\xi_r\in\Delta_r$ 使

$$|f(\xi_r)|>\frac{M+A}{\Delta x_r}.$$

由此得

$$|\sigma(V)|\geqslant|f(\xi_r)\Delta x_r|-\left|\sum_{k=1,k\neq r}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right|>M,$$

从而 $\sigma(V)$ 无界, 那么函数 $f(x)$ 不可积. ◄

第二讲

§3. 黎曼可积的准则

我们来建立在闭区间上有界的函数黎曼可积的准则.

定义 8 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上对应于分法 $T=\{x_0,\cdots,x_n\}$ 的和

$$S(T)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$$

其中 $M_k=\sup\limits_{x\in\Delta_k} f(x), \Delta_k=[x_{k-1},x_k], \Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, 叫作是达布上和.

而

$$s(T)=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$$

其中 $m_k=\inf\limits_{x\in\Delta_k} f(x)$, 叫作达布下和.

定义 9 设 A' 表示闭区间 $[a,b]$ 的一切分法的集合. 数 $I^* = \inf\limits_{T\in A'} S(T)$ 叫作函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上积分, 而数 $I_* = \sup\limits_{T\in A'} s(T)$ 叫作函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的下积分.

定理 3 (闭区间上函数黎曼可积准则) 为使在闭区间上的有界函数黎曼可积, 必须且只需

$$\lim_{\Delta_T\to 0}(S(T)-s(T))=0.$$

为证此准则, 需要达布上、下和的下述性质.

引理 1 对于任何标码分法 V 皆有

$$s(T(V))\leqslant \sigma(V)\leqslant S(T(V)).$$

引理 2 设 T_0 是任意的一个分法而 $\alpha(T_0)$ 是此分法的标码的集合. 那么

$$s(T_0)=\inf_{V\in\alpha(T_0)}\sigma(V),\quad S(T_0)=\sup_{V\in\alpha(T_0)}\sigma(V).$$

引理 3 对于任何非标码分法 T_1 和 T_2

$$s(T_1)\leqslant S(T_2).$$

引理 4 对于有界函数, 上、下积分 I^* 和 I_* 必存在, 且对于任何分法 T 皆成立不等式

$$s(T)\leqslant I_*\leqslant I^*\leqslant S(T).$$

引理 5 标码分法 V 的直径与和它对应的非标码分法 $T=T(V)$ 的直径是一样的. 因此若 $V\in b'_\delta$ 则 $T(V)\in b_\delta$. 这里 b'_δ 表示标码分法基的终端, 而 b_δ 表示非标码分法的基的对应于数 δ 的終端.

引理 6 对于任何分法 T 有

$$I^*-I_*\leqslant S(T)-s(T)=\Omega(T).$$

► 这些命题的证明没有大的困难. 因此我们仅证引理 3, 引理 4 和引理 6.

从证明引理 3 开始. 我们指出, 当分法 T 加细时, 达布下和 $s(T)$ 只可能增加, 而上和 $S(T)$ 只可能减小. 因此, 取 $T_3=T_1\bigcup T_2$ 就得到

$$s(T_1)\leqslant s(T_3)\leqslant S(T_3)\leqslant S(T_2).$$

引理 3 获证.

引理 4 的证明本质上从引理 3 推出. 若作成全体 $s(T)$ 的值的集合 M_1 和全体 $S(T)$ 的值的集合 M_2, 则引理 3 的结论表示任一元素 $a\in M_2$ 都是集合 M_1 的上界.

那么, M_1 的最小上界, 即量 I_*, 不超过 a. 这表明 I_* 是集合 M_2 的下界, 而根据 I^* 自身的定义, 它是集 M_2 的下确界, 因此

$$s(T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(T).$$

引理 6 的结论从下面的不等式串推出

$$S(T) - s(T) \geqslant I^* - s(T) \geqslant I^* - I_*.$$

引理 1、引理 2 和引理 5 的结论直接从定义得出. ◀

现可转来证明函数黎曼可积的准则.

► *必要性* 设 $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = I$. 这表示, 对于任何 $\varepsilon_1 > 0$, 都存在数 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$, 使得对于任意的标码分法 V, 只要直径 $\Delta_V < \delta_1$ 就有 $|\sigma(V) - I| < \varepsilon_1$, 即

$$I - \varepsilon_1 < \sigma(V) < I + \varepsilon_1. \tag{1}$$

考虑任意的直径小于 δ_1 的非标码分法 T. 有

$$s(T) = \inf_{V \in \alpha(T)} \sigma(V), \quad S(T) = \sup_{V \in \alpha(T)} \sigma(V).$$

那么从 (1) 推出

$$I - \varepsilon_1 \leqslant s(T) \leqslant I + \varepsilon_1, \quad I - \varepsilon_1 \leqslant S(T) \leqslant I + \varepsilon_1.$$

因此数 $s(T)$ 和 $S(T)$ 位于同一个长度为 $2\varepsilon_1$ 的闭区间 $[I - \varepsilon_1, I + \varepsilon_1]$ 中. 所以

$$|S(T) - s(T)| \leqslant 2\varepsilon_1.$$

若取 $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{3}$ 和 $\delta = \delta_1\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, 则得到, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于任何分法 T, 只要 $\Delta_T < \delta(\varepsilon)$ 就成立 $|S(T) - s(T)| < \varepsilon$. 从而

$$\lim_{\Delta_T \to 0} (S(T) - s(T)) = 0.$$

充分性 我们来证明, 从条件 $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} (S(T) - s(T)) = 0$ 推出极限 $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V)$ 存在.

首先证明, 上、下积分 I^* 和 I_* 相等. 根据引理 6 有

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S(T) - s(T).$$

因此当 $\Delta_T \to 0$ 时 $h = I^* - I_* \to 0$, 即 $h = 0$, 从而

$$I^* = I_* = I.$$

剩下的是证明 $\lim\limits_{\Delta_V\to 0}\sigma(V)=I$. 给定任意的 $\varepsilon>0$. 则存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对于直径小于 δ 的任意分法 T 成立不等式

$$S(T)-s(T)<\varepsilon.$$

那么对于任意的标码分法 V, 满足 $\Delta_V<\delta$ 者, 有

$$S(T(V))-s(T(V))<\varepsilon.$$

此外

$$s(T(V))\leqslant\sigma(V)\leqslant S(T(V)),\quad s(T(V))\leqslant I\leqslant S(T(V)).$$

那么两个点 $\sigma(V)$ 和 I 皆属于长度小于 ε 的闭区间 $[s(T(V)),S(T(V))]$. 这表明这两点之间的距离小于 ε. 所以, 对于任何分法 V, 使 $\Delta_V<\delta$ 者, 皆成立不等式 $|\sigma(V)-I|<\varepsilon$. 从而 $\lim\limits_{\Delta_V\to 0}\sigma(V)=I$. ◄

注 在证明可积准则的充分性时, 建立了下述论断.

若对于有界函数成立条件

$$\lim_{\Delta_T\to 0}(S(T)-s(T))=0$$

则成立等式 $I^*=I_*$.

例 1. 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{若 } x \text{ 是有理数},\\ 0, \text{若 } x \text{ 是无理数},\end{cases}$$

在闭区间 $[a,b]$ 上不是黎曼可积的.

实际上, 取此区间的任一分法. 在分法 T 的任何间隔 Δ_i 中都既含有理数亦含无理数, 故函数在此间隔中的振幅 ω_i 等于 1. 因此

$$\Omega(T)=S(T)-s(T)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a.$$

但根据函数黎曼可积的准则, 该满足条件

$$\lim_{\Delta_T\to 0}(S(T)-s(T))=0$$

才是, 这表明狄利克雷函数 $D(x)$ 黎曼不可积.

2. 黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, \text{若 } x=\dfrac{m}{n}, (m,n)=1,\\ 0, \ \text{若 } x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

在闭区间 $[0,1]$ 上黎曼可积.

给定任意的数 $\varepsilon > 0$. 令 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$, 并取 δ 满足条件 $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2N^2}$. 任取分法 T, 使 $\Delta_T < \delta$. 函数 $R(x)$ 在任何间隔 Δ_i 上的振幅都满足条件 $0 < \omega_i \leqslant 1$. 把和 $\Omega(T) = S(T) - s(T)$ 分成两部分, 一部分 Ω_1 对应于满足不等式 $0 < \omega_i \leqslant \frac{1}{N}$ 的那些项的和, 另一部分 Ω_2 对应于满足不等式 $\frac{1}{N} < \omega_i \leqslant 1$ 的那些项的和. 在和式 Ω_2 中所含的间隔 Δ_i 中必含有分母小于 N 的有理点. 这些点的总数不超过 N^2. 因此

$$\Omega(T) = \Omega_1 + \Omega_2 \leqslant \frac{1}{N}\sum{}'\Delta x_i + \sum{}''\Delta x_i \leqslant \frac{1}{N} + \delta N^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

其中在求和号上的一撇和两撇分别表示区间 Δx_i 包括在和式 Ω_1 及和式 Ω_2 中. 因此黎曼函数 $R(x)$ 可积.

注 在上面考察的例子中引人的量

$$\Omega(T) = S(T) - s(T) \leqslant \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k$$

叫作对应于区间的给定的分法 T 的 ω 和. 这里, 量 $\omega_k = M_k - m_k$ 叫作函数 $f(x)$ 在闭区间 $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ 上的振幅. 若在量 M_k, m_k, ω_k 的定义中代替闭区间 Δ_k 以开区间 (x_{k-1}, x_k), 则得到数 $M'_k = \sup\limits_{t\in(x_{k-1},x_k)} f(t), m'_k = \inf\limits_{t\in(x_{k-1},x_k)} f(t)$, 和 $\omega'_k = M'_k - m'_k$, 这样得到的量 $\Omega'(T)$ 也叫作 ω 和.

第三讲

§4. 函数黎曼可积的三个条件的等价性

我们在三个等价形式之下来证明函数的黎曼可积准则.

定理 4 为使闭区间上的有界函数可积, 必要且充分的是下列三个等价条件中的一个成立:

1) $\lim\limits_{\Delta_T\to 0}(S(T) - s(T)) = 0$;

2) $I^* = I_*$;

3) $\inf\limits_{T}(S(T) - s(T)) = 0$.

► 我们来证明下述蕴含关系链成立: 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 4).

根据对 §3 定理 1 的注, 得知 1) ⇒ 2). 现证 2) ⇒ 3). 下述关系成立:

$$\inf_{T}(S(T) - s(T)) = h = I^* - I_*.$$

a) 首先证明 h 是 $S(T)-s(T)$ 的集合的下界. 我们有

$$I^* \leqslant S(T), \quad -I_* \leqslant -s(T),$$

因此

$$S(T)-s(T) \geqslant I^* - I_*.$$

b) 现证量 h 是 $S(T)-s(T)$ 的集合的下确界, 即对于任给的 $\varepsilon>0$, 数 $h+\varepsilon$ 都不是下界. 从上确界和下确界的定义推出, 存在分法 T_1 和 T_2 使

$$S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}, \quad s(T_2) > I^* - \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此, 对于分法 $T_3 = T_1 \bigcup T_2$ 有

$$S(T_3) \leqslant S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}, \quad s(T_3) \geqslant s(T_2) > I^* - \frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$S(T_3)-s(T_3) < I^* - I_* + \varepsilon = h+\varepsilon.$$

可见 $h+\varepsilon$ 确实不是 $S(T)-s(T)$ 的集合的下界.

由于命题 2) 说的是 $h=0$, 所以从上所证得 $\inf\limits_{T}(S(T)-s(T))=0$. 那么, 从命题 2) 我们推出了命题 3).

现证 3) $\Rightarrow$ 1). 根据 3), 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在分法 T_1 使 $S(T_1)-s(T_1)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 用 n 表示分法 T_1 的点的数目. 根据函数 $f(x)$ 在闭区间上的有界性, 存在数 $M>0$, 使得对于这个闭区间上的一切点 x 都成立 $|f(x)|<M$. 置 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4nM}$. 再取任意的分法 T, 使得 $\Delta_T<\delta$. 那么对于分法 $T_2=T\bigcup T_1$ 有

$$S(T_2)-s(T_2) \leqslant S(T_1)-s(T_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$

也就是说, $\Omega(T_2) \leqslant \Omega(T_1) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 类似地有 $\Omega(T_2) \leqslant \Omega(T)$.

我们来给出量 $\Omega(T)$ 的上方估计. 由于

$$\Omega(T)=\Omega(T_2)+(\Omega(T)-\Omega(T_2)),$$

所以只需估计 $\Omega(T)-\Omega(T_2)$. T_2 是分法 T 的加细, 它由在分法 T 的某些间隔中加入分法 T_1 的点而构成. 这样的间隔的数目不超过 n, 它们中的每个的长度都小于 δ, 而函数在这些间隔上的振幅不超过 $2M$. 因此 $\Omega(T)-\Omega(T_2) \leqslant 2Mn\delta$.

于是我们得到

$$\Omega(T) < \frac{\varepsilon}{2} + 2Mn\delta = \varepsilon.$$

这表明

$$\lim_{\Delta_T\to 0}(S(T)-s(T))=0. \quad ◀$$

§5. 函数黎曼可积的特殊准则

我们把闭区间的 n 等分的分法记作 T_n, 把函数对应于 T_n 的达布上和记作 S_n, 而下和记作 s_n.

我们来证明函数黎曼可积的下述特殊准则.

定理 5 为使闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 黎曼可积, 必要且充分的是

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0.$$

► 必要性 从黎曼准则 (§4 定理 1) 推出.

充分性 设

$$I^* = \inf_T S(T), \quad I_* = \sup_T s(T).$$

那么对于任何分法 T 皆有

$$s(T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(T).$$

因此

$$s_n \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_n.$$

由此得到

$$S_n - s_n \geqslant I^* - I_* \geqslant 0.$$

但因 $\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$, 故 $I^* = I_* = I$, 于是根据 §4 定理 2 (条件 2), 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积. ◄

推论 为使闭区间上的有界函数可积, 必须且只需下述等价条件之一成立:

4) $\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$;

5) $\inf_n(S_n - s_n) = 0$.

显然, 我们有蕴含关系链 5) ⇒ 3) ⇒ 1) ⇒ 4) ⇒ 5). 推论获证.

条件 4) 和 5) 满足 §4 定理 2 的条件 1),2) 和 3).

例 考察数列 $\{x_n\}, 0 \leqslant x_n < 1$. 设 α 和 β 是任意的满足条件 $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ 的数. 用 N_Q 表示数列 $\{x_k\}$ 的前 Q 项中落在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 内的项数, 即满足 $\alpha \leqslant x_k \leqslant \beta$ $1 \leqslant k \leqslant Q$ 的脚标 k 的个数.

如果对于任意的 $\alpha,\beta(0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1)$ 都成立关系式

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{N_Q}{Q} = \beta - \alpha,$$

就说数列 $\{x_n\}$ 是模 1 一致分布的 (u. d (mod 1)).

我们来证明下述一致分布准则, 它是外尔 (H. Weyl) 建立的.

定理 6 (外尔准则) 为使数列 $\{x_n\}$ 是模 1 一致分布的, 必须且只需对于任何黎曼可积函数 $f(x)$ 都成立等式

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{1}{Q}\sum_{r=1}^{Q}f(x_r)=\int_0^1 f(x)dx. \tag{1}$$

▶ *充分性* 周期为 1 的周期函数

$$f(x)=\varphi(x)=\begin{cases}1, 若\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta\\ 0, 若\ x\in[0,1]\backslash[\alpha,\beta]\end{cases}$$

在闭区间 $[0,1]$ 上可积. 而且

$$N_Q=\sum_{i=1}^{Q}\varphi(x_i),\quad \int_0^1\varphi(x)dx=\beta-\alpha.$$

所以

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{N_Q}{Q}=\beta-\alpha.$$

因此, 序列 $\{x_n\}$ 是模 1 一致分布的.

必要性 设 $f(x)$ 是任意一个在闭区间 $[0,1]$ 上黎曼可积的函数, 那么根据可积准则, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在分法 T 使得

$$\Omega(T)=S(T)-s(T)<\frac{\varepsilon}{3},\quad s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,\quad S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i.$$

显然成立不等式

$$s(T)\leqslant\int_0^1 f(x)dx\leqslant S(T).$$

置

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}1, 若\ x\in\Delta_i,\\ 0, 若\ x\notin\Delta_i,\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}m_i\varphi_i(x),\quad \Phi(x)=\sum_{i=1}^{n}M_i\varphi_i(x).$$

我们发现, 若等式 (1) 对于某些函数 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_r(x)$ 成立, 则它也对于函数 $g(x)=c_1f_1(x)+\cdots+c_rf_r(x)$ 成立. 因此, 从一致分布的定义出发, 我们得到

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{1}{Q}\sum_{r=1}^{Q}\varphi(x_r)=\int_0^1\varphi(x)dx=s(T),$$

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{1}{Q}\sum_{r=1}^{Q}\Phi(x_r)=\int_0^1\Phi(x)dx=S(T).$$

结果, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $Q_0 = Q_0(\varepsilon)$ 使得对于一切 $Q > Q_0$ 有

$$\left|s(T) - \frac{1}{Q}\sum_{r=1}^{Q}\varphi(x_r)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|S(T) - \frac{1}{Q}\sum_{r=1}^{Q}\Phi(x_r)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

还有, 由于成立不等式 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \Phi(x)$[1],

$$s(T) - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \frac{1}{Q}\sum_{r=1}^{Q}\varphi(x_r) \leqslant \frac{1}{Q}\sum_{r=1}^{Q}f(x_r) \leqslant \frac{1}{Q}\sum_{r=1}^{Q}\Phi(x_r) \leqslant S(T) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 与 $\frac{1}{Q}\sum\limits_{r=1}^{Q}f(x_r)$ 一样, 积分值 $\int_0^1 f(x)dx$ 也属于闭区间 $\left[s(T) - \frac{\varepsilon}{3}, S(T) + \frac{\varepsilon}{3}\right]$, 所以

$$\left|\frac{1}{Q}\sum_{r=1}^{Q}f(x_r) - \int_0^1 f(x)dx\right| \leqslant \Omega(T) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon. \quad ◀$$

注　对于函数可积的条件 1)—5) 还可添加另一个如下形式的等价条件.

6) $\inf\limits_{T}\Omega'(T) = 0$.

▶　实际上, 对于任何 k 都成立估计式 $\omega_k' \leqslant \omega_k$. 由此推出 $\Omega'(T) \leqslant \Omega(T)$. 另一方面, 任意给定 $\varepsilon > 0$ 时, 对于给定的分法 T, 总可添加某些新的点, 使作成的新分法 T_1 满足不等式 $\Omega(T_1) < \Omega'(T) + \varepsilon$. 这表明, 如果 $\inf\limits_{T}\Omega'(T) = 0$ 则亦有 $\inf\limits_{T_1}\Omega(T_1) = 0$.　◀

§6. 积分和方法

积分和方法基于下述引理.

引理 7　*设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 并设 $\{V_n\}$ 是任意的满足以下条件的标码分法序列: 当 $n \to \infty$ 时分法的直径的序列 $\{\Delta_{V_n}\} \to 0$[2]. 那么当 $n \to \infty$ 时*

$$\text{a) } S_n = S(T(V_n)) \to I; \quad \text{b) } s_n = s(T(V_n)) \to I; \quad \text{c) } \sigma_n = \sigma(V_n) \to I.$$

▶　根据积分的定义, 并根据函数黎曼可积的准则, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得若 $\Delta_{V_n} = \Delta_{T(V_n)} < \delta$, 则

$$|\sigma_n - I| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |S_n - I| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |s_n - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

但因当 $n \to \infty$ 时序列 $\{\Delta_{V_n}\}$ 趋于零, 所以在零的 δ 邻域之外只有不多于有限数 $n_0(\delta)$ 多个 Δ_{V_n} 值. 因此在数 I 的 δ 邻域之外, 也只有不多于 $n_0(\delta)$ 个 σ_n 的值, S_n 的值, s_n 的值. 因此

$$I = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}s_n \quad ◀$$

---

[1] 按定义 8.Δ_i 和相邻的 Δ_{0-1}、Δ_{i+1} 在端点处相交, 所以这个不等式在这些端点处未必成立 —— 译者注.

[2] 此处宜写 $\Delta_{V_n} \to 0$ —— 译者注.

例 1. $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$.

由于函数 e^x 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，它在此区间可积. 为了求积分值，剩下的只是选取序列 $\{V_n\}$ 并计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$.

对于 $k=0,\cdots,n$ 置

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n},\quad \xi_k = x_{k-1},\text{①}\quad \Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \Delta,\quad x_k = a + k\Delta.$$

由此，

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{a+k\Delta}\Delta = e^a\Delta\left(1 + e^{\Delta} + \cdots + e^{(n-1)\Delta}\right)$$
$$= e^a\Delta\cdot\frac{1-e^{n\Delta}}{1-e^{\Delta}} = \frac{\Delta}{e^{\Delta}-1}(e^b - e^a).$$

因为当 $n\to\infty$ 时成立等式 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Delta}{e^{\Delta}-1} = 1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = e^b - e^a = \int_a^b e^x dx.$$

2. 设 $0<a<b$. 那么 $\int_a^b \dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$.

取闭区间 $[a,b]$ 的任意一个分法：$a = x_0 < \cdots < x_n = b$，并置 $\xi_k = \sqrt{x_{k-1}x_k}$，$k = 1,\cdots,n$. 那么对于相应的积分和 σ_n 有

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{k-1}x_k}\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}x_k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \int_a^b\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}\right) = l$.

显然有

$$l = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1\frac{dx}{1+x}.$$

由此，根据稍后证明的牛顿–莱布尼茨公式，得 $l = \ln 2$.

特别地，使用此结果求得下面级数的和

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) = \ln 2.$$

①对于 ξ_k, k 取值零是无意义的 —— 译者注.

4. 下面的等式成立:

$$\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx = \begin{cases} 2\pi\ln|\alpha|, \text{若 } |\alpha|>1, \\ 0, \qquad\quad \text{若 } |\alpha|<1. \end{cases}$$

置 $x_k = \frac{\pi k}{n}, \xi_k = x_k, k=1,\cdots,n$; 那么 $\Delta x_k = \frac{\pi}{n}$. 因此

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1-2\alpha\cos x_k+\alpha^2)\frac{\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n} \ln|(\alpha-e^{ix_k})(\alpha-e^{-ix_k})|$$
$$= \frac{\pi}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}|(\alpha-e^{ix_k})(\alpha-e^{-ix_k})| = \pi\ln|\alpha^{2n}-1|\frac{1}{n}.$$

过渡到极限 $n\to\infty$, 即得所求的积分值.

5. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上不减且有界. 那么对于量

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(x+k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(x)dx$$

成立不等式

$$0 \leqslant \delta_n \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{n}(b-a).$$

显然有

$$0 \leqslant \delta_n = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}(b-a)}^{\frac{k}{n}(b-a)} \left[f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)-f(x)\right]dx$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}(b-a)}^{\frac{k}{n}(b-a)} \left[f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)-f\left(a+\frac{k-1}{n}(b-a)\right)\right]dx$$
$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)-f\left(a+\frac{k-1}{n}(b-a)\right)\right] = \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)),$$

此即所欲证者.

6. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有有界的且可积的导函数, 并设符号 δ_n 表示如例 5 中的值. 那么

$$\lim_{n\to\infty} n\delta_n = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)).$$

根据拉格朗日关于有限增量的定理, 在每个闭区间 $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ 上, $k = 1,\cdots,n$, 对于任意的 $x\in\Delta_k$, 存在点 ξ_k 属于开区间 (x_{k-1}, x_k), 使得

$$f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)-f(x) = f'(\xi)\left(a+\frac{k}{n}(b-a)-x\right).$$

设 m_k, M_k 分别是导函数 $f'(x)$ 在闭区间 Δ_k 上的下确界和上确界. 那么 $m_k \leqslant f'(\xi_k) \leqslant M_k$.

从 δ_n 的定义, 有

$$\delta_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}(b-a)+a}^{\frac{k}{n}(b-a)+a} \left(a + \frac{k}{n}(b-a) - x\right) f'(\xi_k) dx.$$

由此推出不等式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} m_k \leqslant \delta_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} M_k.$$

将不等式两边同乘以 n, 并过渡到极限, 就得到所需的极限关系式. 由此, 特别地对于例 3 的数列得到

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} - \ln 2\right) = -\frac{1}{4}.$$

7. 设函数 $p(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续且总取正值. 那么成立不等式

$$\frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{p(x)} dx} \leqslant e^{\int_0^1 \ln p(x) dx} \leqslant \int_0^1 p(x) dx.$$

置 $x_k = \dfrac{k}{n}, k = 0, \cdots, n$. 那么对于相应的积分和, 根据调和平均、几何平均和算术平均之间的不等式, 有

$$\frac{n}{\frac{1}{p(x_1)} + \cdots + \frac{1}{p(x_n)}} \leqslant e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln p(x_k)} = \sqrt[n]{p(x_1)\cdots p(x_n)} \leqslant \frac{p(x_1) + \cdots + p(x_n)}{n}.$$

在这些不等式中过渡到极限 $n \to \infty$ 就得所要求的不等式.

第四讲

§7. 黎曼积分作为沿着基的极限的性质

回忆一下在 §1 末尾给出的, 黎曼积分作为沿着某个基的极限的定义.

设 A 是闭区间 $[a,b]$ 的全体标码分法所成的集合. 集合 A 将是基 B 的基本集. 对于任意的 $\delta > 0$, 这个基 B 的终端 $b = b_\delta \in A$ 乃是由全体直径小于 δ 的标码分法 $V \in A$ 所成的集合. 换言之, 终端 b_δ 是这样给出的:

$$b_\delta = \{V \in A | \Delta_V < \delta\}.$$

和以前一样, 设 $\sigma(V)$ 是对应于标码分法 $V=\{x_0,x_1,\cdots,x_n;\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ 的积分和, 即

$$\sigma(V)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

那么数 $I=\lim\limits_{B}\sigma(V)$ 叫作函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的黎曼积分, 只要 I 存在的话.

换言之, 数 I 是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的积分, 如果对于任意的 $\varepsilon>0$ 都存在数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对于闭区间 $[a,b]$ 的任何标码分法 V, 只要 $\Delta_V<\delta$, 就有 $|I-\sigma(V)|<\varepsilon$.

现设 A' 是闭区间 $[a,b]$ 的全体非标码分法所成的集合. 此集 A' 是基 B' 的基本集, 基 B' 的终端 b'_δ 是全体直径小于 δ 的非标码分法所成的集.

达布上积分和达布下积分的定义 设 $S(T)$ 和 $s(T)$ 分别是对应于非标码分法 T 的达布上和和下和, 且 $\Omega(T)=S(T)-s(T)$. 那么数 $I^*=\inf\limits_{T\in A'}S(T)$ 叫作函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ **上的达布上积分**, 而数 $I_*=\sup\limits_{T\in A'}s(T)$ 叫作**达布下积分**.

任取一个固定的非标码分法 T_0. 用 $\alpha(T_0)$ 代表对应于同一非标码分法 T_0 的全体标码分法 V 所成的集合, 即 T_0 的一切标码所成的集合. 那么, 从 §3 的引理 2 出发, 达布上积分和达布下积分的定义可写成这样:

$$I^*=\inf_{T\in A'}\sup_{V\in\alpha(T)}\sigma(V),\quad I_*=\sup_{T\in A'}\inf_{V\in\alpha(T)}\sigma(V).$$

我们给出上面引入的概念的一些性质.

引理 8 *设标码分法 V 是分法 T_0 的标码, 即 $V\in\alpha(T_0)$. 那么, 若 $V\in b_\delta$, 则*

1) $\alpha(T_0)\subset b_\delta$;

2) $\bigcup\limits_{T_0,\Delta_{T_0}<\delta}\alpha(T_0)=\bigcup\limits_{T_0\in b'_\delta}\alpha(T_0)=b_\delta$.

► 实际上, $\Delta_{T_0}=\Delta_V$. 因此对于任意的标码分法 $V_1\in\alpha(T_0)$ 有 $\Delta_{V_1}=\Delta_V<\delta$. 因此 $\alpha(T_0)\subset b_\delta$. 性质 2) 的验证类似. ◄

现指出基 B 的一些性质, 除了早先指出的:

1) 基的每个终端都不空;

2) 对于任两终端 b_1 和 b_2, 存在终端 $b_3\subset b_1\bigcap b_2$, 这两条性质之外, 下列三条性质也成立:

3) 对于任何终端 b_1 和 b_2, 要么 $b_1\subset b_2$, 要么 $b_2\subset b_1$, 总有一式成立.

4) 回忆沿着集合基的基本序列和单调序列的定义 (见第一部分第 30 讲). 分法序列 $\{V_n\}$ 叫作是**沿着基** B 的**基本序列**, 如果对于任给的终端 $b\in B$, 都仅存在序列的有限多项不属于 b. 基本序列 $\{V_n\}$ 叫作是**沿着基** B 的**单调序列**, 如果对于任何终端 b, 从条件 $V_n\in b$ 必得到 $V_{n+1}\in b$. 作为沿着基 B 的单调序列, 可以取闭区间 $[a,b]$ 的这样一个标码分法序列 $\{V_n\}$, 使得 $T_n=T(V_n)$ 是此区间的 n 等分分法.

5) $\bigcap\limits_{b\in B} b=\varnothing$.

对于沿着基 B 的上、下极限我们引用下述记号:

$$J^*=\overline{\lim_{B}}\sigma(V),\quad J_*=\underline{\lim_{B}}\sigma(V).$$

下述命题成立.

定理 7 *成立不等式*

$$J_*\leqslant I_*\leqslant I^*\leqslant J^*.$$

由此, 根据柯西准则, 得到函数黎曼可积的下述准则.

定理 8 *为使函数黎曼可积, 必要且充分的是成立等式 $J^*=J_*$.*

► 从上积分 I^* 和 J^* 的定义及沿着集合基的上极限的性质 (第一部分第三十讲定理 3), 有

$$\begin{aligned}I^*&=\inf_T S(T)=\inf_T \sup_{V\in\alpha(T)}\sigma(V)=\inf_{\delta>0}\inf_{\Delta_T<\delta}\sup_{V\in\sigma(T)}\sigma(V)\\&\leqslant\inf_{\delta>0}\inf_{\Delta_T<\delta}\sup_{V\in b_\delta}\sigma(V)=\inf_{b_\delta\in B}\sup_{V\in b_\delta}\sigma(V)=\overline{\lim_{B}}\sigma(V)=J^*.\end{aligned}$$

即 $I^*\leqslant J^*$. 类似地得 $J_*\leqslant I_*$. ◄

注 1. 这样一来, 形如 $I^*=I_*$ 的黎曼积分存在的准则, 用沿着基的极限的语言来说, 本质上等价于沿着基当 $\Delta_V\to 0$ 时极限存在的柯西准则.

2. 从沿着基当 $\Delta_T\to 0$ 时按柯西方式的极限概念和按海涅方式的极限概念的等价性推出, 函数可积的充分必要条件是, 对于任何分法序列 $\{V_n\}$, 只要当 $n\to\infty$ 时 $\Delta_{V_n}\to 0$, 积分和序列 $\{\sigma(V_n)\}$ 都是收敛序列. 从另一方面来说, 先前证明了的特殊的可积准则说的是, 这里只消限制于一个积分区间的等分序列即可. 此时, 所考察的基的特殊性是 $\Delta_{T_n}\to 0$.

我们来加强定理 7. 我们证明积分和沿着基的上极限与达布上积分是相等的. 为此需要一些引理.

引理 9 *设函数 $f(x)$ 的绝对值在闭区间 $E=[a,b]$ 上不超过数 M. 设 T 是此区间的一个直径 $\delta>0$ 的分法. 还设分法 T_1 是由对 T 添加一个点所得的分法. 那么对于达布上和 $S(T)$ 和 $S(T_1)$ 的差有估计式*

$$|S(T_1)-S(T)|\leqslant 2M\delta.$$

► 考察分法 T 的那个含有不属于自身而属于 T_1 的点 t 的间隔 $E_0=[a_0,b_0]$. 那么点组 $\tau=\{a_0<b_0\}$ 和 $\tau_1=\{a_0<t<b_0\}$ 都可看作闭区间 E_0 的非标码分法. 设 $S(\tau)$ 和 $S(\tau_1)$ 是在此区间上的达布上和. 那么从定义推出

$$S(T_1)-S(T)=S(\tau_1)-S(\tau).$$

由此

$$|S(T_1)-S(T)|=|S(\tau_1)-S(\tau)|\leqslant|S(\tau_1)|+|S(\tau)|\leqslant M\delta+M\delta=2M\delta. \quad ◀$$

引理 10 若在引理 9 的条件下, 分法 T_1 由对分法 T 添加不多于 n 个点得到, 则成立

$$|S(T_1)-S(T)|\leqslant 2M\delta n.$$

引理 10 之真确性由 n 次使用引理 9 而得到.

引理 11 设闭区间 $E=[a,b]$ 的分法 T 满足引理中的条件, 而同一区间的分法 T_1 含有的内点数目不多于 n. 那么成立不等式

$$S(T)\leqslant S(T_1)+2M\delta n.$$

► 考虑分法 $T_2=T\bigcup T_1$. 那么根据达布上和的基本性质, 成立不等式

$$S(T_2)\leqslant S(T),\quad S(T_2)\leqslant S(T_1).$$

再有, 使用引理 10 于和式 $S(T)$ 和 $S(T_2)$, 得

$$S(T)-S(T_2)\leqslant 2M\delta n.$$

由此得

$$S(T)\leqslant S(T_2)+2M\delta n\leqslant S(T_1)+2M\delta n. \quad ◀$$

定理 9 设函数 $f(x)$ 的绝对值在闭区间 $E=[a,b]$ 上不超过数 $M>0$. 还设 I^* 是函数 $f(x)$ 的达布上积分而 $\sigma(V)$ 代表对应于闭区间 E 的标码分法 V 的积分和. 还设 $J^*=\lim\limits_{\Delta_V\to 0}\sigma(V)$, 那么 $J^*=I^*$.

注 根据函数的有界性, 数 I^* 和 J^* 都存在.

► 用 $T(V)$ 代表闭区间 E 的从标码分法 V 去掉标码点而得到的非标码分法, 而用 $\alpha(T_0)$ 代表全体满足条件 $T(V)=T_0$ 的标码分法的集合.

那么, 直接从定义和沿着基的上极限的性质, 以及从引理 8 推出.

$$\begin{aligned}
S(T)&=\inf_{\Delta_T<\delta}\sup_{V\in\alpha(T)}\sigma(V),\quad I^*=\inf_T S(T)=\inf_{\delta>0}\inf_{\Delta_T<\delta}S(T),\\
J^*&=\varlimsup_{\Delta_V\to 0}\sigma(V)=\inf_{\delta>0}\sup_{\Delta_T<\delta}\sigma(V)\\
&=\inf_{\delta>0}\sup_{\Delta_T<\delta}\sup_{V\in\alpha(T)}\sigma(V)=\inf_{\delta>0}\sup_{\Delta_T<\delta}S(T).
\end{aligned}$$

于是总成立不等式

$$I^*=\inf_{\delta>0}\inf_{\Delta_T<\delta}S(T)\leqslant\inf_{\delta>0}\sup_{\Delta_T<\delta}S(T)=J^*.$$

我们要证的是 $I^* = J^*$. 我们发现, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 数 $I^* + \varepsilon$ 已不是值 $S(T)$ 的集合的下界, 因此存在分法 T_0 使得

$$I^* \leqslant S(T_0) \leqslant I^* + \varepsilon.$$

我们还看到, 量 $\sup\limits_{\Delta_T<\delta} S(T)$ 作为 δ 的函数是非减的. 因此, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得对于任何满足条件 $0 < \delta < \delta_0$ 的 δ 都有

$$J^* \leqslant \sup_{\Delta_T<\delta} S(T) \leqslant J^* + \varepsilon.$$

由此, 特别地推出, 存在满足条件 $\Delta(T_1) < \delta$ 的分法 T_1 使得

$$J^* - \varepsilon \leqslant S(T_1) \leqslant J^* + \varepsilon.$$

用 n 代表分法 T_0 的内点个数. 那么根据引理 11, 成立估计式

$$S(T_1) \leqslant S(T_0) + 2M\delta n.$$

因此

$$J^* - \varepsilon \leqslant S(T_1) \leqslant S(T_0) + 2M\delta n < I^* + \varepsilon + 2M\delta n.$$

所以成立不等式

$$0 \leqslant J^* - I^* < 2\varepsilon + 2M\delta n.$$

但由于数 $\varepsilon > 0$ 和 $0 < \delta < \delta_0$ 可以选取得任意小, 所以 $J^* - I^* = 0, J^* = I^*$. ◀

定理 9 的推论 *成立等式 $J_* = I_*$.*

► 考虑函数 $g(x) = -f(x)$. 则按定理 9 有 $J^*(g) = I^*(g)$. 但 $J^*(g) = -J_*(f)$, 且 $I^*(g) = -I_*(f)$. 所以 $J_*(f) = I_*(f)$. ◀

§8. 黎曼可积函数类

我们来证明闭区间上的任何连续函数和任何单调函数都在此区间上可积.

定理 10 *闭区间上的连续函数在此区间上可积.*

► 根据康托尔定理. 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 是在此区间上一致连续的. 因此, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得对于满足条件 $|x-y| < \delta$ 的点 $x, y \in [a,b]$ 成立不等式

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

取闭区间 $[a,b]$ 的任意一个直径 $\Delta_T < \delta$ 的分法 T. 那么有

$$\omega_k = \sup_{x,y\in\Delta_k} (f(x) - f(y)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

由此得到

$$\Omega(T)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

因此, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 我们找到了 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对于任何直径 $\Delta_T<\delta$ 的分法 T 成立不等式 $\Omega(T)<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{\Delta_T\to 0}\Omega(T)=0$. 由此根据可积准则推出, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积. ◄

定理 11 任何在闭区间 $[a,b]$ 上有界且单调的函数皆在此区间上可积.

► 不伤一般性, 可仅考察函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上非减的情形. 给定任意的数 $\varepsilon>0$ 并置

$$\delta=\frac{\varepsilon}{f(b-)-f(a+)+1},$$
$$\omega_k=\sup_{x,y\in\Delta_k}(f(x)-f(y))=f(x_k-)-f(x_{k-1}+).$$

那么对于任意的分法 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 只要直径 $\Delta_T<\delta$, 就有

$$\Omega(T)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k\leqslant\delta\sum_{k=1}^{n}\omega_k\leqslant\delta(f(b)-f(a))<\varepsilon.$$

我们这样就得到了 $\lim\limits_{\Delta_T\to 0}\Omega(T)=0$, 从而, 根据可积准则, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积. ◄

定理 12 任何在闭区间 $[a,b]$ 上有界, 除去有限多个间断点外, 处处连续的函数在此区间上可积.

► 根据函数可积的准则 $\inf\limits_{T}\Omega(T)=0$, 只要对于任意的 $\varepsilon>0$ 都构作分法 T 使 $\Omega(T)<\varepsilon$ 就可以了.

设 $f(x)$ 的间断点的数目是 m 且 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 把每个间断点 $d_s, s=1,\cdots,m$ 都用形如 $\Delta_k=\left(d_s-\dfrac{\varepsilon}{8Mm},d_s+\dfrac{\varepsilon}{8Mm}\right)$ 的邻域包起来, 那么在闭区间

$$\Delta_r=\left[d_{r-1}+\frac{\varepsilon}{8Mm},d_r-\frac{\varepsilon}{8Mm}\right],r=1,\cdots,m+1,d_0=a,d_{m+1}=b$$

的每个当中函数 $f(x)$ 都是连续的, 从而根据康托尔定理, 是一致连续的. 因此, 可选取数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对于任意的属于同一个这样的小区间的点 x,y, 只要 $|x-y|<\delta$ 就有 $|f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 设 T_0 是 $[a,b]$ 的任意一个直径 $\Delta_{T_0}<\delta$ 的分法. 把分法 T_0 与前面构作的间断点的邻域联合起来, 得到 $[a,b]$ 的一个分法 T.

那么

$$\Omega(T)=\Omega_1+\Omega_2,$$
$$\Omega_1=\sum_{k=1}^{m}\omega_k\Delta x_k\leqslant 2Mm\cdot\frac{\varepsilon}{4Mm}=\frac{\varepsilon}{2},$$
$$\Omega_2=\sum_{\Delta_k\in T_0}\omega_k\Delta x_k\leqslant(b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是 $\Omega(T)<\varepsilon$. ◀

第五讲

§9. 定积分的性质

我们来考察与在给定的固定的闭区间上的可积性相联系的积分的性质. 在闭区间 $[a,b]$ 上的可积函数的全体所成的集合用符号 $R[a,b]$ 来代表, 或简记为 IR.

命题 1 设函数 $f(x)$ 仅有 l 个点处不等于零. 那么 $f\in IR$ 且

$$\int_a^b f(x)dx=0.$$

► 设 $M=\max|f(x)|$. 任取 $\varepsilon>0$ 并置 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2Ml}$. 对于任意的标码分法 V, 只要 $\Delta_V<\delta$ 就有

$$|\sigma(V)|=\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|\leqslant l\cdot\frac{\varepsilon}{2Ml}\cdot M=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

我们用到了如下事实: 在和式 $\sigma(V)$ 中只有不多于 l 个被加项异于零, 且 $\Delta x_k<\delta$. 根据数 $\varepsilon>0$ 的选取的任意性, 得

$$\lim_{\Delta_V\to 0}\sigma(V)=0 \quad ◀$$

命题 2 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积. 那么

1) 函数 $f(x)+g(x)\in R[a,b]$ 且

$$\int_a^b(f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx;$$

2) 对于任意的实数 k, 函数 $kf(x)\in R[a,b]$ 且

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx.$$

► 由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 且对于任意的标码分法 $V: a=x_0<\xi_1<x_1<\cdots<\xi_n<x_n=b$ 成立等式

$$\sigma_f(V)+\sigma_g(V)=\sigma_{f+g}(V),$$

所以, 令 $\Delta_V\to 0$ 就看到等式左边的极限存在, 从而右边的极限亦存在, 即函数 $f(x)+g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 此外还有等式

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

在第 2) 种情形下, $\sigma_{kf}(V)=k\sigma_f(V)$. 由此推出函数 $kf(x)$ 的可积性以及等式

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx. \quad ◄$$

命题 3　1) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积且不取负值. 那么

$$\int_a^b f(x)dx\geqslant 0.$$

2) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积且不取负值, 并设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续且 $f(x_0)>0$. 那么

$$\int_a^b f(x)dx>0.$$

► 1) 对于任意的标码分法 V, 作积分和 $\sigma(V)$. 此和非负, 因此作为积分和的极限的积分值非负.

2) 由于 x_0 是连续点, 且 $f(x_0)>0$, 所以存在数 $\delta>0$, 使当 $|x-x_0|<\delta$ 且 $x\in[a,b]$ 时 $f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}$. 任取直径 $\Delta_V<\dfrac{\delta}{2}$ 的标码分法 V. 那么在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\bigcap[a,b]$ 中必整个含有分法 V 的某些间隔, 其长度之和不小于 δ. 由此得

$$\sigma(V)\geqslant\frac{\delta f(x_0)}{2}>0. \quad ◄$$

命题 4　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且非负, 而且 $\int_a^b f(x)dx=0$. 那么对于所有的 $x\in[a,b]$ 有 $f(x)=0$.

► 用反证法. 假设存在 $x_0\in[a,b]$ 使 $f(x_0)>0$. 那么由命题 3 断定 $\int_a^b f(x)dx>0$. 这与条件 $\int_a^b f(x)dx=0$ 相矛盾. ◄

命题 5　设 $a<b$ 且在闭区间 $[a,b]$ 上成立不等式 $f(x)\geqslant g(x)$. 那么有[①]

$$\int_a^b f(x)dx\geqslant\int_a^b g(x)dx.$$

①这里当然应该先说 $f\in R[a,b], g\in R[a,b]$ —— 译者注.

► 考察 $h(x)=f(x)-g(x)\geqslant 0$. 从命题 3 推出 $\int_a^b h(x)dx\geqslant 0$, 而从命题 2 推出

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b (h(x)+g(x))dx=\int_a^b h(x)dx+\int_a^b g(x)dx\geqslant\int_a^b g(x)dx. \quad ◄$$

命题 6 设 $a<b$ 且在闭区间 $[a,b]$ 上成立不等式 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 那么

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a).$$

命题 6 是命题 5 的直接推论.

命题 7 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 那么函数 $|f(x)|$ 也在此区间上可积且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|dx.$$

► 由于 $|f(x)-f(y)|\geqslant|f(x)|-|f(y)|$, 所以

$$\sup_{x,y\in\Delta_k}|f(x)-f(y)|\geqslant\sup_{x,y\in\Delta_k}(|f(x)|-|f(y)|).$$

因此 $\omega_k(f)\geqslant\omega_k(|f|)$. 由此, 对于任何分法 T 皆有

$$\Omega_f(T)\geqslant\Omega_{|f|}(T).$$

根据函数 $f(x)$ 在闭区 $[a,b]$ 上可积这一条件, 存在分法 T 使 $\Omega_f(T)<\varepsilon$. 由此得 $\Omega_{|f|}(T)<\varepsilon$. 根据可积准则这表明函数 $|f(x)|$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积.

由于成立不等式

$$-|f(\xi)|\leqslant f(\xi)\leqslant|f(\xi)|,$$

所以对于任何标码分法 V 都有

$$-\sigma_{|f|}(V)\leqslant\sigma_f(V)\leqslant\sigma_{|f|}(V).$$

在最后的不等式中过渡到极限, 得

$$-\int_a^b |f(x)|dx\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b |f(x)|dx,$$

即 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|dx$. ◄

命题 8 设 $f(x)\in R[a,b]$. 那么 $f^2(x)\in R[a,b]$.

► 用 M 代表函数 $|f(x)|$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的上确界. 那么, 成立不等式

$$|f^2(x)-f^2(y)|\leqslant 2M|f(x)-f(y)|,$$

从而 $\omega_k(f^2) \leqslant 2M\omega_k(f)$. 由此得

$$\Omega_{f^2}(T) \leqslant 2M\Omega_f(T).$$

根据可积准则, 这表明函数 $f^2(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积. ◀

命题 9　设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上可积. 那么它们的乘积 $f(x)g(x)$ 也在闭区间 $[a,b]$ 上可积.

▶　我们有

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2].$$

故从命题 8 和命题 2 推出函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的乘积在闭区间 $[a,b]$ 上可积. ◀

定理 13 (关于复合函数的可积性)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. 并设 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[m,M]$ 上连续. 那么复合函数 $h(x) = \varphi(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上可积.

▶　任取 $\varepsilon > 0$. 根据函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[m,M]$ 上的一致连续性, 知存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得只要 $x_1, x_2 \in [m,M]$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$. 而根据函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的准则, 找得到此区间的分法 T, 使得

$$\Omega_f(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k < \varepsilon\delta,$$

其中 $\omega_k(f)$ 是函数 $f(x)$ 在分法 T 的区间 Δ_k 上的振幅.

把分法 T 的全部小区间 $\Delta_k, k = 1, \cdots, n$, 分成两类, 使 $\omega_k(f) < \delta$ 的作成第一类. 在这些小区间上同样成立 $\omega_k(h) < \varepsilon$. 把分法 T 的其他的区间, 即满足 $\omega_k(f) \geqslant \delta$ 的那些区间, 归入第二类, 与这些区间相联系, 和 $\Omega_h(T)$ 表示成 $\Omega_h(T) = \Omega_1 + \Omega_2$, 其中

$$\Omega_1 = \sum_k{}' \omega_k(h)\Delta x_k, \quad \Omega_2 = \sum_k{}'' \omega_k(h)\Delta x_k,$$

这里在 Ω_1 的和式中的一撇表示, 求和是关于分法 T 的属于第一类的区间 Δ_k 的脚标 k 而取的, 而在 Ω_2 的和式中的两撇表示求和是关于分法 T 的属于第二类的区间 Δ_k 的脚标 k 而取的.

从和式 Ω_1 的定义有

$$\Omega_1 = \sum_k{}' \omega_k(h)\Delta x_k < \varepsilon \sum_k{}' \Delta x_k \leqslant \varepsilon(b-a).$$

我们来估计属于第二类的区间 Δ_k 的长度之和的上界. 我们有

$$\delta \sum_k{}'' \Delta x_k \leqslant \sum_k{}'' \omega_k(f)\Delta x_k \leqslant \sum_k \omega_k(f)\Delta x_k = \Omega_f(T) < \delta\varepsilon.$$

因此 $\sum\limits_k{}''\Delta x_k < \varepsilon$.

设 $C = \max\limits_{x\in[m,M]}|\varphi(x)|$. 那么对于和式 Ω_2 得到估计式

$$\Omega_2 = \sum_k{}''\omega_k(h)\Delta x_k \leqslant 2C\sum_k{}''\Delta x_k \leqslant 2C\varepsilon.$$

于是, $\Omega_h(T) < \varepsilon(b-a+2C)$. 那么根据数 $\varepsilon > 0$ 的取法的任意性, 得关系式 $\inf\limits_T\Omega_h(T) = 0$. 根据可积准则, 这表明函数 $h(x) = \varphi(f(x))$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积. ◀

§10. 黎曼积分的可加性

积分的可加性由下面的命题来表述.

定理 14 *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积. 那么对于任意的 $c \in [a,b]$, 它也有闭区间 $[a,b]$ 和 $[c,b]$ 上可积. 反之, 若 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上可积, 则它在 $[a,b]$ 上可积, 且*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

▶ 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积. 那么根据可积准则, 有 $\inf\limits_T\Omega(T) = 0$, 即对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在分法 T 使得 $\Omega(T) < \varepsilon$. 考虑闭区间 $[a,b]$ 的分法 $T_0 = T\bigcup\{c\}$. 得到 $\Omega(T_0) \leqslant \Omega(T) < \varepsilon$. 分法 T_0 可以表示为闭区间 $[a,b]$ 的分法 T_1 和闭区间 $[c,b]$ 的分法 T_2 的并, 因此

$$\Omega(T_1) + \Omega(T_2) = \Omega(T_0) < \varepsilon.$$

从而

$$\Omega(T_1) < \varepsilon, \quad \Omega(T_2) < \varepsilon.$$

根据函数可积的下确界准则, 由此推出 $f(x)$ 在闭区间 $[a,c]$ 上可积, 亦在闭区间 $[c,b]$ 上可积.

现设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积. 那么对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在闭区间 $[a,c]$ 的分法 T_1 和闭区间 $[c,b]$ 的分法 T_2, 使得 $\Omega(T_1) < \dfrac{\varepsilon}{2}, \Omega(T_2) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 因此, 对于闭区间 $[a,b]$ 的分法 $T = T_1\bigcup T_2$ 有

$$\Omega(T) = \Omega(T_1) + \Omega(T_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由此, 根据函数 $f(x)$ 可积的下确界准则, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 取闭区间 $[a,c]$ 的任意的标码分法 V_1 和闭区间 $[c,b]$ 的任意的标码分法 V_2, 并作成闭区间 $[a,b]$ 的标码分法 $V = V_1\bigcup V_2$. 有等式

$$\sigma(V) = \sigma(V_1) + \sigma(V_2).$$

在此式中过渡到极限 $\Delta_V \to 0$, 就得等式 (1). ◄

作为定义, 我们令

$$\int_a^a f(x)dx = \int_b^b f(x)dx = 0.$$

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[c,a]$ 上可积, 那么对于 $c<a$, 作为定义, 认为

$$\int_a^c f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx.$$

根据这些定义, 定理的结论可这样改写.

推论　设 $x_0 < x_1, a, b, c \in [x_0, x_1]$ 且函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_0, x_1]$ 上可积, 那么

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0.$$

这里, 同样断言在所示的以 a,b,c 为端点的闭区间中积分存在.

为了证明等式成立, 根据等式关于点 a,b,c 的对称性, 只消考虑 $a<c<b$ 这一种情形. 而这恰与定理的结论完全重合.

第八章　黎曼积分理论的基本定理

第六讲

§1. 黎曼积分作为其积分上限 (下限) 的函数. 积分的导数

在第七章中证明了, 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 则对于任何 $x \in [a,b]$, 它都在闭区间 $[a,x]$ 上可积, 那么, 存在函数

$$F(x) = \int_a^x f(u)du.$$

我们来证明这个函数的一些性质.

定理 1 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积. 那么 $F(x) = \int_a^x f(u)du$ 是此区间上的连续函数.

► 从函数 $f(x)$ 的可积性推出, 它在闭区间 $[a,b]$ 上有界, 即存在常数 $M > 0$ 使得对于一切 $x \in [a,b]$ 成立不等式 $|f(x)| \leqslant M$. 取任意的点 $x, x+\Delta x \in [a,b]$, 有

$$|\Delta F(x)| = |F(x+\Delta x) - F(x)| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(u)du\right| \leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} |f(u)|du\right| \leqslant M|\Delta x|.$$

给定任意的 $\varepsilon > 0$. 那么对于任何满足 $|\Delta x| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ 的 Δx 有 $|\Delta F(x)| < \varepsilon$. 因此当 $\Delta x \to 0$ 时 $\Delta F(x)$ 是无穷小量. 可见函数 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. ◄

定理 2 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 且在此区间的内点 x_0 处连续, 那么 $F(x)=\int_a^x f(u)du$ 在点 $x=x_0$ 处可微, 且 $F'(x_0)=f(x_0)$.

► 根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的连续性, 对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对于一切 u 满足 $|u-x_0|<\delta$ 者成立不等式

$$f(x_0)-\varepsilon<f(u)<f(x_0)+\varepsilon.$$

任取 $0<|\Delta x|<\varepsilon$, 使具端点 x_0 和 $x_0+\Delta x$ 的闭区间包含在闭区间 $[a,b]$ 内. 积分上面的不等式, 得

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(x_0)-\varepsilon)du\leqslant\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}\leqslant\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(x_0)+\varepsilon)du.$$

也就是说, 对于任意的满足 $0<|\Delta x|<\delta$ 的 Δx, 成立不等式

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

由此得知

$$F'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=f(x_0).\quad ◄$$

§2. 牛顿–莱布尼茨定理

欧拉求和公式. 阿贝尔求和公式

人们把牛顿–莱布尼茨公式叫作积分学基本定理, 因为它把定积分和不定积分的概念联系了起来.

定理 3 (牛顿–莱布尼茨公式) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界且只有有限多个间断点. 那么函数 $F(x)=\int_a^x f(u)du$ 是函数在闭区间 $[a,b]$ 上的原函数, 且对于任何原函数 $\Phi(x)$ 成立公式

$$\int_a^b f(u)du=\Phi(b)-\Phi(a).$$

► 从上一节的定理 1 和定理 2 推出, 函数 $F(x)=\int_a^x f(u)du$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且在函数 $f(x)$ 的一切连续点处 $F(x)$ 有导数且导数等于 $f(x)$. 因此, 函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的原函数, 此外, 成立公式

$$\int_a^b f(u)du=F(b)=F(b)-F(a),\quad F(a)=\int_a^a f(u)du=0.$$

设 $\Phi(x)$ 是函数 $f(x)$ 的任意的一个原函数. 那么, 根据原函数的性质, 存在常数 c 使 $\Phi(x)=F(x)+c$. 因此成立等式

$$\Phi(b)-\Phi(a)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(u)du.\quad ◄$$

作为牛顿–莱布尼茨公式的应用, 我们引入欧拉求和公式和阿贝尔求和公式.

定理 4 (欧拉求和公式) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数, $\rho(x)=\frac{1}{2}-\{x\}$. 那么对于任意的 $x\in[a,b]$, 成立公式

$$\sum_{a<n\leqslant x} f(n)-\rho(x)f(x)=\int_a^x f(u)du-\int_a^x \rho(u)f'(u)du-\rho(a)f(a).$$

► 把此等式的左边记作 $G(x)$. 易见, 函数 $G(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 实际上, 如果数 x 不是整数, 则函数 G 在点 x 处可微. 而若 $x=n$ 是整数, 当 y 从左到右经过点 x 时, $G(y)$ 的表达式中的和式 $\sum\limits_{a<k\leqslant y} f(k)$ 增加 $f(n)$, 而函数 $\rho(y)f(y)$ 要减少 $f(n)$, 所以和式 $\sum\limits_{a<k\leqslant y} f(k)$ 的跳跃与函数 $\rho(y)f(y)$ 的跳跃恰好抵消. 因此可以使用牛顿–莱布尼茨公式. 那么在非整数 x 处有

$$\begin{aligned}G(x)&=G(a)+\int_a^x G'(u)du=-\rho(a)f(a)+\int_a^x(-\rho(u)f(u))'du\\&=-\rho(a)f(a)+\int_a^x f(u)du-\int_a^x\rho(u)f'(u)du.\end{aligned}$$ ◄

这个公式的重要性在于, 它可用来近似地把求和改变成积分. 我们发现, 取半整数作为求和的限常常是方便的.

例 (简化的斯特林公式) 对于 $n\geqslant 2$ 成立不等式

$$\frac{1}{5}\leqslant\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\leqslant 5.$$

实际上, 从欧拉求和公式得

$$\begin{aligned}\ln n!&=\sum_{0.5<m\leqslant n+0.5}\ln m\\&=\int_{0.5}^{n+0.5}\ln t dt-\int_{0.5}^{n+0.5}\frac{\rho(t)}{t}dt\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-n-r(n).\end{aligned}$$

我们来估计量 $r(n)=\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{\rho(t)}{t}dt$. 置 $\sigma(t)=\int_0^t\rho(u)du$. 那么 $|\sigma(t)|\leqslant\frac{1}{8}$①. 而且

$$r(n)=\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{\rho(t)}{t}dt=\left.\frac{\sigma(t)}{t}\right|_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{\sigma(t)}{t^2}dt.$$

①不难算出 $0\leqslant\sigma(t)\leqslant\frac{1}{8}$, 且在半整点处 σ 取值 $\frac{1}{8}$ —— 译者注.

因此, 成立估计式 $|r(n)| < 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. 于是我们得到

$$\ln n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\ln 2 - n - r(n),$$

$$\left|\ln n! - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n\right| \leqslant \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\ln 2 + |r(n)| < \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{9}{8} < \ln 5.$$

对此不等式取指数, 就得到所述的估计式.

我们发现, 当定理 4 中的求和限取整数时, 它可以改写成稍许不同的形式.

定理 5 *设 a 和 b 都是整数且函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数. 那么成立下述公式:*

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(a) + \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \{x\}f'(x)dx.$$

► 由于 a, b 是整数, 所以 $\rho(a) = \rho(b) = \frac{1}{2}$. 此外,

$$\int_a^b \rho(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f(b) - \frac{1}{2}f(a) - \int_a^b \{x\}f'(x)dx.$$

把所得的表达式代入定理 4 的公式中, 就得到定理 5 的结论. ◄

例 对于整数 $N \geqslant 1$ 成立关系式

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2N} + \frac{1}{12N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right).$$

根据定理 5, 得

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \int_1^N \frac{dx}{x} - \int_1^N \frac{\{x\}}{x^2}dx$$
$$= \ln N + 1 - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2}dx + \int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^2}dx.$$

用 γ 代表以下表达式: $\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2}dx$. 我们有

$$s_N = \ln N + \gamma + \frac{1}{2}\int_N^\infty \frac{dx}{x^2} - \int_N^\infty \frac{\rho(x)}{x^2}dx$$
$$= \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \int_N^\infty \frac{d\sigma(x)}{x^2},$$

其中 $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \sigma(x) = \int_0^x \rho(t)dt$. 用分部积分法计算最后的积分, 得

$$s_N = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \frac{\sigma(N)}{N^2} + 2\int_N^\infty \frac{\sigma(x)}{x^3}dx.$$

最后, 令 $\sigma_0(x) = \sigma(x) - \frac{1}{12}, \sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t)dt$. 显然有 $\sigma_1(N) = \int_0^N \sigma_0(t)dt = 0$. 在关于 s_N 的最后的公式中再用分部积分法计算积分, 得到

$$s_N = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6}\int_N^\infty \frac{dx}{x^3} + 2\int_N^\infty \frac{d\sigma_1(t)}{t^3}.$$

由此求得所需的关于 s_N 的公式.

现在来证明阿贝尔求和公式.

定理 6 设函数 $f(x)$ 在闭区间上有连续导函数且设 $A(x) = \sum_{a<m\leqslant x} \alpha_m$. 那么对于任何 $x \in [a,b]$ 皆成立

$$\sum_{a<n\leqslant x} \alpha_n f(n) - A(x)f(x) = -\int_a^x A(t)f'(t)dt.$$

► 用 $G(x)$ 代表等式的左边. 类似于定理 5 的证明, 函数 $G(x)$ 在非整点处有导数, 且导函数在非整点处连续. 而在整点处函数 G 连续, 我们还见到, 在 x 取非整数值时 $A'(x) = 0$. 因此, 在非整数 x 处对函数 G 求导得 $G'(x) = -A(x)f'(x)$, 而等式右边的导函数也等于这个函数. 故从牛顿–莱布尼茨公式得到待证的等式. ◄

第七讲

§3. 定积分的变量变换公式与分部积分公式

变量变换公式与分部积分法在积分的计算中起着重要的作用, 这些算法都是牛顿–莱布尼茨公式的推论, 下述命题成立

定理 7 (关于变量变换的定理) 设函数 $f(x)$ 在某闭区间 $[x_0, x_1]$ 上连续. 还设点 $a, b \in [x_0, x_1], a < b, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ 且函数 $\varphi(t)$ 当 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 时的值的集合是闭区间 $[x_0, x_1]$ 的子集合. 此外, 设导函数 $\varphi'(t)$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续. 那么成立公式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

► 由于函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 所以根据牛顿–莱布尼茨定理, 它有原函数 $F(x)$, 且 $F'(x) = f(x), \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

对于一切 $t \in [\alpha, \beta]$, 根据定理的条件, 函数 $G(t) = F(\varphi(t))$ 有定义, 且在此闭区间上有导数, 而且

$$G'(t) = F_t'(\varphi(t)) = F_\varphi'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

这表明, 函数 $G(t)$ 是函数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的原函数. 因此成立等式

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \quad ◀$$

定理 8 (分部积分公式) 设在闭区间 $[a,b]$ 上给定光滑函数 $f(x)$ 和 $g(x)$. 那么有

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

其中符号 $h(x)|_a^b$ 代表差 $h(b) - h(a)$.

► 设 $h(x) = f(x)g(x)$, 那么

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

因此

$$\int_a^b h'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

根据牛顿–莱布尼茨定理,

$$\int_a^b h'(x)dx = h(b) - h(a) = f(x)g(x)|_a^b.$$

把此式代入前式, 便得所求之公式. ◀

§4. 关于积分中间值的第一定理和第二定理

定理 9 (第一中值定理) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积. 还设在此区间上函数 $g(x)$ 非负, 而对于函数 $f(x)$ 有不等式 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 对于两常数 $m \leqslant M$ 成立. 那么存在满足条件 $m \leqslant \mu \leqslant M$ 的实数 μ, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

► 由于不等式

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

成立, 所以将其积分便得

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx. \tag{1}$$

由于 $g(x) \geqslant 0$ 所以 $\int_a^b g(x)dx \geqslant 0$. 那么, 如果 $\int_a^b g(x)dx = 0$, 则从不等式 (1) 得到

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 = \int_a^b g(x)dx.$$

从而数 μ 可取作 m.

如果 $\int_a^b g(x)dx > 0$, 那么

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

令两个积分的比值为 μ. 那么有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

其中 $m \leqslant \mu \leqslant M$. ◄

推论 1 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 还设函数 $g(x)$ 在此区间上非正, 而对于函数 $f(x)$ 有不等式 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 对于两常数 $m \leqslant M$ 成立. 那么存在满足条件 $m \leqslant \mu \leqslant M$ 的实数 μ, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

► 置 $g_1(x) = -g(x)$. 则函数 $f(x)$ 和 $g_1(x)$ 满足定理 9 的条件, 从而有等式

$$\int_a^b f(x)g_1(x)dx = \mu \int_a^b g_1(x)dx,$$

其中 $m \leqslant \mu \leqslant M$. 在此等式中代入 $g_1(x) = -g(x)$, 就得推论之结论. ◄

推论 2 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续两函数 $g(x)$ 在此区间上可积且非负, 那么存在点 $c \in [a,b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

► 根据关于闭区间上连续函数的中间值的柯西定理, 存在点 $c, a \leqslant c \leqslant b$, 使得 $\mu = f(c), m \leqslant \mu \leqslant M$. 由此根据定理 9 得到推论的断言. ◄

推论 3 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 那么在闭区间 $[a,b]$ 上存在点 c 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

► 该论断从推论 2 对于 $g(x) \equiv 1$ 得出. ◄

注 函数在闭区间 $[a,b]$ 上的算术平均值趋于量

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

因此把此积分叫作函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的平均值.

定理 10 (第二中值定理) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积. 并设函数 $g(x)$ 在此区间上非负且不减, 那么在闭区间 $[a,b]$ 上存在点 c 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_a^b f(x)dx.$$

► 考虑一列分法 $T_n : a = x_0 < \cdots < x_n = b$, 其满足条件: T_n 的直径等于 δ_n, 当 $n \to \infty$ 时 $\delta_n \to 0$. (例如: 总可认为闭区间 $[a,b]$ 的分法 T_n 是 n 等分分法, 从而 $\delta_n = \dfrac{b-a}{n}$). 置

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx, \quad M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$
$$\omega_k(g) = \sup_{x',x''\in\Delta k} |g(x') - g(x'')| = g(x_k) - g(x_{k-1}).$$

于是

$$\left|\sigma_n - \int_a^b f(x)g(x)dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (g(x_k) - g(x))f(x)dx\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega_k(g)\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|dx \leqslant M\delta_n \sum_{k=1}^{n}\omega_k(g) \leqslant M\delta_n g(b).$$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

由于积分作为下限的函数是连续的, 函数 $F(x) = \int_x^b f(t)dt$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且在其点 α 和点 β 处分别达到它的最小值和最大值.

我们变换和式 σ_n. 有

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\left(\int_{x_{k-1}}^{b} f(x)dx - \int_{x_k}^{b} f(x)dx\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)(F(x_{k-1}) - F(x_k)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{k+1})F(x_k) - \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)F(x_k) \\
&= g(x_1)F(a) + \sum_{k=1}^{n-1}(g(x_{k+1}) - g(x_k))F(x_k).
\end{aligned}$$

由于对于一切 $x \in [a,b]$ 成立不等式

$$F(\alpha) \leqslant F(b) \leqslant F(\beta), \quad g(b) \geqslant 0,$$

且函数 $g(x)$ 非负, 不减, 所以从对于 σ_n 的最后的等式得到

$$F(\alpha)g(b) \leqslant \sigma_n \leqslant F(\beta)g(b).$$

令 $n\to\infty$ 过渡到极限, 得

$$F(\alpha)g(b)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant F(\beta)g(b).$$

由于函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 那么根据关于中间值的柯西定理, 存在点 $c\in[a,b]$ 使得

$$g(b)F(c)=\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_c^b f(x)dx.\quad ◀$$

定理 11 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 还设函数 $g(x)$ 在此区间上非负且非增. 那么在闭区间 $[a,b]$ 上存在点 c 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^c f(x)dx.$$

► 置 $x_1=-x, f_1(x_1)=f(-x), g_1(x_1)=g(-x)$. 那么根据 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上非增知函数 $g_1(x_1)$ 在闭区间 $[-b,-a]$ 上不减. 因此, 对函数 $f_1(x_1)$ 和 $g_1(x_1)$ 可使用定理 10. 由此推出, 在闭区间 $[-b,-a]$ 上存在点 $-c$, 使

$$\int_{-b}^{-a} f_1(x_1)g_1(x_1)dx_1=g_1(-a)\int_{-c}^{-a} f_1(x_1)dx_1.$$

在此式中作变量变换 $x=-x_1$, 得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^c f(x)dx.\quad ◀$$

推论 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 还设函数 $g(x)$ 在此区间上单调. 那么在闭区间 $[a,b]$ 上存在点 c 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^c f(x)dx+g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

► 先设函数 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上不减. 那么函数 $g_1(x)=g(x)-g(a)$ 在此区间上是不减的而且非负. 因此, 根据定理 10 有

$$\int_a^b f(x)g_1(x)dx=g_1(b)\int_c^b f(x)dx.$$

代入 $g_1(x)$ 的表达式就得推论的断言.

现设函数在闭区间 $[a,b]$ 上非增. 那么, 置 $g_1(x)=g(x)-g(b)$ 函数 $g_1(x)$ 非负且非增. 因此, 对于函数 $f(x)$ 和 $g_1(x)$ 定理 11 适用. 由此推出所要的公式. ◀

例 设 $b>a>0$. 那么成立不等式

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant \frac{2}{a}.$$

实际上, 函数 $\frac{1}{x}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是正的且非增. 那么根据定理 11, 存在 $c\in[a,b]$ 使

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|\frac{1}{a}\int_a^c \sin x dx\right| = \frac{|\cos c-\cos a|}{a} \leqslant \frac{2}{a}.$$

现引入第二中值定理对于光滑函数的另一证明.

定理 12 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 函数 $g(x)$ 在此区间上可微而且导函数 $g'(x)$ 在此区间上非负且连续. 那么在闭区间 $[a,b]$ 上存在点 c 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

► 设

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx.$$

那么函数 $F(t)$ 作为积分上限的函数是可微的, 由于被积函数 $f(x)$ 是连续的, 因此有

$$I=\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)dF(x).$$

用分部积分法计算积分 I, 得

$$I = g(x)F(x)|_a^b - \int_a^b F(x)dg(x).$$

而由于在闭区间 $[a,b]$ 上导函数 $g'(x)$ 非负, $F(x)$ 和 $g'(x)$ 连续, 所以根据积分第一中值定理有

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(c)\int_a^b g'(x)dx = F(c)(g(b)-g(a)).$$

因此

$$\begin{aligned} I &= g(b)F(b)-g(a)F(a)-F(c)(g(b)-g(a)) \\ &= g(a)\int_a^e f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx. \quad ◄ \end{aligned}$$

第八讲

§5. 带有积分形式余项的泰勒公式

在下述定理中所证的等式叫作带有积分形式余项的泰勒公式.

定理 13 设 $n \geqslant 0$ 是整数并设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 阶连续导函数. 那么成立公式

$$f(b) = f_n(a,b) + R_n(a,b),$$

其中 $f_n(a,b)$ 是泰勒多项式, 即

$$f_n(a,b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n,$$

而余项 $R_n(a,b)$ 具有如下形式

$$R_n(a,b) = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt.$$

► 用数学归纳法. 当 $n=0$ 时应成立等式

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{0!}\int_a^b f'(t)dt = f(a) + \int_a^b f'(t)dt.$$

这正是牛顿–莱布尼茨公式. 因此定理的结论对于 $n=0$ 成立.

设当 $n=k$ 是结论成立, 即成立等式

$$f(b) = f_k(a,b) + R_k(a,b).$$

我们来证明结论对于 $n=k+1$ 也成立. 为此, 对 $R_k(a,b)$ 进行分部积分, 得到

$$\begin{aligned}R_k(a,b) &= \frac{1}{k!}\int_a^b f^{(k+1)}(t)(b-t)^k dt = -\frac{1}{(k+1)!}\int_a^b f^{(k+1)}(t)d(b-t)^{k+1}\\ &= -\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(t)(b-t)^{k+1}\Big|_a^b + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^b f^{(k+2)}(t)(b-t)^{k+1}dt\\ &= \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(b-a)^{k+1} + R_{k+1}(a,b).\end{aligned}$$

将此表达式代入到依归纳法假设对于 $n=k$ 成立的等式中, 就得到

$$f(b) = f_{k+1}(a,b) + R_{k+1}(a,b). \quad ◄$$

注 1. 作积分变量变换 $t=a+u(b-a)$, 泰勒公式中的余项可写成

$$R_n(a,b)=\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(a+u(b-a))(1-u)^n du.$$

2. 若将中值定理用于余项 $R_n(a,b)$, 则可得带有一般形式余项的泰勒公式, 然而却是在对函数赋以更苛刻的条件之下. 实际上对于任意的 $\alpha>0$ 有①

$$\begin{aligned}R_n(a,b)&=\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^{n+1-\alpha}(b-t)^{\alpha-1}dt\\&=\frac{1}{n!\alpha}f^{(n+1)}(c)(b-c)^{n+1-\alpha}(b-a)^{\alpha},\end{aligned}$$

其中 c 是开区间 (a,b) 中的某点.

作为例子, 我们将对于某些初等函数当 $a=0,b=x$ 时得到带有积分形式余项的泰勒公式. 在前两个例子中我们使用上面所证的定理中的泰勒公式, 而在后面的例子中我们用特殊的方法来简化公式的推导.

1. 指数函数 由定理推出

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n,$$

其中

$$R_n=R_n(0,x)=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 e^{xu}(1-u)^n du.$$

2. 三角函数 我们有

$$\sin x=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_n,$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+r_n,$$

其中

$$R_n=\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^1(1-u)^{2n-1}\cos ux du,$$

$$r_n=\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\int_0^1(1-u)^{2n}\cos ux du.$$

3. 对数函数 设 $f(x)=\ln(1+x)$. 那么根据几何级数的和的公式, 我们得到

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k+\frac{(-x)^n}{1+x}.$$

①注意当 $0<\alpha<1$ 时 $(b-t)^{\alpha-1}$ 在 $[a,b]$ 上并不是常义可积的 —— 译者注.

从 0 到 x 积分此等式, 求得

$$f(x)=\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+R_n,\quad R_n=(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt.$$

4. *反正切* 设 $f(x)=\arctan x$. 那么

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n-1}(-x^2)^k+\frac{(-x^2)^n}{1+x^2}.$$

从 0 到 x 积分此等式. 得

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}+R_n,\quad R_n=(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt.$$

由中值定理推出, 存在量 $\theta=\theta(x), 0<\theta<1$, 使

$$R_n=\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(1+\theta x^2)(2n+1)}.$$

由此得知, 对于 $|x|\leqslant 1$, 当 $n\to\infty$ 时 R_n 的极限等于 0, 即对于 $|x|\leqslant 1$, 级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ 收敛, 且等于 $\arctan x$.

5. *二项式公式* 设 $f(x)=(1+x)^\alpha$. 曾经证明 (第一部分第二十三讲例 5), 这个函数在点 $x=0$ 的邻域内的泰勒多项式 $g(x)=g_{n-1}(x), n\geqslant 2$, 取如下形式

$$g(x)=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}a_k x^k,$$

而且泰勒级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ 当 $|x|<1$ 时收敛且等于 $(1+x)^\alpha$. 还有, 函数 $f(x)$ 满足下列微分方程:

$$\alpha f(x)-(1+x)f'(x)=0.$$

代替函数 $f(x)$ 以其泰勒级数代入到此方程中, 将自变量 x 的幂的系数等于零, 就得到等式

$$ka_k-(\alpha-k+1)a_{k-1}=0,\quad k\geqslant 1,$$

这些等式的真确性可以直接验证.

我们来求关于表达式 $h(x) = \alpha g(x) - (1+x)g'(x)$ 的公式有

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \alpha \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k - (1+x)\sum_{k=1}^{n-1} k a_k x^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha a_k x^k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)a_{k+1}x^k - \sum_{k=1}^{n-1} k a_k x^k \\
&= (\alpha a_0 - a_1) + \sum_{k=1}^{n-2}((\alpha-k)a_k - (k+1)a_{k+1})x^k + (\alpha a_{n-1} - (n-1)a_{n-1})x^{n-1} \\
&= (\alpha - n + 1)a_{n-1}x^{n-1} = n a_n x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

因此, 泰勒公式的余项 $R = R_n(x) = f(x) - g(x)$ 满足方程

$$\alpha R - (1+x)R' = -n a_n x^{n-1},$$ ①

即成立等式

$$\left(\frac{R}{(1+x)^\alpha}\right)' = \frac{n a_n x^{n-1}}{(1+x)^{\alpha+1}},$$

从 0 到 x 积分此式, 得

$$R = R_n(x) = n a_n (1+x)^\alpha \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(1+t)^{\alpha+1}} dt.$$

于是, 证得公式

$$
\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + r, \\
r &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}(1+x)^\alpha x^n \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{(1+xu)^{\alpha+1}} du.
\end{aligned}
$$

6. 反正弦 设 $f(x) = \arcsin x$. 那么 $f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. 由此, 根据二项式公式, 得到

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+2\right)}{(n-1)!}x^{2n-2} + r, \\
r &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{(n-1)!}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}x^{2n}\int_0^1 \frac{u^{n-1}du}{(1-x^2u)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

还有

$$\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} = (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k k!} = (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!},$$

①原文此处作 $n a_n x^{n-1}$—— 译者注.

因此

$$|r| \leqslant \frac{1}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1 \frac{u^{n-1}}{\sqrt{1-u}}du.$$

使用降幂公式得

$$\int_0^1 \frac{u^{n-1}}{\sqrt{1-u}}du = 2\int_0^1 (1-t^2)^{n-1}dt = 2\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

由此得到

$$|r| \leqslant \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

积分对于 $f'(x)$ 的公式, 对于某 $\theta = \theta(x), |\theta| < 1$, 得

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \theta R_n,$$

其中

$$R_n = \int_0^x \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

我们看到, 如果 $|x| < 1$ 的话, 则当 $n \to \infty$ 时序列 $\{R_n\}$ 的极限等于零. 因此, 当 $|x| < 1$ 时, 泰勒级数

$$x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

收敛到函数 $\arcsin x$.

7. 积分正弦　设函数 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$. 则从例 2 得知

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-2}}{(2k-1)!} + r$$

$$r = r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\int_0^1 (1-u)^{2n+1}\cos(ux)du.$$

从 0 到 x 积分对于 $f'(x)$ 的等式, 得

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!} + R,$$

其中

$$|R| \leqslant \int_0^x |r(t)|dt \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)(2n+2)}.$$

由此推出, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 当 $n \to \infty$ 时表达式 R 趋于零. 因此, 对于任意的 x 都成立泰勒展开式

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!}.$$

§6. 包含积分的不等式

定理 14 (赫尔德不等式) 设 $p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 且设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 那么, 成立不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

► 函数 $|f(x)|^p, |g(x)|^q$, 根据复合函数的可积性的定理 (第七章 §9 的定理), 都在闭区间 $[a, b]$ 上可积.

考察把闭区间 $[a, b]$ 几等分的分法 $T_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 那么待求的不等式从对于积分和的不等式

$$\left|\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\frac{b-a}{n}\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |f(x_k)|^p \frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |g(x_k)|^q \frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

或等价的不等式

$$\left|\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |f(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |g(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

过渡到极限而得到. 最后的不等式是关于加法和的不等式 (见第五章 §8). ◄

当 $p = q = 2$ 时, 上面引入的不等式叫作柯西–布尼亚可夫斯基不等式.

定理 15 (闵可夫斯基不等式 —— 推广的三角不等式) 设 $p \geqslant 1$ 并设 $f(x)$, $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积. 那么成立不等式

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

► $p = 1$ 的情形是明显的. 如在定理 14 中那样, 取 T_n 为 $[a, b]$ 的 n 等分分法. 只消证明对于相应的积分和的不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n |f(x_k) + g(x_k)|^p \frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |f(x_k)|^p \frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |g(x_k)|^p \frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}},$$

或者

$$\left(\sum_{k=1}^n |f(x_k) + g(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |f(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |g(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

最后的不等式是关于算术和的闵可夫斯基不等式 (见第五章 §8). ◄

定理 16 设函数 $f_1(x),\cdots,f_m(x)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上可积那么成立不等式

$$\sqrt{\left(\int_a^b f_1(x)dx\right)^2+\cdots+\left(\int_a^b f_m(x)dx\right)^2}\leqslant\int_a^b\sqrt{f_1^2(x)+\cdots+f_m^2(x)}\,dx.$$

► 把闭区间 $[a,b]n$ 等分并令 $x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}, k=0,1,\cdots,n$. 对于相应的积分和应该成立不等式

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=1}^n f_1(x_k)\frac{b-a}{n}\right)^2+\cdots+\left(\sum_{k=1}^n f_m(x_k)\frac{b-a}{n}\right)^2\\ &\leqslant\left(\sum_{k=1}^n\sqrt{f_1^2(x_k)+\cdots+f_m^2(x_k)}\frac{b-a}{n}\right)^2.\end{aligned}$$

实际上, 此不等式从下面的一串关系式推出:

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^m\left(\sum_{k=1}^n f_s(x_k)\right)^2&=\sum_{s=1}^m\left(\sum_{k=1}^n f_s(x_k)\right)\left(\sum_{k=1}^n f_s(x_k)\right)\\ &=\sum_{k_1=1}^n\sum_{k_2=1}^n\left(\sum_{s=1}^m f_s(x_{k_1})f_s(x_{k_2})\right)\\ &\leqslant\sum_{k_1=1}^n\sum_{k_2=1}^n\sqrt{\sum_{s=1}^m f_s^2(x_{k_1})}\sqrt{\sum_{s=1}^m f_s^2(x_{k_2})}\\ &=\left(\sum_{k=1}^n\sqrt{\sum_{s=1}^m f_s^2(x_k)}\right)^2.\end{aligned}$$

我们见到, 在这串关系式中的不等式是从柯西不等式推出的. ◄

第九讲

§7. 函数黎曼可积的勒贝格准则

先前我们已经证明并且不只一次地使用了闭区间上函数可积的黎曼准则. 此准则是这样的: 闭区间上的有界函数可积的充分必要条件是下述两彼此等价的关系式之一成立:

$$\text{a)}\ \lim_{\Delta_T\to 0}\Omega(T)=0,\quad \text{b)}\ \inf_T\Omega(T)=0,$$

其中 ω 和的概念早已定义 (第七章 §3 引理 6).

我们看到, 这个准则丝毫不曾直接说出什么样的函数是黎曼可积的而什么样的函数不是黎曼可积的. 勒贝格准则就是回答这个问题的.

为了叙述勒贝格准则, 我们先定义具有勒贝格零测度的集合的概念.

定义 1 数轴上的点集 A 具有勒贝格零测度, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在有限个或可数个开区间覆盖 A 而其总长不超过 ε. 换言之, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在开区间 $I_1, \cdots, I_n, \cdots$ 它们的长度相应地为 $\delta_1, \cdots, \delta_n, \cdots$, 使得 $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ 且对于任意的自然数 n 皆有 $S_n = \delta_1 + \cdots + \delta_n < \varepsilon$.

记作 $\mu(A) = 0$.

命题 1 数轴上任何不多于可数个点的集合有勒贝格零测度.

实际上, 可以取以这些点为中心的长度为 $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}, \cdots, \delta_n = \dfrac{\varepsilon}{2^n}, \cdots$ 的开区间, 那么有

$$S_n = \frac{\varepsilon}{2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon.$$

命题 2 设 $B \subset A$ 且 $\mu(A) = 0$, 则 $\mu(B) = 0$.

► 结论从集 A 的任何开覆盖也是集 B 的开覆盖这一事实推出. ◄

现叙述勒贝格准则.

定理 17 为使在闭区间 $[a, b]$ 上有界的函数 $f(x)$ 是在此区间上可积的, 必要且充分的是此函数的间断点所成的集合 A 具有勒贝格零测度, 即 $\mu(A) = 0$.

在证明此准则之前, 先来考虑它的应用.

定理 18 设函数 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积且 $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} g(x), M = \sup\limits_{x \in [a,b]} g(x)$, 又设函数 $f(t)$ 在闭区间 $[m, M]$ 上连续. 那么函数 $f(g(t))$ 在 $[a, b]$ 上可积.

► 设 x_0 是函数 $g(x)$ 的连续点. 那么根据关于复合函数的连续性的定理, $h(x) = f(g(x))$ 在点 x_0 处连续. 因此, 只有函数 $g(x)$ 的间断点才有可能是函数 $h(x)$ 的间断点. 设 A 是 $g(x)$ 的间断点的集合, 而 B 是 $h(x)$ 的间断点的集合. 那么 $B \subset A$.

由于函数 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 根据勒贝格准则有 $\mu(A) = 0$, 由此, 根据命题 2, 有 $\mu(B) = 0$. 于是再根据勒贝格准则, 函数 $h(x) = f(g(x))$ 是在闭区间 $[a, b]$ 上可积的. ◄

定理 19 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上单调, 那么它在闭区间 $[a, b]$ 上可积.

► 我们来证明, 函数 $f(x)$ 的间断点的集合是可数集, 在第四章 §4 (定理 1) 中已证, $f(x)$ 仅有第一类间断点. 设 x_0 是间断点. 那么在此点处存在左极限和右极限: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = l_1, \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = l_2$, 而且 $l_1 \neq l_2$. 在以 l_1 和 l_2 为端点的开区间中可

取一有理数 r, 此有理数作成与点 x_0 的对应. 这样选出的全体有理数 r 的集合作为全体有理数的集合的一个子集是有限集或无限的可数集, 对应的间断点的集合亦然. 根据命题 1, 此集合有勒贝格测度零. 从而根据勒贝格准则, 闭区间上的单调函数是可积的. ◀

§8. 勒贝格准则的证明

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界, 用 $I = I(\delta, x_0)$ 代表区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\bigcap[a,b]$.

定义 2 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的振幅是下面的量

$$\omega(x_0) = \omega_f(x_0) = \inf_{\delta>0}\sup_{x,y\in I(\delta)}(f(x)-f(y)),$$

换言之, 量 $\omega(x_0)$ 用以下等式确定

$$\omega(x_0) = \inf_{\delta>0}(M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0)),$$

其中

$$M_\delta(x_0) = \sup_{x\in I(\delta)} f(x), \quad m_\delta(x_0) = \inf_{x\in I(\delta)} f(x).$$

函数在一点处的连续性的准则如下:

引理 1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是函数在该点处的振幅 $\omega_f(x_0)=0$.

▶ 必要性 设相反, 即成立 $\omega_f(x_0)=\alpha>0$. 令 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$. 设 $I=I\left(\dfrac{1}{n}\right)$. 根据下确界的定义, 有

$$\sup_{x,y\in I}(f(x)-f(y)) = M_{\frac{1}{n}}(x_0) - m_{\frac{1}{n}}(x_0) > \alpha.$$

然后根据上确界的定义得知存在 $x_n, y_n \in I\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 使得 $f(x_n)-f(y_n)\geqslant\dfrac{\alpha}{2}>0$. 但由于区间 $I\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 的长度随着 n 趋于无穷而趋于零, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$.

在不等式 $f(x_n)-f(y_n)\geqslant\dfrac{\alpha}{2}>0$ 中令 $n\to\infty$, 并使用函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的连续性, 得 $0\geqslant\dfrac{\alpha}{2}>0$. 发生矛盾. 因此 $\omega_f(x_0)=0$.

充分性 设 $\omega_f(x_0)=0$. 那么对于任何 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对于一切 $x,y\in I(\delta)$ 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 令此处 $y=x_0$. 得到函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的条件. ◀

设 $D(\alpha)$ 代表闭区间 $[a,b]$ 上的使不等式 $\omega(x)\geqslant\alpha$ 成立的点 x 的集合.

引理 2 点集 $D(\alpha)$ 是闭集.

► 设 x_0 是集合 $D(\alpha)$ 的极限点. 那么存在点列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时收敛到 x_0, 而且函数 $f(x)$ 在点 x_n 处的振幅不小于 α, 即 $\omega_f(x_n)\geqslant\alpha$. 我们发现, 不管数 $\delta>0$ 如何, 总是存在点列的某项 $x_n\in I_\delta(x_0)$. 置

$$\delta_1=\min(x_n-x_0+\delta,x_0+\delta-x_n),$$

即 δ_1 是点 x_n 到区间 $I_\delta(x_0)$ 的边界的距离. 那么得到 $I_{\delta_1}(x_n)\subset I_\delta(x_0)$, 由此

$$M_\delta(x_0)-m_\delta(x_0)\geqslant M_{\delta_1}(x_n)-m_{\delta_1}(x_n)\geqslant\omega_f(x_n)\geqslant\alpha.$$

因此, 对任何 $\delta>0$ 都成立不等式 $M_\delta(x_0)-m_\delta(x_0)\geqslant\alpha$. 那么

$$\inf_{\delta>0}(M_\delta(x_0)-m_\delta(x_0))\geqslant\alpha.$$

所以集合 $D(\alpha)$ 的任何极限点都属于它自己, 即 $D(\alpha)$ 是闭集. ◄

► 现在来证明勒贝格准则.

必要性 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积. 应该证明函数 $f(x)$ 的间断点的集合有勒贝格测度零.

假设不然, 即集合 D 不是零测度集, 由于 $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D\left(\dfrac{1}{n}\right)$, 那么存在 $\alpha=\dfrac{1}{m}$ 使得 $D\left(\dfrac{1}{m}\right)$ 不是零测度集. 于是存在数 $\varepsilon_0>0$, 使得对于任何覆盖集合 $D(\alpha)$ 的一列开区间 $\{I_n\}$; $D(\alpha)\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n$, 都存在自然数 n_0 使 $\delta_1+\cdots+\delta_{n_0}\geqslant\varepsilon_0$. 我们指出数 n_0 依赖于开区间序列 $\{I_n\}$.

现考察闭区间 $[a,b]$ 的任意一个分法 T. 在分法 T 的闭区间 $[x_{k-1},x_k]$ 之中我们把那些其 "内部" 至少含有 $D(\alpha)$ 的一个点挑出来, 在每个这样的闭区间 $[x_{k-1},x_k]$ 中, 函数 $f(x)$ 的振幅不小于 ε_0. 这些闭区间的长度之总和必不少于 ε_0, 因为集合 $D(\alpha)$ 包含在这些区间之中, 除了可能有有限个点与分法 T 的点 x_k 重合之外.(如果上述闭区间 $[x_{k-1},x_k]$ 之长度总和小于 ε_0, 则可用有限个开区间覆盖点 $x_k\in D(\alpha)$, 并使全部覆盖 $D(\alpha)$ 的开区间之长度总和小于 ε_0, 而这是不可能的.)

于是对于闭区间 $[a,b]$ 的任何分法 T 有

$$\Omega(T)\geqslant\alpha\varepsilon_0.$$

因此, $\inf\limits_T\Omega(T)\geqslant\alpha\varepsilon_0>0$. 根据函数黎曼可积的准则, 这就表明函数 $f(x)$ 不是可积的. 发生矛盾. 必要性获得证实.

充分性 对于任给的 $\varepsilon>0$, 我们来构作一个分法 T 使得 $\Omega(T)<\varepsilon$. 设 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 令 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4M},\alpha=\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

由于集合 D 有勒贝格测度零, 所以可用长度总和小于 δ 的一组开区间覆盖它. 把这组开区间的全体记作 A, A 中的一切元的并集记作 I. 令 $K=[a,b]\backslash I$. 那么在集合 K 的每点 x_0 处函数 $f(x)$ 的振幅都等于 0. 因此存在开区间覆盖这个点 x_0. 在此开区间上函数的振幅小于 α. 把这样的开区间的全体记作 B. 那么开区间组 $A\bigcup B$ 覆盖了闭区间 $[a,b]$. 于是从 $A\bigcup B$ 中可选出有限个开区间来, 它们已覆盖 $[a,b]$. 把这有限个开区间的落在 $[a,b]$ 中的端点与 a,b 一道取作分法 T 的分点.[①]

那么和 $\Omega'(T)$ 可表成 $\Omega'(T)=\Omega_1+\Omega_2$, 其中 Ω_1 和 Ω_2 为形如 $\omega_k\Delta x_k$ 的被加项的和. 这里, 在第一个和 Ω_1 中求和变元 k 跑遍使得 $[x_{k-1},x_k]\subset I$ 的那些 k, 而所有其他的 k 值进入第二个和式 Ω_2 中.

那么, 对于 $\Omega'(T)$ 有估计式

$$\Omega'(T)=\Omega_1+\Omega_2<2M\delta+\alpha(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由此, 根据 $\inf\limits_{T}\Omega'(T)=0$, 推出函数 $f(x)$ 的可积性.

定理完全证实. ◀

在使用勒贝格准则 (特别是在证明函数不黎曼可积) 时, 其下述形式有时更为方便.

定理 20 *为使在闭区间 $[a,b]$ 上有界的函数是黎曼可积的, 必要且充分的是对于任何 $\alpha>0$, 集 $D(\alpha)$ 皆有勒贝格测度零.*

▶ *必要性* 由于 $f(x)$ 黎曼可积, 根据上面已证的勒贝格准则, 其间断点的集合 D 的测度等于零, $\mu(D)=0$. 但对于任何 $\alpha>0$ 皆成立包含关系: $D(\alpha)\subset D$. 因此 $\mu(D(\alpha))=0$.

充分性 显然, $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D\left(\dfrac{1}{n}\right)$. 根据定理的条件, 对于任何自然数 n 皆有 $\mu\left(D\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=0$. 因此 $\mu(D)=0$, 于是根据勒贝格准则, $f(x)$ 可积. ◀

[①]这段文字是更正了原文的疏漏而由译者写成的 —— 译者注.

第九章　反常积分

第十讲

§1. 第一类和第二类反常积分的定义

以下的目的是把函数黎曼可积的概念推广到新的函数类上, 即

1) 推广到定义在无穷区间上的函数;

2) 推广到无界函数.

我们已具有的极限概念, 使我们能够本质上没有困难地达到目的, 而这里所推广的黎曼积分叫作反常积分.

对于第一种情形, 以下形式的积分

$$\int_a^{\infty} f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

叫作**第一类反常积分**. 而在第二种情形, 当函数 $f(x)$ 是在有限闭区间 $[a,b]$ 上的无界函数的情形, 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 叫作**第二类反常积分**.

积分区间无界, 函数本身亦无界的情形并不是什么新问题, 因为可以通过简单地把积分区间分成部分而归结为第一类和第二类反常积分的情形. 因而我们不再单独讨论这种情况, 我们停下来比较详细地讲述第一类反常积分的概念, 并且只限于形如 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ 的积分的情形.

定义 1 设 a 是实数, 并设对于任何 $A > a$ 函数 $f(x)$ 都在闭区间 $[a, A]$ 上黎曼可积且

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx.$$

若当 $A \to +\infty$ 时存在极限 $I = \lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$, 则此极限叫作是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上的第一类反常积分.

对于积分 I, 使用下述记号:

$$I = \int_a^\infty f(x)dx \left(= \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx \right).$$

如果极限 I 存在, 则说反常积分收敛. 若此极限不存在则表达式 $\int_a^\infty f(x)dx$ 被理解作一个符号, 依然叫作反常积分, 但说它发散.

类似地定义反常积分

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)dx,$$

而反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 理解作两个反常积分的和:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

注 1. 与反常积分相区别, 有限区间上的通常的黎曼积分叫作正常的.

2. 从正常积分的性质和反常积分的定义, 对于任何实数 a 和 b, 平庸地得到

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

例 1. 当 $a > 0$ 时成立等式

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{1-\alpha}(A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}), & \text{若 } \alpha \neq 1, \\ \lim\limits_{A\to+\infty} (\ln A - \ln a) & \text{若 } \alpha = 1. \end{cases}$$

由此推出, 此积分当 $\alpha > 1$ 时收敛且等于 $\dfrac{1}{\alpha-1}a^{1-\alpha}$, 而当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

2. 对于自然数 n, 用分部积分法得到

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

§2. 反常积分收敛的柯西准则和收敛的充分条件

从当 $A \to \infty$ 时函数的极限存在的柯西准则直接得到下面的定理.

定理 1 (第一类反常积分收敛的准则) 为使积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 必要且充分的是满足柯西条件, 即对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $B = B(\varepsilon) > a$, 使得对于一切比 B 大的 A_1 和 A_2 成立不等式

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

此柯西条件用符号可写成:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists B = B(\varepsilon) > a : \forall A_1 > B \quad \forall A_2 > B \Rightarrow \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

定理 2 (一般的比较判别法) 设对于所有的 $x \in [a, +\infty)$ 成立不等式 $|f(x)| \leqslant g(x)$ 且设积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛. 那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

► 我们来证明, 对于函数 $f(x)$ 的反常积分的收敛性的柯西条件满足. 根据函数 $g(x)$ 的积分的收敛性, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $B = B(\varepsilon) > a$, 使得对于任何 $A_1 > A_2 > B$ 成立不等式 $\int_{A_2}^{A_1} g(x)dx < \varepsilon$, 但由于

$$\left|\int_{A_2}^{A_1} f(x)dx\right| \leqslant \int_{A_2}^{A_1} |f(x)|dx \leqslant \int_{A_2}^{A_1} g(x)dx < \varepsilon,$$

所以柯西条件对于函数 $f(x)$ 的积分成立. ◄

例 设对于某 $\alpha > 1$, 当 $x \to \infty$ 时成立不等式

$$|f(x)| \ll \frac{1}{x^\alpha},$$

即存在 $c > 0$ 和 $x_0 = x_0(c) > 0$, 使当 $x > x_0$ 时 $|f(x)| \leqslant cx^{-\alpha}$. 那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

实际上,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx.$$

和式中的第一个积分是正常的, 而第二个积分 $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ 根据比较判别法, 是收敛的, 因为 $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ 当 $\alpha > 1$ 时收敛.

§3. 反常积分的绝对收敛和条件收敛. 阿贝尔判别法和狄利克雷判别法

首先我们给出反常积分绝对收敛的定义和条件收敛的定义.

定义 2 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 叫作是绝对收敛的, 如果积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛.

定义 3 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 叫作是条件收敛的, 如果积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛而积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 发散.

从一般的比较判别法直接推出, 积分的绝对收敛性蕴含着它的条件收敛性, 反之不真.

和前面一样, 我们认为对于任意的 $A > a$ 函数 $f(x)$ 都在闭区间 $[a, A]$ 上可积.

定理 3 (狄利克雷判别法) 设函数 $F(x) = \int_a^x f(u)du$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, 且设函数 $g(x)$ 非负、非增, 并当 $x \to +\infty$ 时趋于零. 那么积分 $I = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

► 由于函数 $g(x)$ 在正无穷处不增且趋于零, 所以对于任意的 $\varepsilon_1 > 0$ 存在 $B = B(\varepsilon) > a$, 使当 $x > B$ 时有不等式 $0 \leqslant g(x) < \varepsilon_1$. 设 $M = \sup\limits_{x \geqslant a} |F(x)|$. 那么根据第二中值定理, 对于任意的 $A_2 > A_1 > B$, 存在数 $A_3, A_1 < A_3 < A_2$, 使得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|g(A_1)\int_{A_1}^{A_3} f(x)dx\right| < \varepsilon_1 \left|\int_{A_1}^{A_3} f(x)dx\right|$$
$$= \varepsilon_1 \left|\int_a^{A_3} f(x)dx - \int_a^{A_1} f(x)dx\right| \leqslant 2\varepsilon_1 M.$$

若现在给定任意的 $\varepsilon > 0$, 则取 $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2M}$, 就得到对于任意的 $A_1, A_2, A_2 > A_1 > B\left(\dfrac{\varepsilon}{2M}\right)$ 成立不等式

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| < \varepsilon.$$

柯西条件满足. 因此积分 I 收敛. ◄

定理 4 (阿贝尔判别法) 设积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 又设函数 $g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上非负, 单调且有上界, 那么积分 $I = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

► 由于积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 所以根据柯西准则: 对于任意的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $B = B(\varepsilon_1) > a$, 使得对于任意的 $A_1, A_2, A_2 > A_1 > B$, 成立不等式

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon_1.$$

接着, 按第二中值定理, 存在这样的数 $A_3, A_1 < A_3 < A_2$ 使得

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx = g(A_1)\int_{A_1}^{A_3} f(x)dx + g(A_2)\int_{A_3}^{A_2} f(x)dx.$$

令 $M = \sup\limits_{x>a} g(x)$. 则因

$$\left|\int_{A_1}^{A_3} f(x)dx\right| < \varepsilon_1, \quad \left|\int_{A_3}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon_1,$$

所以得到

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| < 2M\varepsilon_1.$$

因此, 取 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M}$, 就得到, 对于任意的数 $A_1, A_2, A_2 > A_1 > B\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)$, 成立不等式

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| < \varepsilon.$$

所以, 根据柯西准则, 积分 I 收敛. ◀

例 1. 根据狄利克雷判别法, 当 $\alpha > 0$ 时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ 收敛, 因为对于任意的 $A > 1$, 函数 $F(A) = \int_1^A \sin x dx$ 有界, 而对于 $\alpha > 0$, 当 $x \to +\infty$ 时函数 $x^{-\alpha}$ 单调减趋于零.

2. 设 $f(x)$ 是高于一次的多项式, 那么积分 $\int_0^{+\infty} \sin f(x) dx$ 收敛.

不失一般性, 可认为多项式 $f(x)$ 的最高次项的系数是正的. 那么从某 $A > 0$ 始, 其导数 $f'(x)$ 将是正的且单调增至正无穷, 只消证明积分 $\int_A^{+\infty} \sin f(x) dx$ 收敛. 对于任意的 $B > A$, 在积分 $\int_A^B \sin f(x) dx$ 中作积分变量变换 $y = f(x), x = f^{-1}(y)$. 得到

$$\int_{f(A)}^{f(B)} \frac{\sin y}{f'(f^{-1}(y))} dy.$$

根据第二中值定理, 此积分的绝对值以量 $\frac{2}{f'(A)}$ 为上界且当 $A \to +\infty$ 时趋于零. 这就证明了原来的积分的收敛性.

第十一讲

§4. 第二类反常积分

定义 4 设

1) 函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a, b)$ 上且在此区间上无界;

2) 对于任意的 $\alpha, a \leqslant \alpha < b$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, \alpha]$ 上有界且可积;

3) 存在极限 $I = \lim_{\alpha \to b^-} \int_a^\alpha f(x)dx$.

那么这个极限 I 叫作是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的第二类反常积分, 且对于极限 I 使用记号

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

注 1. 点 b 叫作是积分 I 的奇点.

2. 若极限 $I \in \mathbb{R}$ 存在, 则说反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 在相反的情形下说此积分发散.

3. 若积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的奇点是积分下限, 则第二类反常积分类似地定义.

4. 若奇点 c 位于闭区间 $[a, b]$ 内部, 则反常积分定义作两个反常积分的和:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

例 成立以下等式

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{a \to 0+} \dfrac{1}{1-\alpha}(1 - a^{1-\alpha}), & 若\ \alpha \neq 1, \\ \lim\limits_{a \to 0+} (-\ln a), & 若\ \alpha = 1. \end{cases}$$

由此得知, 积分 $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^\alpha}$ 当 $\alpha < 1$ 时收敛, 等于 $\dfrac{1}{1-\alpha}$, 而当 $\alpha \geqslant 1$ 时发散.

以具有唯一奇点 b 的积分 $\int_a^b f(x)dx$ 为例, 我们来考察第二类反常积分的基本性质, 这些性质与第一类反常积分的性质是类似的.

1° 第二类反常积分收敛的柯西准则.

为使积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 必须且只需柯西条件成立: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得只要 α_1, α_2 满足条件 $\alpha_1, \alpha_2 \in (b - \delta, b)$, 就成立不等式

$$\left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

2° 一般的比较判别法.

设对于一切 $x \in [a, b)$ 成立不等式 $|f(x)| \leqslant g(x)$ 且反常积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛. 那么积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

3° 第二类反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 叫作是绝对收敛的, 如果积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛; 它叫作是条件收敛的, 如果它收敛但不绝对收敛, 即 $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散.

可以叙述与关于第一类反常积分的阿贝尔判别法和狄利克雷判别法类似的判别法.

最后, 任何具有两个无穷积分限 (或一个无穷积分限) 的积分以及具有有限个奇点的积分, 都可看作是一些反常积分的和, 其中每个只有一个奇点而且是积分区间的边界 (也可以认为点 $+\infty$ 和点 $-\infty$ 是奇点). 也就是说任何反常积分的研究都归结为第一类和第二类反常积分.

§5. 反常积分的变量变换及分部积分

定理 5 设导函数 $\varphi'(t)$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续且在开区间 (α,β) 上异于零, 又设函数 $f(x)$ 在开区间 $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))$ 上连续. 那么成立公式

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

不管积分是正常的还是反常的.

► 先设点 α 和 β 是有限的. 那么函数 $f(x)$ 和 $f(\varphi(t))$ 的奇点可能是相应的闭区间的端点. 根据函数 $x=\varphi(t)$ 的单调性, 当变量 t 在开区间 (α,β) 中变化时每个 x 值仅被取到一次. 那么, 对于任意的 $\varepsilon_1>0$ 和 $\varepsilon_2>0$, 根据对于正常积分的变量变换定理, 有

$$\int_{\varphi(\alpha+\varepsilon_1)}^{\varphi(\beta-\varepsilon_2)} f(x)dx = \int_{\alpha+\varepsilon_1}^{\beta-\varepsilon_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

在此等式中令 $\varepsilon_1\to 0,\varepsilon_2\to 0$ 而过渡到极限, 就得到待求的公式. ◄

定理 6 设:

1) 函数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上连续;

2) 反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx \quad 和 \quad \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$$

之中至少有一个收敛;

3) 存在极限 $l_1=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$, 而当 a 是奇点时亦存在极限 $l_2=\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$.

那么, 两个积分都存在且成立等式

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx.$$

► 考察在闭区间 $[a+\varepsilon,b]$ 上的正常积分, 根据关于正常积分的分部积分的定理, 有

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_{a+\varepsilon}^{b} - \int_{a+\varepsilon}^{b} f'(x)g(x)dx.$$

在此等式中让 $\varepsilon\to 0, b\to+\infty$, 就得待求的公式. ◄

下述关于反常积分的特殊定义有时有用.

定义 5 实数 $l=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx$ 叫作是积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 的(柯西) 主值, 记作

$$l = \text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.^{①}$$

①原文用 "v. p." 表示主值, 而大写的 "P. V." (Principal Value) 更常用 —— 译者注.

定义 6 若 c 是函数 $f(x)$ 的第二类反常积分的奇点且 $c\in(a,b)$, 则主值积分定义作

$$l_1=\lim_{\delta\to0^+}\left(\int_a^{c-\delta}f(x)dx+\int_{c+\delta}^b f(x)dx\right).$$

第十章 曲线的长度

第十二讲

§1. 多维空间中的曲线

定义 1 设向量函数 $x_1=\varphi_1(t),\cdots,x_m=\varphi_m(t)$ 由定义在某区间 $I\subset\mathbb{R}$ 并在 I 上连续的函数 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 给出. 把全体值 $(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t))$ 的集合 $M\subset\mathbb{R}^m$ 叫作是空间 $\mathbb{R}^m$ 中的曲线 L(m 维空间中的空间曲线).

我们把区间理解成或是有限的闭区间, 有限的开区间, 有限的半开区间或是无穷开区间和无穷半开区间.

为简单起见, 下面考察 $I=[a,b]$ 的情形. 我们记得在闭区间的端点处, 连续指的是单侧连续.

定义 2 点 $\bar{c}=(c_1,\cdots,c_m)\in L$ 叫作是曲线 L 的重点, 如果区间 I 中有至少两个不同的点 $t_1\neq t_2$ 使得 $\varphi_1(t_1)=\varphi_1(t_2)=c_1,\cdots,\varphi_m(t_1)=\varphi_m(t_2)=c_m$.

曲线的点, 如果不是重点, 就叫作是曲线的简单点.

仅有有限个重点的曲线 L, 叫作是参数化曲线.

除区间 I 的端点外, 无重点的曲线 L 叫作是简单曲线.

如果仅在区间 I 的端点 t_1 和 t_2 处函数 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 的值重合, 那么简单曲线叫作是简单闭曲线.

引理 1 任何参数化曲线皆可表示成有限条简单曲线的并.

为证此事, 只需把闭区间 I 划分成有限条以原始曲线的重点为端点的闭区间.

定义 3 设函数 $f(t)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 如果存在 $[a,b]$ 的一个分法: $t_0 = a < \cdots < t_n = b$, 使在每个开区间 $(t_{k-1},t_k)(k=1,\cdots,n)$ 上 $f'(t)$ 等于常数, 则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是逐段线性的. 也就是说, 在每个闭区间 $[t_{k-1},t_k]$ 上 $f(t) = a_k t + b_k, k = 1,\cdots,n$.

定义 4 简单曲线 L 叫作折线, 如果 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 都是逐段线性函数.

显然, 每条折线都由个别的线段组成, 这些线段叫作折线的节, 而它们的端点 $A_0,\cdots,A_n$ 叫作折线的结点. 对应于这些结点的点 $t_0,\cdots,t_n$ 构成闭区间 $[a,b]$ 的一个分法.

我们来考察折线的从始点 $A_1(x_1,\cdots,x_m)$ 到终点 $A_2(y_1,\cdots,y_m)$ 的一节. 根据毕达哥拉斯定理, 它的长度 $|l|$ 等于量

$$|l| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+\cdots+(y_m-x_m)^2}.$$

而若点 $A_0(x_{1,0},\cdots,x_{m,0}),\cdots,A_n(x_{1,n},\cdots,x_{m,n})$ 是折线 l 的结点序列, 那么此折线的长度 $|l|$ 显然等于

$$|l| = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_{1,k}-x_{1,k-1})^2+\cdots+(x_{m,k}-x_{m,k-1})^2}.$$

定义 5 对应于闭区间 $[a,b]$ 的一个分法 T 的折线 l 叫作是内接于由方程 $x_1 = \varphi_1(t),\cdots,x_m=\varphi_m(t)\ \ t\in[a,b]$ 给出的曲线 L 的, 如果折线 l 的结点都在曲线 L 上, 且折线的结点与曲线的相应的点对应着同样的参数值.

定义 6 简单曲线 L 叫作是可求长的, 如果它的一切内接折线的长度构成一个有上界的集合.

定义 7 可求长曲线 L 的长度是它的一切内接折线的长度所成的集合的上确界.

注 1. 显然, 如果我们想要正确地定义曲线的长度, 我们必须要求内接折线不比曲线本身长, 这是由于两点之间的最短距离, 如所周知, 是由联结这两点的直线段达到的.

2. 存在不可求长的曲线, 但这样的曲线的构造很复杂, 因此我们不引入这样的曲线的例子.

§2. 关于曲线长度的定理

定理 1 设函数 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 给出空间曲线 L. 且这些函数在闭区间 $[a,b]$

上有连续的导函数. 那么曲线 L 是可求长的, 且其长度 $|L|$ 由下式给出:

$$|L| = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}dt.$$

► 先证明任何内接折线的长度都不超过量

$$A = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}dt.$$

设折线的结点对应于闭区间 $[a,b]$ 的分法 T 的点 $t_0, t_1, \cdots, t_n; a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. 那么

$$|l| = \sum_{s=1}^n \sqrt{(\varphi_1(t_s) - \varphi_1(t_{s-1}))^2 + \cdots + (\varphi_m(t_s) - \varphi_m(t_{s-1}))^2}$$
$$= \sum_{s=1}^n \sqrt{\left(\int_{t_{s-1}}^{t_s} \varphi_1'(t)dt\right)^2 + \cdots + \left(\int_{t_{s-1}}^{t_s} \varphi_m'(t)dt\right)^2}.$$

接下去, 根据不等式 (见第八章 §6 定理 16)

$$\sqrt{\left(\int_a^b f_1(t)dt\right)^2 + \cdots + \left(\int_a^b f_m(t)dt\right)^2} \leqslant \int_a^b \sqrt{f_1^2(t) + \cdots + f_m^2(t)}dt$$

我们得到

$$|l| \leqslant \sum_{s=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}dt = A.$$

于是证得 A 是内接于曲线 L 的一切折线 l 的长度的上界, 从而曲线 L 是可求长的.

现证明 A 是这样的折线的长度的上确界, 即曲线 L 的长度等于 A.

由于函数 $\varphi_k'(t)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,$k = 1, \cdots, m$ 所以根据海涅–康托尔定理, 它们都在此闭区间上一致连续.

因此, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于一切 $t', t'' \in [a,b]$, 只要 $|t' - t''| < \delta$ 就成立

$$|\varphi_k'(t') - \varphi_k'(t'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}(b-a)} = \varepsilon_1, \quad k = 1, \cdots, m.$$

任取闭区间 $[a,b]$ 的分法 T, 使 $\Delta_T < \delta, T: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 并设对应于此分法的内接折线为 l.

现给出差 $A-|l|\geqslant 0$ 的上方估计. 有

$$A-|l|=\int_a^b\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+\cdots+(\varphi_m'(t))^2}dt-\sum_{s=1}^n\sqrt{\sum_{k=1}^m(\varphi_k(t_s)-\varphi_k(t_{s-1}))^2}$$
$$=\sum_{s=1}^n\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left[\sqrt{\sum_{k=1}^m(\varphi_k'(t))^2}-\sqrt{\sum_{k=1}^m\left(\frac{\varphi_k(t_s)-\varphi_k(t_{s-1})}{t_s-t_{s-1}}\right)^2}\right]dt.$$

接着, 使用以下形式的三角形不等式. 设三角形 OAB 的顶点为 $O(0,\cdots,0)$, $A(a_1,\cdots,a_m),B(b_1,\cdots,b_m)$, 那么成立三角形不等式 ($p=2$ 时的闵可夫斯基不等式):

$$\left|\sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2}-\sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2}\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^m(a_k-b_k)^2}.$$

因此,

$$A-|l|\leqslant\sum_{s=1}^n\int_{t_{s-1}}^{t_s}\sqrt{\sum_{k=1}^m\left(\varphi'(t)-\frac{\varphi_k(t_s)-\varphi_k(t_{s-1})}{t_s-t_{s-1}}\right)^2}dt$$
$$=\sum_{s=1}^n\int_{t_{s-1}}^{t_s}\sqrt{\sum_{k=1}^m(\varphi_k'(t)-\varphi_k'(\eta_{ks}))^2}dt<\sum_{s=1}^n\int_{t_{s-1}}^{t_s}\varepsilon_1\sqrt{m}dt$$
$$=\varepsilon_1\sqrt{m}(b-a)=\varepsilon,$$

其中 $\eta_{k,s}$ 是区间 $[t_{s-1},t_s]$ 中的某点. ◀

推论 设 $s=s(u)$ 是由方程 $x_1=x_1(t),\cdots,x_m=x_m(t),a\leqslant t\leqslant u$, 给定的曲线 L 的长. 那么对于曲线长度的微分 ds 成立公式:

$$(ds)^2=(dx_1)^2+\cdots+(dx_m)^2.$$

► 从关于曲线长度的定理得

$$s(u)=\int_a^u\sqrt{(x_1'(t))^2+\cdots+(x_m'(t))^2}dt.$$

微分此式, 求得

$$ds(u)=\sqrt{(x_1'(u))^2+\cdots+(x_m'(u))^2}du,$$

或者

$$ds=\sqrt{(dx_1)^2+\cdots+(dx_m)^2}.\quad ◀$$

于是平面曲线 ($m=2$) 的长度在极坐标 (r,φ) 之下的微分等于

$$ds=dr^2+r^2d\varphi^2,$$

其中坐标 r 和 φ 由下面的公式确定

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad r \geqslant 0,\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

实际上,

$$dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi,\quad dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi.$$

因此

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

特别地, 若以参数形式给定椭圆方程

$$\bar{r} = \bar{r}(\varphi) = (a\cos\varphi, b\sin\varphi),\quad a \geqslant b > 0,$$

且夹于 Ox 轴和向径 $\bar{r}$ 之间的角度 φ 从零变到 2π, 那么对于椭圆长度的微分有

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}d\varphi.$$

例　求曲线 (旋轮线)

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases}$$

其中 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. 的长度, 我们有 $ds^2 = dx^2 + dy^2, ds^2 = 4R^2\sin^2\frac{t}{2}(dt)^2, ds = 2R\sin\frac{t}{2}dt$. 因此

$$s = s(\theta) = 4R\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right).$$

此曲线给出了半径为 R 的轮子滚动时, 轮缘处的点的运动轨迹.

第十一章 若尔当测度

第十三讲

§1. 平面图形的面积和立体的体积. 若尔当测度的定义

在引入定积分的概念时, 已经谈到过曲边梯形这种平面图形的面积. 而且在给出这个概念的精确定义时, 我们是从对于最简单的图形的面积成立的图形面积的基本性质出发的, 所说的最简单的图形是指有限个矩形和三角形的并.

我们来叙述这些性质. 用 $\mu(P)$ 代表图形 P 的面积.

1° *对于每个有面积的图形 P, 函数 $\mu(P)$ 是非负的且是单值确定的.*

2° *边长为 1 的正方形的面积等于 1.*

3° *函数 $\mu(P)$ 是可加的, 即若图形 P 分成两个不相交的图形 P_1 和 $P_2, P = P_1 \bigcup P_2, P_1 \bigcap P_2 = \varnothing$, 则*

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2).$$

4° *函数 $\mu(P)$ 是关于平面的任何运动都不变的.*

也就是说, 如果图形 P_1 和 P_2 可借助平面绕一固定点的旋转, 或经平面的平移, 而彼此重合, 那么 $\mu(P_1) = \mu(P_2)$.

5° *函数 $\mu(P)$ 是单调的, 即若 $P_1 \subset P_2$ 则 $\mu(P_1) \leqslant \mu(P_2)$.*

这些性质不仅对于简单图形的面积成立, 而且也对于简单立体的体积成立, 同样也对于直线上最简单的集合, 即由有限个区间和有限个个别的点组成的集合的总

长度成立.

下面, 我们把有限个其边平行于坐标轴的矩形的并集叫作是**最简单的图形**. 这样的矩形叫作是**标准矩形**.

标准矩形可以不含位于它的边上的任何一个点的子集. 如所周知, 每个标准矩形都有面积, 等于它的相邻两边的长度的乘积.

在一般情形下定义图形的面积, 就像在曲边梯形的情形一样, 可以类似于定积分存在的黎曼准则那样去实施.

为此, 对于平面有界图形 P, 自然要引入图形的上面积的概念 (类似于达布上和), 它乃是一切包含 P 的最简单的平面图形 P_1 的面积 $\mu(P_1)$ 的下确界; 同时也引入此图形的下面积的概念, 它乃是一切包含在 P 内的最简单图形 P_2 的面积 $\mu(P_2)$ 的上确界.

记上面积为 $\mu^*(P)$, 下面积为 $\mu_*(P)$.

我们发现, 对于最简单图形 P

$$\mu_*(P) = \mu(P) = \mu^*(P).$$

若对于图形 P 成立等式 $\mu_*(P) = \mu^*(P)$, 则此量叫作图形 P 的面积, 并记作 $\mu(P)$. 对于三维立体图形的体积, 情况完全一样, 即类似地定义三维图形的上体积和下体积. 同样使用记号 $\mu_*(P), \mu^*(P)$ 和 $\mu(P)$, 其中, 作为定义, 对于可测图形 P 要求 $\mu(P) = \mu_*(P) = \mu^*(P)$.

所引入的图形面积的概念叫作**若尔当测度**, 而借助此定义赋予其面积值的图形本身叫作是**可求面积的** (或者在立体的情形叫作**可求体积的**), 或者**若尔当可测的**. 对于这样的图形, 计算面积 (或体积) 归结为计算黎曼定积分.

例　**1.** 与一条坐标轴平行的线段 l 的平面若尔当测度等于零. 此线段包含在一个其一边长度为零的矩形中.

2. 任何线段 l 的若尔当测度 (二维) 等于零, 因为它可以包含在面积任意小的最简单图形之中.

3. 设 P 是最简单图形. 那么它的边界 ∂P 的若尔当测度等于零. P 的边界由构成图形 P 的矩形的边组成. 这些边共有有限条, 每条皆含在一个其一边长为零的矩形之中.

4. 最简单图形的并、交、差都是最简单图形.

实际上, 两个标准矩形的交是标准矩形. 因此对于由标准矩形 P_k 组成的图形 $A = \bigcup\limits_k P_k$ 和由标准矩形 Q_l 组成的图形 $B = \bigcup\limits_l Q_l$, 它们的交 $A \bigcap B = \bigcup\limits_{k,l} (P_k \bigcap Q_l)$ 是最简单图形. 我们来证明两个最简单图形 A 和 B 的差 $A \setminus B$ 是最简单图形. 设 P 是包含 $A \bigcup B$ 的矩形, 那么 $A \setminus B = A \bigcap (P \setminus B)$.

§2. 集合的若尔当可测准则

和在黎曼积分的情形一样, 可以叙述图形可求面积的准则, 类似于借助 ω 积的黎曼准则 (形式上此准则很像勒贝格准则). 为此我们引入图形 P 的边界 ∂P 的概念. 此概念本身还用到下述概念.

1. 设 $\delta > 0$, 称位于以点 x_0 为中心, δ 为半径的圆的内部的点的集合为**平面上点 x_0 的 δ 邻域**.

2. 点 x_0 叫作**集合 P 的内点**, 如果存在点 x_0 的一个 δ 邻域 $E(x_0,\delta)$, 整个包含在集合 P 中, 即 $E(x_0,\delta) \subset P$.

3. 点 x_1 叫作**集合P 的外点**, 如果存在邻域 $E(x_1,\delta)$ 使得 $E(x_1,\delta)\bigcap P = \varnothing$.

4. 若点 x 既不是集合 P 的内点也不是它的外点, 那么点 x 叫作是**集合 P 的边界点**.

5. 图形 P 的全部边界点的集合叫作它的边界并记作 ∂P. 若 $\partial P \subset P$ 则称图形 P **是闭的**, 若 $\partial P \bigcap P = \varnothing$ 则称图形 P **是开的**, 集合 $\partial P \bigcup P$ 用记号 $\overline{P}$ 代表, 叫作 P **的闭包**.

定理 1 (图形可求面积的准则) *图形 P 可求面积必要且充分的条件是它的边界的测度等于零, 即 $\mu(\partial P) = 0$.*

► *必要性* 必须证明的是, 若 P 是可求面积图形, 则 $\mu(\partial P) = 0$. 为此只需对于任意的 $\varepsilon > 0$, 指出一个最简单的图形 H, 使得 $\partial P \subset H$ 且 $\mu(H) < \varepsilon$.

由于图形 P 是可求面积的, 所以 $\mu(P) = \mu_*(P) = \mu^*(P)$. 因此对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在开的最简单的图形 P_1 和闭的最简单的图形 P_2, 使 $P_2 \subset P \subset P_1$ 且此外还成立不等式

$$\mu(P) = \mu^*(P) \leqslant \mu(P_1) < \mu(P) + \varepsilon_1,$$
$$\mu(P) - \varepsilon_1 < \mu(P_2) \leqslant \mu(P) = \mu_*(P).$$

考察图形 $P_3 = P_1 \backslash P_2$. 它是最简单的. 令 $H = \overline{P}_3$. 则在此图形 H 之外, 仅含有图形的外点或内点. 因此 $\partial P \subset H$. 由于 $P_1 = P_2 \bigcup P_3, P_2 \bigcap P_3 = \varnothing$, 所以 $\mu(P_1) = \mu(P_2) + \mu(P_3)$. 由此

$$\mu(P_3) = \mu(P_1) - \mu(P_2) < \mu(P) + \varepsilon_1 - \mu(P) + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1.$$

我们注意到由于最简单的图形的边界有零测度, 所以 $\mu(P_3) = \mu(H)$.

取 $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$; 得 $\mu(H) < \varepsilon, \partial P \subset H$. 因此 $\mu(\partial P) = 0$. 必要性获证.

充分性 已知道的是图形 P 的边界 ∂P 有零测度. 要证的是图形 P 是若尔当可测的, 即成立等式 $\mu^*(P) = \mu_*(P)$. 为此需要下述引理. 此引理自身也是有用的.

引理 1 (平面上线段的连通性) 设在平面上给定线段 l 以 A_1 和 A_2 为端点, 且给定一个集合 M. 若 $A_1 \in M, A_2 \notin M$, 则存在点 $A_0 \in l$ 使得 $A_0 \in \partial M$.

我们来证明这个引理. 对于每点 $\alpha \in l$, 考虑函数 $\rho(\alpha)$, 其值等于从点 α 到点 A_1 的距离. 显然, 对于任何点 $\alpha \in l$ 皆成立不等式 $\rho(\alpha) \leqslant |l|$. 设 $B = l \bigcap M$. 那么集合 B 不空, 因为 A_1 既属于 l 又属于 M. 设 $\rho_0 = \sup\limits_{\alpha \in B} \rho(\alpha)$. 考虑在 l 上与 A_1 距离 ρ_0 的点 α_0. 在 l 上, 任何与 A_1 距离 $\rho(\alpha) > \rho_0$ 的点 α, 皆不属于 B, 从而不属于 M. 因此, α_0 不可能是集合 M 的内点. 另一方面, 在线段 l 上点 α_0 的任何邻域内, 都存在属于 $B \subset M$ 的点. 因此, 点 α_0 不是集合 M 的外点. 所以 $\alpha_0 \in \partial M$. 引理获证.

于是, 设 $\mu(\partial P) = 0$. 这表明, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在开的最简单的图形 P_3 使得 $\partial P \subset P_3$ 且 $\mu(P_3) < \varepsilon$. 边界 ∂P_3 由有限条平行于坐标轴的线段组成. 把图形 P 和 P_3 一并包含在一个其边与坐标轴平行的正方形 K 之中, 接着, 把边界 ∂P_3 上的线段凡平行于 Ox 轴的, 都延长到与正方形 K 的边界相交为止. 于是正方形 K 以及图形 P_3 都被分成一些单独的标准矩形. 设这些标准矩形是 $h_1, \cdots, h_m$ (把它们中的每个都看作是没有边界的). 那么矩形 h_s 或者整个含在 P_3 中, 或者 $h_s \bigcap P_3 = \varnothing, s = 1, \cdots, m$.

我们来证明, 如果 h_s 不是 P_3 的子集, 而又与图形 P 至少有一个公共点, 则 $h_s \subset P$. 实际上, 如果在这个矩形中 $x_1 \in P, x_2 \notin P$, 那么联结这两点的线段 l(它整个属于矩形 h_s) 上, 某些点属于 P 而某些点不属于 P. 根据引理, 线段 l 含有点 $x_0 \in \partial P$, 于是点 $x_0 \in h_s, x_0 \in \partial P \subset P_3$, 而这表明 $h_s \subset P_3$, 这与矩形 h_s 不是 P_3 的子集这个条件相矛盾.

于是, 若 $h_s \bigcap P \neq \varnothing$, 则矩形 h_s 整个包含在 P 中, 把所有这样的矩形 h_s 并在一起作成 P_2, 显然 $P_2 \subset P$.

我们还要考察最简单的图形 $P_1 = \overline{P_2 \bigcup P_3}$. 我们来证明 $P \subset P_1$. 实际上, 图形 P 与任何图形一样, 是由它的内点, 这些内点构成集合 $P \backslash \partial P$, 以及边界点的全体所成的集 ∂P 的某个子集 $\Gamma \subset \partial P$ 合成的. 所以只消证明 $\partial P \subset P_1, P \setminus \partial P \subset P_1$.

包含关系 $\partial P \subset P_1$ 从 $\partial P \subset P_3 \subset P_1$ 推出. 而集 P 的任何内点 x, 根据前边所做之事, 都 1) 或属于 P_3; 2) 或属于某开矩形 h_s; 3) 或属于某开矩形的边界 ∂h_s. 在第一种情形 $x \in P_3 \subset P_1$, 从而 $x \in P_1$; 在第二种情形 $x \in h_s, x \in P$, 而这表明 $h_s \subset P_2$ (根据集合 P_2 的构造特征), 于是 $x \in h_s \subset P_2 \subset P_1$; 在第三种情形, 集 P 的内点 x 属于开矩形 h_s 的边界. 而此点的某 ε 邻域全由集 P 的点组成, 从而其中含有矩形 h_s 的点. 那么 $h_s \subset P_2$. 由此 $\partial h_s \subset \overline{P}_2$. 所以 $x \in \partial h_s \subset \overline{P}_2 \subset P$. 由此, $P \subset P_1$.

我们还有 $P_2 \bigcap P_3 \neq \varnothing$, 此外,$P_1, P_2$ 和 P_3 都是最简单的图形. 所以

$$\mu(P_1) = \mu(\overline{P}_2) + \mu(P_3) < \mu(\overline{P}_2) + \varepsilon,$$

结果

$$\mu(P_2) \leqslant \mu_*(P) \leqslant \mu^*(P) \leqslant \mu(P_1) < \mu(\overline{P}_2) + \varepsilon.$$

于是我们得到

$$0 \leqslant \mu^*(P) - \mu_*(P) < \mu(\overline{P}_2) + \varepsilon - \mu(P_2) = \varepsilon.$$

而由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 所以

$$\mu^*(P) = \mu_*(P),$$

即图形 P 是若尔当可测的. ◀

第十四讲

§3. 若尔当测度的性质

我们来验证对于平面上的可测图形定义的非负函数 $\mu(P)$, 具有那些最简单的图形所具有的单调性, 关于平面运动的不变性, 以及加性.

首先我们证明, 可测图形的集合关于集合论的运算: 集合的并、交、差, 是封闭的. 换言之, 若图形 P_1 和 P_2 皆可测, 则图形 $P_1 \bigcup P_2, P_1 \bigcap P_2, P_1 \setminus P_2$ 皆若尔当可测.

先证明两个集合的并的可测性. 根据集合若尔当可测的准则, 只需证明 $\mu(\partial(P_1 \bigcup P_2)) = 0$. 我们证明

$$\partial(P_1 \bigcup P_2) \subset \partial P_1 \bigcup \partial P_2.$$

任取 $x \in \partial(P_1 \bigcup P_2)$. 假设 $x \notin \partial P_1, x \notin \partial P_2$. 那么点 x 或是 P_1 的内点, 或是 P_2 的内点, 或者既是 P_1 的外点又是 P_2 的外点. 由此推出, 点 x 相对于集合 $P_1 \bigcup P_2$ 而言, 或是内点, 或是外点, 而这与点 x 属于集合 $P_1 \bigcup P_2$ 的边界相矛盾. 因此, 两集合之并的边界是这两个集合的边界之并的子集合.

把可测集 P_1 和 P_2 放在一个标准正方形 K 之中, 那么集合 $K \setminus P_1$ 和 $K \setminus P_2$ 都是若尔当可测的, 因为它们的边界包含在集合 K, P_1 和 P_2 的边界的并集之中. 由此推出集合

$$P_1 \setminus P_2, \quad P_1 \bigcap P_2 = K \setminus [(K \setminus P_1) \bigcup (K \setminus P_2)]$$

都是可测集.

现考察函数 $\mu(P)$ 的单调性. 若 $P_1 \subset P_2$, 则任何包含集合 P_2 的最简单图形也都包含 P_1, 因此 $\mu^*(P_1) \leqslant \mu^*(P_2)$. 但因图形 P_1 和 P_2 都可测, 所以

$$\mu(P_1) = \mu^*(P_1) \leqslant \mu^*(P_2) = \mu(P_2).$$

这表明, 函数 $\mu(P)$ 是单调的.

若尔当测度的平移不变性从最简单图形在平移之下面积不变, 从而在平移之下量 $\mu^*(P)$ 和 $\mu_*(P)$ 不变这一事实推出.

进而, 根据沙勒 (Chasles) 定理, 平面的任何运动都归结为对称, 平移, 以及绕一固定点的旋转. 所以, 为了完成若尔当测度关于平面运动的不变性的证明, 只需证明它关于平面绕一定点旋转的不变性. 我们觉察到, 在平面的旋转之下, 最简单的图形的面积不变, 然而它已不再是最简单的图形了.

于是, 设给定若尔当可测图形 P. 那么存在最简单的图形 P_1, P_2 使得 $P_1 \subset P \subset P_2$, 且

$$\mu(P_1) \leqslant \mu(P) < \mu(P_1) + \varepsilon, \quad \mu(P_2) - \varepsilon < \mu(P) \leqslant \mu(P_2),$$

而 P_1 和 P_2 皆可表示成有限个标准矩形的并集, 在平面绕某不动点的旋转之下, 图形 P, P_1 和 P_2 分别变成可测图形 Q, Q_1 和 Q_2, 且 $Q_1 \subset Q \subset Q_2$. 显然, 只消证明, 如果标准矩形在旋转之下变成了矩形 Π, 那么可将它含在一个开的最简单的图形 Π_1 中且让它包含一个闭的最简单图形 Π_2, 使得 $\Pi_2 \subset \Pi \subset \Pi_1$ 且差 $\mu(\Pi_1) - \mu(\Pi_2)$ 可以做得任意小. 为此我们把矩形 Π 框在一个矩形 Π_0 中, Π_0 的边分别与 Π 平行且相距甚小. 然后在 Π_0 内作最简单的图形, 使之包含 Π. 它就是要找的 Π_1. 类似地构作图形 Π_2.

现证若尔当测度的加性. 我们首先看到, 对于最简单的图形成立不等式

$$\mu(A \bigcup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B).$$

其次, 设图形 P_1 和 P_2 是若尔当可测的且设 $P = P_1 \bigcup P_2, P_1 \bigcap P_2 = \varnothing$. 那么, 根据集合的可测准则, 图形 P 是可测的, 因为两个集合的并集的边界包含在它们的边界的并集之中. 我们来证明成立等式

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2).$$

根据图形 P_1 和 P_2 的可测性, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在最简单的图形 Q_1 和 Q_2, R_1 和 R_2, 使得 $Q_1 \subset P_1 \subset Q_2, R_1 \subset P_2 \subset R_2$ 且

$$\mu(Q_1) \leqslant \mu(P_1) < \mu(Q_1) + \varepsilon, \quad \mu(Q_2) - \varepsilon < \mu(P_1) \leqslant \mu(Q_2),$$
$$\mu(R_1) \leqslant \mu(P_2) < \mu(R_1) + \varepsilon, \quad \mu(R_2) - \varepsilon < \mu(P_2) \leqslant \mu(R_2).$$

此外, 对于满足条件 $Q_1 \bigcap R_1 = \varnothing$ 的最简单图形 Q_1 和 R_1, 我们有 $\mu(Q_1 \bigcup R_1) = \mu(Q_1) + \mu(R_1)$, 且同样, $\mu(Q_2 \bigcup R_2) \leqslant \mu(Q_2) + \mu(R_2)$. 因此, 考虑到集合论的包含关系

$$(Q_1 \bigcup R_1) \subset (P_1 \bigcup P_2) = P \subset (Q_2 \bigcup R_2),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mu(Q_1) + \mu(R_1) = \mu(Q_1 \bigcup R_1) \leqslant \mu(P) \leqslant \mu(Q_2 \bigcup R_2) \\ \leqslant \mu(Q_2) + \mu(R_2) < \mu(Q_1) + \mu(R_1) + 4\varepsilon.\end{aligned}$$

同样显然有

$$\mu(Q_1) + \mu(R_1) \leqslant \mu(P_1) + \mu(P_2) < \mu(Q_1) + \mu(R_1) + 2\varepsilon.$$

由此求得

$$|\mu(P) - \mu(P_1) - \mu(P_2)| < 4\varepsilon.$$

而根据 $\varepsilon > 0$ 的选取的任意性, 有

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2).$$

这就证明了若尔当测度的加性.

§4. 可求长曲线的可测性

我们将证明, 如果 L 是可求长曲线, 那么它的平面若尔当测度等于零. 这表明, 根据图形的若尔当可测准则, 被可求长曲线界定的图形是可测的.

关于可求长曲线的下述引理以后有用.

引理 2 *设曲线 L 由方程 $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a, b]$ 给定, 且是可求长曲线. 那么此曲线对应于闭区间 $[a, t]$ 的那一段的长度 $s(t)$, 其中 $t \in [a, b]$, 是参数 t 的连续的单调增的函数.*

► 函数 $s(t)$ 的增性从曲线长度的加性推出. 实际上, 当 $t_1 < t_2$ 时有 $s(t_2) = s(t_1) + s_0$, 其中 s_0 是曲线上位于点 $A_1 = (\varphi(t_1), \psi(t_1))$ 和 $A_2 = (\varphi(t_2), \psi(t_2))$ 之间的那段曲线的长度, 它是正的, 因此 $s(t_2) > s(t_1)$.

我们来证明函数 $s(t)$ 没有间断点. 其实, 假设在点 t_0 处函数 $s(t)$ 间断. 那么根据 $s(t)$ 的单调性, 点 t_0 是第二类间断点, 函数在此点处有跳跃 $h > 0$. 这表明, 对于任何含有此点 t_0 的闭区间 $[t_1, t_2]$, 对应于此闭区间 $[t_1, t_2]$ 的曲线的长度都超过 h.

还有, 由于所给的曲线 L 是可求长的, 所以对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在内接折线 l 使得 $0 \leqslant s(L) - s(l) < \varepsilon$. 这条折线生成闭区间 $[a, b]$ 的一个非标码分法 $T : a = t_0 < \cdots < t_n = b$, 且每点 $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$ 对应于折线 l 的某个结节. 显然对于任意的预先给定的正数 δ, 可以认为 $\Delta_T < \delta$. 很清楚, 折线的具脚标 k 的一节的长度 l_k 满足条件

$$l_k \leqslant s(t_k) - s(t_{k-1}).$$

设点 t_0 属于某开区间 (t_{k-1}, t_{k+1}). 根据函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的一致连续性, 存在正数 δ, 使得对于一切满足 $|t' - t''| < \delta$ 的 t', t'', 成立不等式

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| < \frac{h}{8}, \quad |\psi(t') - \psi(t'')| < \frac{h}{8}.$$

因此有

$$l_k = \sqrt{(\varphi(t') - \varphi(t''))^2 + (\psi(t') - \psi(t''))^2} < \frac{h}{4}, \quad l_{k+1} < \frac{h}{4}.$$

由此, 根据曲线可求长的条件, 我们得到

$$\frac{h}{2} = h - \frac{2h}{4} < s(t_{k+1}) - s(t_k) - (l_k + l_{k+1}) \leqslant s(L) - s(l) < \varepsilon.$$

此不等式对于任何 $\varepsilon > 0$ 成立, 但对于 $\varepsilon = \dfrac{h}{2} > 0$ 它是矛盾的. 所以, 关于函数 $s(t)$ 的间断性的假定不成立. ◄

定理 2 *设 L 是可求长曲线. 那么它有平面若尔当测度零.*

► 把曲线 L 划分成 n 段, 使每段的长度都是 $a = \dfrac{s(L)}{n}$. 这是办得到的, 因为函数 $s(t)$ 是单调的且连续的. 那么曲线 L 上的第 k 段完全落在一个边平行于坐标轴且长度为 $2a$ 的并以曲线 L 的第 k 个分点为中心的正方形之中, $k = 1, \cdots, n$. 所有的这些正方形的并集构成一个最简单的图形 P, 它整个覆盖了 L, 而且

$$\mu(P) \leqslant n(2a)^2 = 4n\left(\frac{s(L)}{n}\right)^2 = \frac{4s^2(L)}{n}.$$

令 $n \to \infty$ 得 $\mu^*(L) = 0$, 从而 $\mu(L) = 0$. ◄

推论 *设图形 P 的边界是可求长曲线. 那么 P 是若尔当可测的.*

► 根据可测准则及上述定理, 得到图形 P 的可测性 ◄

§5. 函数的黎曼可积性与它所成的曲边梯形的若尔当可测性之间的关系

我们来考察由曲线 $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ 界定的曲边梯形 P. 函数黎曼可积的下述准则成立.

定理 3 *设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界且非负. 那么, 为使函数 $f(x)$ 黎曼可积, 必要且充分的条件是对应于曲线 $y = f(x)$ 的曲边梯形 P 是若尔当可测的.*

► *必要性* 已知函数 $f(x)$ 黎曼可积. 那么根据可积准则, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在闭区间 $[a, b]$ 的分法 T, 使得 $S(T) - s(T) < \varepsilon$, 其中 $S(T), s(T)$ 分别是对应于分法 T 的达布上和和达布下和.

对应于达布上和的闭的最简单图形 P_1 包含了整个曲边梯形 P, 而对应于达布下和的闭的最简单图形 P_2 容纳在曲边梯形 P 当中. 即成立集合论的包含关系 $P_2 \subset P \subset P_1$. 对应于此关系式有不等式

$$s(T) = \mu(P_2) \leqslant \mu_*(P) \leqslant \mu^*(P) \leqslant \mu(P_1) = S(T).$$

由于成立不等式 $S(T)-s(T)=\mu(P_1)-\mu(P_2)<\varepsilon$, 所以 $\mu^*(P)-\mu_*(P)<\varepsilon$. 由此, 根据数 $\varepsilon>0$ 的取法的任意性, 推出 $\mu^*(P)=\mu_*(P)$, 即曲边梯形 P 是若尔当可测的. 必要性证毕.

充分性 根据可积准则, 曲边梯形 P 的边界 ∂P 有若尔当测度零. 结果, 它的一部分: 由 $y=f(x), a\leqslant x\leqslant b$ 给出的曲线 L, 有平面若尔当测度零. 因此, 对于任意的 $\varepsilon>0$. 存在最简单图形 Q, 使得 $L\subset Q, \mu(Q)<\varepsilon$. 把构成 Q 的标准矩形的竖直边向下延长至与 Ox 轴相交. 这样交点给出了闭区间 $[a,b]$ 的一个分法 T. 用 Q_1 代表位于 Q 之下在 $y\geqslant 0$ 的范围内的最简单图形, 而用 Q_2 代表图形 $Q\bigcup Q_1$. 那么

$$Q_1\subset P\subset Q_2,\quad \mu(Q_2)-\mu(Q_1)=\mu(Q)<\varepsilon.$$

我们发现, 图形 Q_1 对应于达布下和, 而图形 Q_2 对应于达布上和. 结果, $S(T)-s(T)<\varepsilon$. 从而

$$\inf_T(S(T)-s(T))=0,$$

它表明, 根据可积准则, 函数 $f(x)$ 是可积的. ◄

例 1. 在证明上述定理的第一部分时所作的论述表明曲边梯形

$$P: y=f(x)\geqslant 0,\quad y=0,\quad x=a,\quad x=b$$

的面积等于

$$\mu(P)=\int_a^b f(x)dx.$$

2. 由极坐标方程 $r=f(\varphi), \varphi=\alpha, \varphi=\beta$ 给出边界的曲边扇形 P 的面积由下面的公式确定:

$$\mu(P)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi.$$

此公式之证明依仗于若尔当测度的单调性. 把闭区间 $[\alpha,\beta]$ 分成 n 等分, 分点为 $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\cdots<\varphi_n=\beta$. 曲线 $r=f(\varphi)$ 用点 $A_k(r_k,\varphi_k), r_k=f(\varphi_k)$ 划分成了 n 段, 而扇形相应地划分成了 n 个扇形 P_k. 设

$$f_k=\min_{\varphi\in[\varphi_{k-1},\varphi_k]}f(\varphi),\quad F_k=\max_{\varphi\in[\varphi_{k-1},\varphi_k]}f(\varphi).$$

那么第 k 个曲边扇形包含着半径为 f_k 的圆扇形且包含于半径为 F_k 的圆扇形中. 使用圆扇形的面积公式以及面积的单调性, 有

$$\frac{1}{2}f_k^2\Delta\varphi_k\leqslant\mu(P_k)\leqslant\frac{1}{2}F_k^2\Delta\varphi_k,\quad \Delta\varphi_k=\varphi_k-\varphi_{k-1}.$$

由此得到

$$s_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n f_k^2\Delta\varphi_k\leqslant\mu(P)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n F_k^2\Delta\varphi_k=S_n.$$

和 s_n 和 S_n 是积分

$$I = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi$$

的达布下和与上和. 由于函数 $f(\varphi)$ 连续, $f^2(\varphi)$ 亦连续从而可积, 故当 $n \to \infty$ 时有 $s_n \to I, S_n \to I$. 由此得到 $\mu(P) = I$. 结论获得证实.

类似地也可以计算各种图形的体积, 把依赖于某参数 n 的最简单图形包含在所考虑的图形中, 亦把同样依赖于 n 的最简单图形包住所考虑的图形. 算出这些最简单的图形的体积, 然后令 n 趋于无穷, 使这两类量趋于同一极限, 即待求的体积. 阿基米德就已用类似的方法来求面积和体积. 也就是说, 我们使用了属于阿基米德的**穷竭法**.

于是, 若尔当可测的概念在很大程度上可以决定怎样一类图形 P 在平面上和在空间中具有面积或体积 $\mu(P)$. 不过, 可以容易地引入非若尔当可测的平面集合 P 的例于. 例如, 我们考察闭区间 $[0,1]$ 上的狄利克雷函数 $\chi(x)$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, 若\ x\ 是有理数, \\ 0, 若\ x\ 是无理数. \end{cases}$$

设 P 是对应于这个函数的曲边梯形, 即对于一切 $x \in [0,1]$, 由条件 $0 \leqslant y \leqslant \chi(x)$ 确定的平面 xOy 上的点 (x,y) 的集合.

显然, 任何包含 P 的简单图形都必须包含单位正方形, 因此 P 的上测度 $\mu^*(P) = 1$. 但同时, 包含在 P 中的简单图形显然只能由有限条线段组成, 因此它们只能有零面积. 所以图形 P 的下测度等于零. 这表明图形 P 不是若尔当可测的. 根据下面的理由, 正确的思考表明, 赋予图形 P 以测度零是更为理智的.

如所周知, 闭区间上的有理点可以编上号码, 因此, 图形 P 实由可数个线段组成. 任取 $\varepsilon > 0$, 用面积为 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的标准矩形盖住第一条线段, 用面积为 $\frac{\varepsilon}{2^2}$ 的标准矩形盖住第二条线段, 依此类推, 那么整个图形 P 就被可数多个标准矩形所覆盖, 而这些标准矩形的总面积 [①] 不超过量

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots = \varepsilon.$$

由于图形 P 被总面积不超过 ε 的无穷可数多个矩形所覆盖, 所以自然地认为图形 P 的面积也不超过 ε, 而这只有当 P 的面积等于零时才可能做到.

用这种方式, 现在可以甚至定义非若尔当可测的图形的面积. 沿着这一思路发展, 就导致勒贝格测度的概念, 勒贝格测度的概念可以建立在任何确定维数的空间中, 其中也包括直线 $\mathbb{R}$ 在内.

①这个 "总面积" 在黎曼积分 (或若尔当测度) 理论中是无定义的, 这正是问题的要害. 由此可说黎曼积分 (或若尔当测度) 的本质缺陷是不承认 "σ 可加性" (或无穷可数可加性) —— 译者注.

第十二章　勒贝格测度论与勒贝格积分论初步. 斯蒂尔切斯积分

第十五讲

§1. 勒贝格测度的定义和性质

我们考察平面勒贝格测度的情形.

定义 1 设有界的平面图形 P 被有限个或可数个标准开矩形 h_n 所覆盖, $n = 1, 2, \cdots$. 这些矩形的集合 $H = \{h_n\}$ 叫作平面集合 (或图形) P 的覆盖. 量

$$\mu_H = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{s=1}^{n} h_s\right)$$

叫作覆盖 H 的测度. 把开的最简单图形[1] H 叫作最简单集合.

我们看到, 量 μ_H 总是非负的.

定义 2 数 $\mu^*(P) = \inf\limits_{H} \mu_H$ 叫作图形 P 的勒贝格上测度[2], 其中 $\inf\limits_{H}$ 取遍覆盖 P 的一切可能的最简单集合 H.

---

[1]这种说法似不妥, 应把 H 前的 "最简单图形" 一语去掉 —— 译者注.

[2]通用的说法是外测度 —— 译者注.

显然有 $0 \leqslant \mu^*(P) < \infty$, 因为根据图形 P 的有界性, 存在以 l 为边长的标准正方形 K 使 $P \subset K$. 由此 $\mu^*(P) \leqslant l^2$.

定义 3 设 $CP = K \setminus P$, 其中 K 是覆盖 P 的标准正方形. 把数

$$\mu_*(P) = \mu(K) - \mu^*(CP)$$

叫作集合 P 的勒贝格下测度①.

定义 4 平面集合 P 叫作是勒贝格可测的, 如果

$$\mu^*(P) = \mu_*(P) = \mu(P),$$

而数 $\mu(P)$ 叫作平面勒贝格测度.

我们来证明集合勒贝格可测的下述准则.

定理 1 设 A 是有界集, 为使集 A 是勒贝格可测的, 必要且充分的条件是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在最简单的集合 $B = B(\varepsilon)$, 使得成立

$$\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon.$$

这表明, 任一勒贝格可测集可被最简单集合近似到任意的精确度.

► *必要性* 根据集 A 的有界性, 存在标准正方形 K 覆盖 A, 即 $A \subset K$. 给定的是集合 A 可测, 即 $\mu^*(A) = \mu_*(A)$, 亦即 $\mu^*(A) + \mu^*(K \setminus A) = \mu(K)$.

由勒贝格上测度的定义推出, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在开标准矩形序列 $\{C_n\}$, 它覆盖 A, 即 $A \subset C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, 并且

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

类似地, 存在标准矩形序列 $\{D_n\}$, 使得

$$K \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D, \quad \mu^*(K \setminus A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) < \mu^*(K \setminus A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

我们指出, 集合 C 和 D 组成正方形 K 的覆盖. 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(C_n)$ 收敛, 所以存在号码 $k = k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, 使得 $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \mu(C_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

置

$$B = \bigcup_{n=1}^{k} C_n, \quad P = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} C_n, \quad Q = B \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right).$$

①通常叫作内测度 —— 译者注.

我们发现, 集合 B 和 P 构成集合 A 的覆盖, 即 $B\bigcup P\supset A$. 从而集合 P 包含 $A\setminus B$. 同样有, 集合 Q 包含 $B\setminus A$. 其实

$$Q=B\bigcap D\supset B\bigcap(K\setminus A)=B\setminus A.$$

于是

$$P\bigcup Q\supset(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)=A\Delta B.$$

我们从上方估计量 $\mu(P\bigcup Q)$. 由于对于任何两个最简单集合 F 和 G 都成立等式

$$\mu(F\bigcup G)=\mu(F)+\mu(G)-\mu(F\bigcap G),$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mu(P\bigcup Q)&=\mu(C\bigcap D)=\mu(C)+\mu(D)-\mu(C\bigcup D)\\&<\mu^*(A)+\frac{\varepsilon}{2}+\mu^*(K\setminus A)+\frac{\varepsilon}{2}-\mu(K)=\varepsilon.^{①}\end{aligned}$$

结果, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 找得到最简单的集合 $B=B(\varepsilon)$ 使得

$$\mu^*(A\Delta B)\leqslant\mu(P\bigcup Q)<\varepsilon.$$

充分性 设成立着条件: 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在最简单的集合 $B=B\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 使得 $\mu^*(A\Delta B)<\frac{\varepsilon}{2}$. 由于 $B\bigcap(A\setminus B)=\varnothing, A\bigcap(B\setminus A)=\varnothing$, 所以成立不等式

$$\mu(B)+\mu^*(A\setminus B)\geqslant\mu^*(A),\quad\mu^*(A)+\mu^*(B\setminus A)\geqslant\mu(B).$$

由此, 根据条件 $A\setminus B\subset A\Delta B, B\setminus A\subset A\Delta B$, 得

$$\mu^*(A)-\mu(B)\leqslant\mu^*(A\setminus B)\leqslant\mu^*(A\Delta B)<\frac{\varepsilon}{2},$$
$$\mu(B)-\mu^*(A)\leqslant\mu^*(B\setminus A)\leqslant\mu^*(A\Delta B)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $|\mu^*(A)-\mu(B)|<\varepsilon/2$.

接下来, 由于集合 A 是有界的, 故存在标准正方形 K, 使得 $K\supset A$ 且 $K\supset B$. 显然

$$(K\setminus A)\Delta(K\setminus B)=A\Delta B.$$

因此, 如前一样,

$$|\mu^*(K\setminus A)-\mu(K\setminus B)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

使用等式 $\mu(B)+\mu(K\setminus B)=\mu(K)$, 得

$$|\mu^*(A)+\mu^*(K\setminus A)-\mu(K)|\leqslant|\mu^*(A)-\mu(B)|+|\mu^*(K\setminus A)-\mu(K\setminus B)|<\varepsilon.$$

①此式有误, 实际上 $P\bigcup Q=(C\setminus B)\bigcup(B\bigcap D)\subset(C\setminus B)\bigcup(C\bigcap D)$ —— 译者注.

根据数 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 得

$$\mu^*(A) + \mu^*(K - A) - \mu(K) = 0,$$

即 $\mu^*(A) = \mu(K) - \mu^*(K \setminus A) = \mu_*(A)$. 这表示集 A 可测. ◄

根据已证的准则, 显然有, 对于任意的可测集 A 和 B, 它们的并、交、差以及对称差都是可测集. 而且还有, 如果两可测集 A 和 B 不相交, 则

$$\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

我们不再过细地研究勒贝格可测集的性质, 不过要指出, 此事并不比研究若尔当可测集的性质复杂多少. 但是, 勒贝格测度却具有比若尔当测度本质上的优越之处, 因为除了关于平面运动的不变性及单调性之外, 它取代若尔当测度所具有的有限可加性而具有可数可加性.

定理 2 设 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 是一列两两不交的勒贝格可测集. 设它们的并集 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 是有界集. 那么集合 A 是勒贝格可测的, 且

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

► 由于集 A 有界, 故存在标准正方形 K 包含 A. 据此以及有限可加性, 对于任意的固定的数 $k \geqslant 1$, 有关系式

$$\sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leqslant \mu(K).$$

由此推出, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ 收敛, 因此, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $k_0 = k_0(\varepsilon)$ 使得对于任意的数 $k > k_0$, 成立不等式 $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon/2$.

固定某个比 k_0 大的数 k. 那么集合 $C = \sum\limits_{n=1}^{k} A_n$ 是可测集. 结果, 根据可测准则 (定理 1) , 存在最简单的集合 $B = B\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, 使得 $\mu^*(C\Delta B) < \varepsilon/2$.

下面的关系式明显成立:

$$A\Delta B \subset (C\Delta B) \bigcup \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n.$$

使用不等式

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

得到 $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$. 因此集合 A 可测. 于是集 $C_k = \bigcup\limits_{n=k+1}^{\infty} A_n$ 也都可测.

接着, 根据有限可加性,

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) + \mu(C_k).$$

此外, 前面已证明 $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \mu(C_k) = 0$. 所以

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \quad ◀$$

上面所证的勒贝格测度的可数可加性的重要推论是, 可数多个可测集的交集是可测的, 可数多个可测集的并集如果是有界的则也是可测的.

特别地, 由此得知, 任何有界开集, 作为不多于可数多个的开的标准矩形的并集, 是可测集. 那么, 任何闭集, 作为开集的余集也可测. 结果, 任意不多于可数多个的开集和闭集的并集和交集, 都是勒贝格可测的.

我们还要证明勒贝格测度的一条性质: 连续性.

定理 3 *设 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 都是可测集, 并设 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 是有界集. 此外设 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$. 那么 $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$*

▶ 我们有

$$A_n = A_1 \bigcup (A_2 \setminus A_1) \bigcup \cdots \bigcup (A_n \setminus A_{n-1}), \quad A = A_1 \bigcup \left(\bigcup_{s=2}^{\infty} (A_s \setminus A_{s-1}) \right),$$

同时, 对于任意的 $s, t \geqslant 2, s \neq t$, 成立关系式

$$A_1 \bigcap (A_s \setminus A_{s-1}) = \varnothing, \quad (A_s \setminus A_{s-1}) \bigcap (A_t \setminus A_{t-1}) = \varnothing.$$

根据测度的可数可加性, 得

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \sum_{s=2}^{\infty} \mu(A_s \setminus A_{s-1}) = \mu(A). \quad ◀$$

我们指出, 并非平面上的任何集合都是勒贝格可测的, 但是不可测的集合具有"怪异的"形状.

我们来回答这样一个问题, 在不同维数的可测集概念之间有何种联系. 譬如说, 如果有一个可测的平面图形 P, 而我们用平行于一个坐标轴的直线去与此图形相交, 这时, 交集是一个位于一条直线上的有界集. 这样的线状有界集是不是勒贝格可测集, 这个问题具有原则性的重要意义. 这些交集, 除了所在的直线与另一坐标轴的交点属于某个直线上的零测度集的那些以外, 都是可测的.

一般而言, 如果某个条件对于集合 $M \subset \mathbb{R}$ 的除去一个测度为零的集 M' 外的所有的点都成立, 则说此条件对于集合 M 的几乎所有的点都成立. 几乎所有的, 在勒贝格测度的意义下, 指的是某个性质在整个集合上除去一个测度为零的集合外的每点处都成立.

现在来考察直线勒贝格测度, 即在数轴 $\mathbb{R}$ 上的有界集的测度, 显然, 可数集具有测度零. 可能会问, 是否存在测度为零的不可数集? 是的, 例如康托尔完全集M 就是这样的集合. 康托尔完全集是闭区间 $[0,1]$ 的一个这样的子集, 它由写成三进制小数时, 用不着数字 1 的那些数. 例如, 数 $0.2; 0.200202; 0.222\cdots = 1$ 等等组成.

显然, 集合 M 具有连续统的势, 同时它可以这样得到: 把闭区间 $[0,1]$ 分成三等分并除去中间的开区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 然后对第一次划分后剩下的两个闭区间重复这一步骤, 依此类推.

设 E_0 是原始的闭区间 $[0,1]$, E_1 是在第一步之后剩下的那个集合, E_2 是第二步之后剩下的集合, 依此类推.

显然 $E_0 \supset E_1 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$ 且集合 M 等于 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. 那么, 对于任意的 $n \geqslant 1$, 关于集合 M 的上测度成立估计式 $\mu^*(M) < \mu(E_n)$. 显然有

$$\mu(E_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu(E_0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \quad \text{当} n \to \infty.$$

所以集 M 的测度等于零.

在结束对勒贝格测度理论的基础的考察时, 我们指出, 定理 1 使得可以给勒贝格积分以另一个定义, 它不需引入下测度的概念, 并且把可测集的类扩大到无界集.

第十六讲

§2. 勒贝格积分

直线上的勒贝格测度的概念使得可借助于引入勒贝格积分的概念而扩大可积函数的类. 为说清楚这件事, 先引入可测函数的概念.

定义 5 给定在闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 叫作是在此区间上可测的, 如果对于任何 $y \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x) < y$ 的点 $x \in [a,b]$ 的集合 E 都是区间 $[a,b]$ 上的依直线上的勒贝格测度的意义可测的集合.

从上节中已证明的勒贝格测度的性质可知, 代替集合 E, 分别使关系式 $f(x) \geqslant y, f(x) = y, z < f(x) \leqslant y$ 成立的点 $x \in [a,b]$ 的集合都是可测的.

特别地, 任何在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 都是可测的, 因为集合 $I_y = \{x \in [a,b] | f(x) \geqslant y\}$ 是闭集, 而任何闭集都是可测集.

作为在闭区间 $I=[a,b]$ 上可测的函数 $f(x)$ 的第二个例子我们来考察其间断点的全体是一个勒贝格测度为零的集合的有界函数. 根据勒贝格准则, 这个函数是黎曼可积的. 我们来证明, 这个函数是可测的.

任取数 $y \in \mathbb{R}$. 只要证明集合 $I_y = \{x \in I | f(x) \geqslant y\}$ 是可测的. 集合 I_y 的极限点 x_0 可能有两种: 函数 $f(x)$ 的连续点以及它的间断点. 如果这样的点 x_0 是连续点, 那么它必属于 I_y. 实际上, 由于 x_0 是集合 I_y 的极限点, 所以存在一列点 $x_n \in I_y$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad f(x_n) \geqslant y.$$

由此, 根据 $f(x)$ 在点 x_0 处的连续性, 得

$$y \leqslant \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0),$$

即点 x_0 属于 I_y.

而若集 I_y 的极限点 x_0 不属于 I_y, 则它必是函数 $f(x)$ 的间断点用 F 表示一切这样的点 x_0 的集合. 集 F 作为一个勒贝格测度为零的集合的子集, 有测度零.

由于集合 $A = I_y \bigcup F$ 是闭集, 所以是可测集. 结果集合 I_y 作为一个可测集与一个零测度集的差, 是可测集. 这就确立了间断点的全体是勒贝格零测度集的函数的可测性.

下面我们来考察在闭区间 $[a,b]$ 上有界且可测的函数 $f(x)$. 那么, 对于某 $M>0$, 对于一切 $x \in [a,b]$ 成立不等式 $|f(x)| < M$. 把坐标轴上的闭区间 $[-M,M]$ 划分成 n 等分: $-M = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M$. 满足条件 $y_s < f(x) < y_{s+1}$ 的点 x 的集合记作 $E_s, s=0,\cdots,n-1$. 我们见到, 集合 E_s 是可测的. 令 $\mu_s = \mu(E_s)$.

定义 6 代数和 $S_n = \sum\limits_{s=0}^{n-1} \mu_s y_s$ 叫作勒贝格积分和.

可以证明, 永远存在极限 $I = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. 这个极限叫作函数 $f(x)$ 沿着闭区间 $[a,b]$ 的**勒贝格积分**, 并记作 $(L)\int_a^b f(x)dx$. 由于对于任何一个黎曼可积的函数, 间断点的集合都有测度零 (勒贝格准则), 故由上所证, 知其勒贝格可测. 此外, 此函数之勒贝格积分等于其黎曼积分. 实际上, 设 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是闭区间 $[a,b]$ 的一个任意的分法, $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i], \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, m_i = \inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x), M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$. 那么对于勒贝格积分成立不等式

$$m_i \Delta x_i \leqslant (L)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \leqslant M_i \Delta x_i.$$

因此, 根据勒贝格积分的可加性, 对于达布上和与达布下和, 得到不等式

$$s(T) \leqslant (L)\int_a^b f(x)dx \leqslant S(T).$$

由此, 当分法 T 的直径 Δ_T 趋于零时过渡到极限, 得

$$\lim_{\Delta_T\to 0} s(T) = \lim_{\Delta_T\to 0} S(T) = (R)\int_a^b f(x)dx.$$

这样我们就证明了勒贝格积分等于黎曼积分, 如果后者存在的话. 我们看到, 由于这个缘故, 对于勒贝格积分使用与黎曼积分同样的记号.

我们现在转向研究在闭区间 $[a,b]$ 上的无界可测函数, 先考虑非负函数 $f(x)$ 的情形. 对于任意的实数 y, 如下定义函数 $f_y(x)$:

$$f_y(x) = \begin{cases} f(x), \text{若 } f(x) \leqslant y, \\ y, \quad\ \ \text{若 } f(x) > y. \end{cases}$$

此函数可测. 那么, 称极限

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to\infty}\int_a^b f_y(x)dx$$

为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的**积分**. 若此极限是有限的, 则函数 $f(x)$ 叫作是**可和的**. 显然, 可和的函数仅可以在一个勒贝格测度为零的集合上变为无穷.

现设函数 $f(x)$ 取任意符号的值. 那么我们定义函数

$$f_+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_-(x) = \max(-f(x), 0).$$

我们说一个函数 $f(x)$ 是**可和的**, 指的是两函数 $f_+(x)$ 和 $f_-(x)$ 皆可和, 此时函数 $f(x)$ 的积分定义为函数 $f_+(x)$ 的积分与函数 $f_-(x)$ 的积分的差.

我们指出, 在闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数的情形, 可和函数的概念与可测函数的概念重合. 从可和函数的定义直接推出:

1) 函数 $|f(x)|$ 同 $f(x)$ 一道可和, 而且被积函数 $f(x)$ 的积分的绝对值不超过此函数的绝对值的积分;

2) 若 $f(x)$ 可测而 $|f(x)|$ 可和, 则函数 $f(x)$ 可和;

3) 若 $f(x)$ 可测且其绝对值不超过可和函数 $g(x)$, 则函数 $f(x)$ 可和;

4) 若 $f(x)$ 可和且 $g(x)$ 是有界可测函数, 则它们的乘积是可和函数.

5) 若 $f(x)$ 是可和函数而 $g(x)$ 仅在一个测度为零的集合上与它不同, 那么函数 $g(x)$ 可和, 且这两个函数的积分彼此相等.

我们还指出, 对于可和函数的勒贝格积分, 那些关于黎曼积分的性质都成立, 而且还有一条重要的性质: **勒贝格积分的可数可加性**. 此性质可叙述如下:

设在闭区间 $[a,b]$ 上给定了可数个单位分解, 即可数个可测函数 $g_n(x), g_n(x)$ 总共只取 0 和 1 两个值, 而且对于任何 $x\in[a,b]$, 有且仅有一个函数 $g_n(x)$ 异于零. 那么对于任何在闭区间 $[a,b]$ 上可和的函数 $f(x)$, 有

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f(x)g_n(x)dx.$$

此性质亦可用另一方式来表述. 设闭区间 $[a,b]$ 被划分成互不相交的一族可测集 E_n. 那么函数 $f(x)$ 沿着集合 E_n 的积分存在而且成立等式

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)dx.$$

沿着集合 E_n 的积分可写成这样:

$$\int_{E_n} f(x)dx = \int_a^b f(x)g_n(x)dx,$$

其中 $g_n(x)$ 是集合 E_n 的特征函数, 即

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & 若\ x \in E_n, \\ 0 & 若\ x \notin E_n. \end{cases}$$

作为结束语我们指出, 在勒贝格积分的情形, 与黎曼积分相比较, 积分号下的极限过程被大大简化了. 我们给出这个断语的精确叙述.

定理 4 (勒贝格定理) 设在闭区间 $[a,b]$ 上可测函数 $f_n(x)$ 的序列收敛到函数 $f(x)$, 并设对于某个可和的函数 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上成立不等式 $|f_n(x)| \leqslant g(x)$. 那么极限函数 $f(x)$ 可和且成立等式

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

► 根据定理的条件, 函数 $f_n(x)$ 的绝对值不超过可和函数 $g(x), n \geqslant 1$. 因此, 极限函数 $f(x)$ 的绝对值也不超过 $g(x)$. 而这就表明, $f(x)$ 是可和函数.

应当证明的是 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx = 0$, 其中 $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$. 任给 $\varepsilon > 0$. 对于每个 $n \geqslant 1$, 定义集合 A_n 由使得 $|g_n(x)| \geqslant \varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ 的点 x 组成. 那么根据上面提到的勒贝格测度的可数可加性, 成立等式 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. 不然的话将会找出点 x, 使得对于无穷多个 n 值, 成立不等式 $|g_n(x)| \geqslant \varepsilon_1$, 而这与

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$$

相矛盾, 把积分 $J = \int_a^b g_n(x)dx$ 表示成

$$J = J_1 + J_2$$

其中 $J_1 = \int_{I\setminus A_n} g_n(x)dx, J_2 = \int_{A_n} g_n(x)dx, I = [a,b]$.

根据中值定理, 有

$$|J_1| \leqslant \varepsilon_1(b-a) = \frac{\varepsilon}{3},$$

而对于积分 J_2 成立估计式

$$|J_2| \leqslant \int_{A_n} |g_n(x)|dx \leqslant 2\int_{A_n} g(x)dx.$$

设 $B_m = \{x \in A_n | g(x) \geqslant m\}$. 那么根据积分 $\Phi = \int_{A_n} g(x)dx$ 的收敛性, 有

$$\lim_{m\to\infty} \int_{B_m} g(x)dx = 0.$$

因此, 存在 $m_0 \in \mathbb{N}$, 使得对于一切 $m > m_0$ 成立不等式

$$\left|\int_{B_m} g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

往下, 我们把积分 Φ 写成 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, 其中

$$\Phi_1 = \int_{B_m} g(x)dx, \quad \Phi_2 = \int_{A_n \setminus B_m} g(x)dx.$$

根据中值定理, 有

$$|\Phi_2| \leqslant m\mu(A_n \setminus B_m) \leqslant m\mu(A_n).$$

由于集合 A_n 的测度当 $n \to \infty$ 时趋于零, 对于任意固定的 $m > m_0$, 可以指出 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得对于一切 $n > n_0$ 成立不等式

$$|\Phi_2| \leqslant m\mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 我们找到了 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得对于一切 $n > n_0$ 成立不等式

$$\left|\int_a^b g_n(x)dx\right| < \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx = 0$. ◄

我们还要指出一个事实, 对于有界的非负的函数, 其勒贝格可积性等价于它的曲边梯形的勒贝格可测性.

第十七讲

§3. 斯蒂尔切斯积分

黎曼积分概念还有一种推广, 即**斯蒂尔切斯积分**. 它反映了黎曼积分与勒贝格积分相比较的另一种特性. 如果说, 勒贝格测度和勒贝格积分的引入是为了扩大可

测集的类和可积函数的类, 那么斯蒂尔切斯积分的引入则是为了解决另外的问题. 问题的本质如下: 在一个固定的闭区间 $[a,b]$ 上, 积分

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

是一个数, 它作成了与每个可积函数的对应. 黎曼积分以此种方式给出了定义在全体在闭区间 $[a,b]$ 上可积的函数的集合 $\{f\}$ 上的一个数值函数. 我们缩小这个函数类而只考虑定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 一切这样的函数的集合通常用符号 $C[a,b]$ 表示, 并且对于每个函数 $f \in C[a,b]$, 定义一个量 $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, 叫作在空间 $C[a,b]$ 中**函数** $f(x)$ **的范数**. 设 $f \in C[a,b]$, 那么, 如我们已知的, 函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上黎曼可积, 且

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

$I(f)$ 是一个线性的数值函数, 即对于任意的 $f, g \in C[a,b]$ 和任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 成立等式

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g).$$

我们记得, 定义在一个由函数为元素的集合上的数值函数, 为避免混淆起见, 叫作**泛函数**. 此外, 把每个函数 $f \in C[a,b]$ 对应到数 $I(f)$ 的泛函数 I 叫作**线性泛函**(数), 如果下述性质成立:

1° 加性

$$I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2), \quad \forall f_1, f_2 \in C[a,b].$$

2° 齐性

$$I(cf) = cI(f), \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in C[a,b].$$

3° 有界性:[①] 存在 $M > 0$ 使得对于任意的 $f \in C[a,b]$ 成立不等式 $|I(f)| \leqslant M\|f\|$. 这样的数 M 的最小值叫作**线性泛函** I **的范数**, 并记作 $\|I\|$.

于是, 黎曼积分 $I(f)$ 给出了空间 $C[a,b]$ 上的一个线性泛函. 借助于黎曼积分, 在空间 $C[a,b]$ 上可以构作许多其他的线性泛函. 例如, 对于任一固定的黎曼可积的函数 $g(x)$, 在空间 $C[a,b]$ 上可以给出线性泛函

$$I_g(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

我们发现, 如果函数 $G(x)$ 使得对于任何 $x \in [a,b]$ 都成立 $G'(x) = g(x)$, 则 $I_g(f)$ 可表示成如下形状:

$$I_g(f) = \int_a^b f(x)dG(x).$$

①在泛函分析的一般理论中, 并不把有界性包括在线性泛函的定义中 —— 译者注.

为了积分理论的发展及其某些应用, 例如对于概率论, 对于变分法, 对于理论力学等的应用, 重要的是知识对这样的问题的答案: 是否空间 $C[a,b]$ 上的任何一个线性泛函 $\varphi(f)$ 都可以表示成这样的形状, 也就是说, 是不是总能找到这样的函数 $g(x)$ 使得

$$\varphi(f) = I_g(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dG(x).$$

容易明白, 如果我们只限于通常的黎曼积分的话, 答案是否定的, 因为, 例如泛函 $\varphi(f) = f(x_0)$, 其中 x_0 是闭区间 $[a,b]$ 的一个固定的点 (特别地 $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$), 就不能表示成这种形状. 然而可以推广黎曼积分的概念而使得空间 $C[a,b]$ 上的任何线性泛函 $\varphi(f)$ 都可以表示成

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)dG(x)$$

的形状.

黎曼积分概念沿所述方向的推广就导致斯蒂尔切斯积分概念的引入. 为此需要定义一个新的函数类.

定义 7 函数 $u(x)$ 叫作是在闭区间 $[a,b]$ 上有界变化的, 或者说是有界变差的, 如果存在实数 $M>0$, 使得对于任意的分法

$$T: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

都成立不等式

$$V(f;T) = \sum_{s=1}^{n} |u(t_s) - u(t_{s-1})| < M.$$

量 $V_a^b(f) = \sup\limits_T V(f;T)$ 叫作函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的**全变化**或者**全变差**.

我们指出在闭区间上有界变差的函数的下述性质.

1° 两个有界变差函数的和是有界变差函数.

实际上, 设 $h(x) = f(x) + g(x)$. 那么对于闭区间 $[a,b]$ 的任意的分法 T 成立不等式

$$V(h;T) \leqslant V(f;T) + V(g;T).$$

由此推出, 函数 $h(x)$ 的全变差 $V_a^b(h)$ 不超过函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的全变差之和.

2° 在闭区间 $[a,b]$ 上的有界的单调函数是有界变差函数.

我们仅考虑函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上不减的情形. 我们有

$$V_a^b(f) = f(b) - f(a).$$

3° 设 $a<c<b$ 且函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界变差. 那么, 成立等式

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

任取闭区间 $[a,c]$ 的分法 T_1 和闭区间 $[c,b]$ 的分法 T_2, 并令 $T=T_1\bigcup T_2$. 那么 $V(f;T)=V(f;T_1)+V(f;T_2)$. 由于

$$\sup_{T_1} V(f;T_1)=V_a^c(f),\quad \sup_{T_2} V(f;T_2)=V_c^b(f),$$

那么在前面的等式中关于分法 T_1 和 T_2 取上确界, 得

$$V_a^c(f)+V_c^b(f)=\sup_{T=T_1\cup T_2} V(f;T)\leqslant V_a^b(f).$$

现任取闭区间 $[a,b]$ 的分法 T, 并对其增添分点 c. 得到闭区间 $[a,c]$ 的分法 T_1 和闭区间 $[c,b]$ 的分法 T_2. 那么

$$V(f;T)\leqslant V(f;T_1)+V(f;T_2).$$

在这个不等式中, 关于一切分法 T 取上确界就得到

$$V_a^b(f)\leqslant \sup_T(V(f;T_1)+V(f;T_2))\leqslant V_a^c(f)+V_c^b(f).$$

与前已证明的反方向的不等式一道, 这就给出

$$V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f).$$

4° *每个在闭区间 $[a,b]$ 上有界变差的函数都可以表示成两个有界的单调增函数的差.*

置 $\varphi(x)=V_a^x(f)$. 那么函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上不减且非负. 又置 $\psi(x)=\varphi(x)-f(x)$. 当 $x_1>x_2$ 时, 有

$$\psi(x_1)-\psi(x_2)=V_a^{x_1}-V_a^{x_2}-f(x_1)+f(x_2)=V_{x_2}^{x_1}-(f(x_1)-f(x_2))\geqslant 0,$$

这是因为

$$V_{x_2}^{x_1}=\sup_T V(f;T)\geqslant \sup_T\left|\sum_{s=1}^n (f(x_s)-f(x_{s-1}))\right|=|f(x_2)-f(x_1)|.$$

5° *在闭区间 $[a,b]$ 上具有有限个局部最大和局部最小的函数是有界变差函数.*

设闭区间 $[x_{s-1},x_s], s=1,\cdots,n$, 给出了函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的单调区段. 那么

$$V_a^b(f)\leqslant \sum_{s=1}^n V_{x_{s-1}}^{x_s}(f),\quad V_{x_{s-1}}^{x_s}(f)=|f(x_s)-f(x_{s-1})|.$$

例 求函数 $f(x)=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的全变差.

把闭区间 $[0,2\pi]$ 划分成函数 $\sin x$ 的单调区段: $\left[0\ \ \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. 那么根据性质 5° 和性质 3°, 有

$$V_0^x(\sin) = \begin{cases} \sin x, & \text{若 } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 2 - \sin x, & \text{若 } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{3\pi}{2}, \\ 4 + \sin x, & \text{若 } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 而 $u(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 并设 $V = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \xi_1, \cdots, \xi_n\}$ 是闭区间 $[a,b]$ 的一个标码分法且 $T = T(V)$ 是对应于它的非标码分法. 另外还设

$$\Delta_s u = u(t_s) - u(t_{s-1}), \quad \sigma(V) = \sigma_u(V) = \sum_{s=1}^{n} f(\xi_s)\Delta_s u.$$

那么 $\sigma(V)$ 叫作**斯蒂尔切斯积分和**. 如果存在极限

$$\lim_{\Delta_T \to 0} \sigma(V) = I_u(f),$$

则函数 $f(x)$ 叫作是在闭区间 $[a,b]$ 上**关于函数** $u(x)$ **可积的**, 而量 $I_u(f)$ 叫作函数 $f(x)$ 关于函数 $u(x)$ 的**斯蒂尔切斯积分**并记作

$$I = I_u(f) = \int_a^b f(x)du(x).$$

此极限可看作是沿着基 B 的极限, 基 B 由终端 $b = b_\delta$ 组成, b_δ 代表全体直径小于 δ 的标码分法的集合. 因此极限 I 是唯一的.

我们现在来证明使斯蒂尔切斯积分存在的一个充分条件.

定理 5 (可积的充分条件) *设函数 $u(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界变差. 那么使斯蒂尔切斯积分 $\int_a^b f(x)du(x)$ 存在的一个充分条件是, 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.*

► 根据柯西准则, 斯蒂尔切斯积分和的极限 $\lim\limits_{\Delta_U \to 0} \sigma(U)$ 存在等价于成立柯西条件: 对于任何 $\varepsilon > 0$ 都找得到数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于任意的标码分法 U_1 和 U_2, 只要满足条件 $\Delta_{U_1} < \delta, \Delta_{U_2} < \delta$, 就有不等式 $|\sigma(U_1) - \sigma(U_2)| < \varepsilon$ 成立.

用 v 代表函数 $u(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的全变差. 任给 $\varepsilon > 0$. 那么根据函数 $f(x)$ 的连续性, 存在数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于任何 x_1, x_2, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$ 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2v}$. 现在任取两个标码分法 U_1 和 U_2, 使其直径 Δ_{U_1} 和 Δ_{U_2} 皆小于 δ. 令 $T_1 = T(U_1), T_2 = T(U_2)$ 是对应于它们的闭区间 $[a,b]$ 的非标码分法. 分法 $T_3 = T_1 \bigcup T_2$ 是分法 T_1 和 T_2 的加细.

设 U_3 是任意的满足条件 $T_3 = T(U_3)$ 的标码分法. 那么

$$
\begin{aligned}
|\sigma(U_1) - \sigma(U_3)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i u - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} f(x_{i,j})\Delta_{i,j}u\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}(f(x_i) - f(x_{i,j}))\Delta_{i,j}u\right| < \varepsilon_1 v.
\end{aligned}
$$

类似地有 $|\sigma(U_2) - \sigma(U_3)| < \varepsilon_1 v$. 因此

$$|\sigma(U_1) - \sigma(U_2)| < |\sigma(U_1) - \sigma(U_3)| + |\sigma(U_3) - \sigma(U_2)| < 2\varepsilon_1 v = \varepsilon. \quad \blacktriangleleft$$

我们引入斯蒂尔切斯积分的基本性质.

1° 若函数 $u(x)$ 可微, 则成立等式

$$\int_a^b f(x)du(x) = \int_a^b f(x)u'(x)dx,$$

其中后一个积分理解作黎曼积分.

2° 线性性质:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))du(x) = \int_a^b f_1(x)du(x) + \int_a^b f_2(x)du(x), \\
&\int_a^b \alpha f(x)du(x) = \alpha \int_a^b f(x)du(x) \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

3° 可加性: 对于 $a < c < b$ 有

$$\int_a^b f(x)du(x) = \int_a^c f(x)du(x) + \int_c^b f(x)du(x).$$

4° 分部积分法: 若 $f'(x)$ 和 $u(x)$ 皆黎曼可积, 则

$$\int_a^b f(x)du(x) = f(x)u(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)u(x)dx,$$

其中后一个积分理解作黎曼积分.

5° 若 $u(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调增, 且在此区间上 $f(x) > g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)du(x) \geqslant \int_a^b g(x)du(x).$$

我们来看计算斯蒂尔切斯积分的例子.

例 1. 设 $\{x\}$ 是数 x 的分数部分, 即 $\{x\} = x - [x]$, 其中 $[x] = m \in \mathbb{Z}$ 是数 x 的整部, $m \leqslant x < m+1$. 求积分 $\int_0^3 xd\{x\}$ 的值.

我们有

$$\int_0^3 xd\{x\} = \int_0^3 xdx + 1\cdot(-1) + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-1) = -1.5.$$

2. 设

$$u(x) = \begin{cases} \sin x, \text{若 } 0 \leqslant x < \pi, \\ \cos x, \text{若 } \pi \leqslant x < 2\pi, \\ 0, \quad \text{若 } x = 2\pi. \text{①} \end{cases}$$

计算积分 $I = \int_0^{2\pi} xdu(x)$.

我们有

$$I = \int_0^{\pi} xd\sin x + \int_{\pi}^{2\pi} xd\cos x + (-1)2\pi = -2 - \pi.$$

最后, 我们引入一个关于空间 $C[a,b]$ 上的线性泛函的一般形式的定理.

定理 6 1) 设函数 $u(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界变差. 那么斯蒂尔切斯积分

$$I(f) = \int_a^b f(x)du(x)$$

是空间 $C[a,b]$ 上的线性泛函.

2) 设 $I(f)$ 是空间 $C[a,b]$ 上的任意的一个线性泛函. 那么存在一个在闭区间 $[a,b]$ 上有界变差的函数 $u(x)$, 使得 $I(f)$ 表示成如下形式:

$$I(f) = \int_a^b f(x)du(x).$$

► 我们仅进行到给出此定理的证明的基本点为止.

1) $I(f)$ 的加性和齐性从对应于闭区间 $[a,b]$ 的标码分法 U 的斯蒂尔切斯积分和 $\sigma(U)$ 的线性性质推出. 对于这个和及 $T = T(U)$ 成立不等式

$$|\sigma(U)| \leqslant \|f\| V(u;T) \leqslant \|f\| V_a^b(u).$$

在此不等式中过渡到极限 $\Delta_U \to 0$ 就得

$$\left|\int_a^b f(x)du(x)\right| \leqslant \|f\| V_a^b(u).$$

这就证明了 $I(f)$ 的有界性.

①原文中没有定义 $u(2\pi)$, 且结果是 $I = -2$ —— 译者注.

2) 设 $I(f)$ 是空间 $C[a,b]$ 上的线性泛函. 此泛函可以延拓到阶梯函数空间上. 设闭区间 $[a,\beta]$ 包含在闭区间 $[a,b]$ 之中. 那么令

$$\chi_\beta(x)=\begin{cases}0, 若\ x=a, \beta<x\leqslant b.\\ 1, 若\ a<x\leqslant\beta.\end{cases}$$

接着定义函数 $I(\chi_\beta)=u(\beta)$. 此函数在闭区间 $[a,b]$ 上有界变差.

给定任意的 $\varepsilon>0$. 那么根据函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的一致连续性, 存在数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对于一切 x_1,x_2 只要 $|x_1-x_2|<\delta$ 就有不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 成立. 现取标码分法 $U:\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b;\xi_1,\cdots,\xi_n\}$, 使直径 Δ_U 小于 δ.

考察函数

$$\varphi(x)=f(\xi_1)\chi_{x_1}(x)+\sum_{k=2}^{n}f(\xi_k)\left(\chi_{x_k}(x)-\chi_{x_{k-1}}(x)\right).$$

那么

$$I(\varphi)=f(\xi_1)u(x_1)+\sum_{k=2}^{n}f(\xi_k)(u(x_k)-u(x_{k-1})).$$

而且, 根据函数 $\varphi(x)$ 的定义, 我们得到, 对于任意的 $x\in[a,b]$, 成立不等式 $|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$. 结果

$$|I(f)-I(\varphi)|=|I(f-\varphi)|\leqslant\varepsilon\|I\|.$$

这表明, 当 $\Delta_U\to 0$ 时, 量 $I(f)$ 是量 $I(\varphi)$ 的极限. 然而 $I(\varphi)$ 的极限恰是斯蒂尔切斯积分

$$\int_a^b f(x)du(x).\quad ◀$$

第十三章　一般拓扑学的某些概念. 度量空间

第十八讲

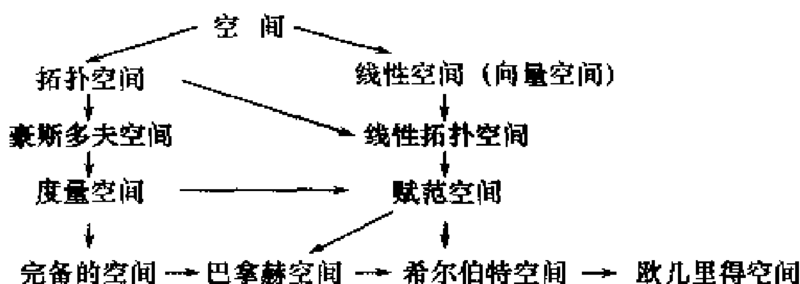
§1. 空间的定义及基本性质

在第十二章中曾谈到, 借助于斯蒂尔切斯积分, 可以表示定义在连续函数空间 $C[a,b]$ 上的线性泛函. 以空间 $C[a,b]$ 为例, 我们已知道了函数空间. 可能会问: 为什么在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数的集合叫作空间? 答案很简单. 其实, "空间" 一语, 本质上与术语 "集合" 是等价的. 不同之处在于, 空间这一术语极少以 "单独的形式" 使用, 而是较常与其他术语组合起来, 例如: 拓扑空间, 度量空间, 线性空间, 赋范空间等等. 全部这些概念在整个数学中都起着重要作用, 特别地在数学分析中也是如此. 我们来了解其中的某些概念.

下图中标出了数学中所研究的某些空间, 其定义将在下面给出. 图中的箭头的含义如下: 箭头指向的空间是它 "出发" 的空间的特殊情形①.

---

①所涉及人名的原文分别是: 豪斯多夫 — Hausdorff, 巴拿赫 — Banach, 希尔伯特 — Hilbert, 欧几里得 — Euclid —— 译者注.



我们来定义图中所示的空间.

设 X 是某个集合, $\Sigma = \Sigma_X$ 是由集合 X 的某些子集组成的集合, 即 $\Sigma \subset \Omega(X)$, 其中 $\Omega(X)$ 是 X 的全体子集所成的集合. 设 Σ 具有下述性质:

1° $X \in \Sigma, \varnothing \in \Sigma$.

2° a) 若 $A \in \Sigma, B \in \Sigma$, 则 $A \bigcap B \in \Sigma$.

b) Σ 中任意多个元素的并集属于 Σ.

为了指明 Σ 的元素是集合 X 的某些子集, 说 Σ 是某个**子集族**.

定义 1 每个满足条件 1° 和 2° 的子集族都叫作集合 X 上的拓扑

定义 2 集合对 (X, Σ) 叫作拓扑空间.

常常简单地说 X 是拓扑空间, 如果在 X 上给定了拓扑 Σ. 每个元素 $\sigma \in \Sigma$, 即每个属于族 Σ 的子集 $\sigma \subset X$, 叫作**开集** (依拓扑 Σ).

任何子集 $A \subset X$ 使 $X \setminus A \in \Sigma$ 者, 叫作**闭集** (依拓扑 Σ).

设 x 是属于 X 的某点. 若 $\sigma \in \Sigma$ 且 $x \in \sigma$, 则称 σ 为点 **x的邻域**, 即任何含有点 x 的开集都叫作点 x 的邻域点 x 的确定的**邻域**常用符号 σ_x 表示.

定义 3 拓扑空间 $T = (X, \Sigma)$ 叫作是豪斯多夫空间, 如果此空间的任何两个不同的点 x 和 y 总有不相交的邻域 σ_x 和 $\sigma_y \in \Sigma, \sigma_x \bigcap \sigma_y = \varnothing$.

例 我们来考察豪斯多夫空间 $(\mathbb{R}, \Sigma)$ 的例子, 设集合 Σ 是实数轴 $\mathbb{R}$ 上的一切结构如下的子集所成的集合: 这些子集由有限个或可数个两两互不相交的开区间组成. 那么空间 $(\mathbb{R}, \Sigma)$ 是豪斯多夫空间 ①, 因为任意两个不同的点 x 和 y 都可被不相交的开 δ 邻域所包含.

研究各种各样的拓扑空间是点集拓扑学的课题.

定义 4 设给定了某集合 X 的笛卡儿乘积 $X^2 = X \times X$, 并设在集合 X^2 上定义了具有下述性质的函数 $\rho(x_1, x_2)$:

1) 对于任意的 $(x_1, x_2) \in X^2$ 有 $\rho(x_1, x_2) \geqslant 0$, 且当 $x_1 = x_2$ 时 $\rho(x_1, x_2) = 0$, 而当 $x_1 \neq x_2$ 时 $\rho(x_1, x_2) > 0$(非负性);

①这里应约定, 空集也被看作是开区间 —— 译者注.

2) 对于任意的 $(x,y)\in X^2$ 有 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$(对称性);

3) 对于任意的 $x,y,z\in X$ 皆成立不等式 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$(三角形不等式).①

那么有序对 (X,ρ) 或集合 X 本身叫作度量空间, 而函数 ρ 叫作此空间的度量,$\rho(x,y)$ 叫作从点 x 到点 y 的距离, ρ 叫作距离函数.

例　1. 设 X 是任意的不空的集合且

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, 若\ x=y,\\1, 若\ x\neq y.\end{cases}$$

那么 (X,ρ) 是距离空间.

2. 设在实数集 $\mathbb{R}$ 上按公式 $\rho(x,y)=|x-y|$ 给定距离, 那么 $(\mathbb{R},\rho)$ 是距离空间.

在同一个集合上可以按不同的方式给定距离. 从而得到不同的距离空间. 例如, 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上可以按下面的公式规定点 $\bar{x}=(x_1,x_2)$ 和 $\bar{y}=(y_1,y_2)$ 间的距离:

$$\rho_0(\bar{x},\bar{y})=\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|),$$

也可以按公式

$$\rho(\bar{x},\bar{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

来规定点 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 之间的距离.

在度量空间 (X,ρ) 中, 对于任意的数 $\varepsilon>0$, 定义点 $x\in X$ 的开的 ε 邻域为含在 X 中的由全体满足条件 $\rho(x,y)<\varepsilon$ 的点 y 组成的集合 (记之为 $\sigma_x(\varepsilon)$). 一个集合 σ, 如果它的每点都联同一个 ε 邻域 (不同的点可有不同的 ε 值) 全含在 σ 之中, 则叫作是**开集**. 空集也叫作开集. 那么, 全体开集所成的族 Σ 给出了集合 X 上的**拓扑**, 且使之成为豪斯多夫拓扑空间. 所给的拓扑叫作是**由度量 ρ 生成的拓扑**.

定义 5　度量空间 (X,ρ) 中的点列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 叫作是柯西列, 或基本列, 如果它满足柯西条件: 对于任何数 $\varepsilon>0$, 都找得到号码 $n_0=n_0(\varepsilon)$, 使得对于一切号码 $n_1>n_0$ 和 $n_2>n_0$, 有 $\rho(x_{n_1},x_{n_2})<\varepsilon$.

定义 6　点列 $\{x_n\in X\}$ 叫作是收敛到点 $a\in X$ 的, 如果数值序列 $\rho_n=\rho(x_n,a)$ 随着 n 趋于无穷而收敛到零.

此事记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.
从三角形不等式可容易地证明, 这样的点 $a\in X$ 是唯一的.

定义 7　度量空间 (X,ρ) 叫作是完备的, 如果任何柯西列都收敛到空间的某点.

现转向在高等代数课程中讨论的线性空间.

①“三角形不等式”一语为译者所加 —— 译者注.

定义 8 集合 X 叫作是线性空间, 如果下述条件成立:

1) 对于任意两个元 $x \in X, y \in X$, 单值地确定一个元 $z \in X$, 叫作是 x 与 y 的和, 记作 $z = x + y$, 满足:

a) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

b) $x + y = y + x$;

c) 存在一个元叫作零元, 记为 $\theta \in X$, 满足: 对于任意的 $x \in X, x + \theta = x$;

d) 对于任何 $x \in X$, 都存在一个元叫作 x 的逆元, 记作 $-x$, 使 $x + (-x) = \theta$;

2) 对于任何实数 α 和任何 $x \in X$, 单值地确定一个元, 叫作元素 $x \in X$ 与实数 α 的乘积, 记作 αx, 满足:

a) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

b) $1x = x$;

3) 加法运算与数乘运算满足如下结合律:

a) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

b) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

n 维向量空间 , 连续函数空间 $C[a, b]$ 都是线性空间的例子.

线性空间的元素叫作向量.

定义 9 线性空间 X 叫作是赋范的, 如果对于每个向量都确定有一个实数, 叫作 x 的范数, 记作 $\|x\|$, 满足:

1) $\|\theta\| = 0$;

2) 对于任何 $x \neq \theta$, 皆有 $\|x\| > 0$;

3) 对于任何实数 α 都有 $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

4) 对于任何元素 $x, y \in X$, 成立不等式 $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

我们见到, 在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数的空间 $C[a, b]$ 是赋范空间, 具有范数 $\|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

命题 1 设 X 是赋范空间. 定义在笛卡儿乘积 X^2 上的函数 $\rho(x, y) = \|x - y\|$ 是空间 X 上的度量.

► 我们来证函数 ρ 是一个度量. 为此必须验证函数 ρ

1) 是非负的; 2) 是对称的; 3) 满足三角形不等式.

实际上我们有

1) $\rho(x, y) = \|x - y\| \geqslant 0$ 且 $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0$ 当且仅当 $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = \rho(x, y)$;

3) $a = x - z, b = z - y$, 则 $\rho(x, y) = \|a + b\| \leqslant \|a\| + \|b\| = \|x - z\| + \|z - x\| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$. ◄

定义 10 完备的赋范空间叫作巴拿赫空间.

我们转向希尔伯特空间的定义. 为此需要定义数量积. 设在集合 X 上给定了线性空间结构. 在笛卡儿乘积 X^2 上定义函数 f, 即在元素对 $(a,b), a \in X, b \in X$ 的集合上定义函数 f. 并设函数 f 具有下述性质.

1° **正性**: 对于任何元素 $a \in X, f(a,a) > 0$ 只要 $a \neq \theta$.

2° **对称性**: 对于任何元素 $a, b \in X, f(a,b) = f(b,a)$.

3° **加性**: 对于任何元素 $a, b, c \in X, f(a, b+c) = f(a,b) + f(a,c)$.

4° **齐性**: 对于任何元素 $a, b \in X$ 和任何实数 λ 皆成立等式 $f(\lambda a, b) = f(a, \lambda b) = \lambda f(a,b)$.

具有性质 1° — 4° 的函数 f 叫作**标量积** (或内积—— 译者注). 把 $f(a,b)$ 记作 (a,b).

事情是这样的, 函数 $\sqrt{(a,a)} = \|a\|$ 是范数, 具有此范数的空间 X 本身则是赋范空间. 的确, 函数 $\sqrt{(a,a)}$ 的非负性和齐性是显然的. 剩下只需验证三角形不等式.

我们先证明柯西不等式.

柯西不等式:

$$(x,y)^2 \leqslant (x,x)(y,y).$$

► 置 $x_1 = \dfrac{x}{\|x\|}, y_1 = \dfrac{y}{\|y\|}$. 那么上面的不等式从 $|(x_1,y_1)| \leqslant 1$ 推出, 实际上, 不伤一般性, 可以认为 $(x_1,y_1) \geqslant 0$. 那么

$$0 \leqslant (x_1 - y_1, x_1 - y_1) = (x_1,x_1) + (y_1,y_1) - 2(x_1,y_1) = 2 - 2(x_1,y_1),$$

由此得到: $(x_1,y_1) \leqslant 1$, 即所欲证者. ◄

三角形不等式:

$$\sqrt{(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}.$$

► 使用柯西不等式, 有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y,x+y) = (x,x) + (y,y) + 2(x,y) \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad ◄\end{aligned}$$

具有范数 $\rho(x,y) = \|x-y\|$ 的完备的度量空间 X 叫作**希尔伯特空间**. 因此, 希尔伯特空间是具有范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 的巴拿赫空间的特殊情形. 有限维希尔伯特空间叫作欧几里得空间. 我们仅限于考察这样的空间, 而且后面将更详细地研究度量空间.

第十九讲

§2. 度量空间在自然拓扑之下的豪斯多夫性质

首先引入度量空间中的开集的概念

定义 11 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 把度量空间 (X, ρ) 中, 由全体满足条件 $\rho(a, x) < \varepsilon$ 的点 $x \in X$ 组成的集合叫作以点 a 为中心, 半径为 ε 的开球, 记作 $O(a, \varepsilon)$.

定义 12 球 $O(a, \varepsilon)$ 也叫作点 a 的 ε 邻域.

定义 13 以条件 $\rho(a, x) \leqslant \varepsilon$ 确定的点集 $K(a, \varepsilon)$ 叫作以 a 为中心, 半径为 ε 的闭球.

我们看到, 对于 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ 有

$$O(a, \varepsilon_1) \subset O(a, \varepsilon_2), \quad K(a, \varepsilon_1) \subset K(a, \varepsilon_2).$$

定义 14 点 $a \in M \subset X$ 叫作集合 M 的内点, 如果它有一个 ε 邻域整个由集合 M 的点组成.

定义 15 集合 M 叫作开集, 如果它的每点都是内点.

例 对于任意的点 $a \in X$, 它的任何 ε 邻域都是开集.

实际上, 如果点 $y \in O(a, \varepsilon)$, 那么 $\rho_0 = \rho(a, y) < \varepsilon$. 取 $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2}(\varepsilon - \rho_0)$, 那么点 y 的 ε_1 邻域整个包含在 $O(a, \varepsilon)$ 中. 这是因为, 对于任何点 $z \in O(y, \varepsilon_1)$, 从三角形不等式推出 $\rho(a, z) \leqslant \rho(a, y) + \rho(y, z) < \rho_0 + \dfrac{1}{2}(\varepsilon - \rho_0) = \dfrac{1}{2}\varepsilon + \dfrac{1}{2}\rho_0 < \varepsilon$. 所以 $\rho(a, z) < \varepsilon, z \in O(a, \varepsilon)$. 这就是所要证的.

我们来证明开集和闭集的某些性质.

命题 2 X 中两开集 M_1 和 M_2 的交仍是开集.

► 设 $x \in M_1 \bigcap M_2$, 那么 $x \in M_1, x \in M_2$. 由于 M_1 和 M_2 都是开集, 存在点 x 的 ε_1 邻域包含在 M_1 中, 也存在点 x 的 ε_2 邻域包含在 M_2 中. 取 $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. 则点 x 的 ε 邻域同时包含在 M_1 中和 M_2 中, 从而包含在 $M_1 \bigcap M_2$ 中. ◄

命题 3 任意多个开集的并集 V 是开集.

► 任取点 $x \in V$. 则存在开集 $M \subset V$ 使得 $x \in M$. 从而点 x 是集合 M 的内点. 结果, 存在点 x 的 ε 邻域整个包含在 M 中, 当然也整个包含在 V 中. ◄

于是, 所引入的开集构成了拓扑, 称之为度量空间的**自然拓扑**. 这个空间是豪斯多夫空间. 实际上, 设 x,y 是度量空间 V 的任意两点且 $x \neq y, \rho(x,y)=\rho_0>0$. 那么这两个点的邻域 $O(x,\rho_0/3)$ 和 $O(y,\rho_0/3)$, 根据三角形不等式, 是不相交的. 如果存在元素 $z \in O(x,\rho_0/3)\bigcap O(y,\rho_0/3)$ 的话, 那么 $\rho_0=\rho(x,y)\leqslant \rho(x,z)+\rho(y,z)<\rho_0/3+\rho_0/3=2\rho_0/3$, 而这是不可能的.

§3. 度量空间中集合的内点、外点和边界点

定义 16 含有点 x 的任何开集都叫作点 x 的邻域.

定义 17 设 æ 是度量空间 X 的子集. 若 $\sigma = X\setminus \text{æ}$ 是开集, 则 æ 叫作闭集.

定义 18 集 A 的余集的内点叫作是 A 的外点.

定义 19 点 z 叫作是集 A 的边界点, 如果它既不是此集的内点也不是此集的外点.

集 A 的一切边界点所成的集合叫作 A 的**边界**, 记作 ∂A.

命题 4 设 $B=X\setminus A$. 那么 $\partial A=\partial B$, 也就是说集 A 与集 B 有公共的边界. 此外 $\partial(\partial A)\subset\partial A$.

实际上, 若 z 是集 A 的边界点, 则它的任何邻域内都既含 A 的点亦含 B 的点. 于是 z 也是 B 的边界点. 反过来, 若 $z\in\partial B$, 则 $z\in\partial A$. 因此, 集 A 和集 B 的边界重合, 即 $\partial A=\partial B$. 至于关系式 $\partial(\partial A)\subset\partial A$, 则从下述事实推出: 若 $x\in\partial(\partial A)$ 则点 x 的任何邻域中都含有 ∂A 的一个点 y 以及 y 的某个邻域. 于是在此邻域中既含 A 的点亦含 B 的点, 从而 $x\in\partial A$. 那么 $\partial(\partial A)\subset\partial A$.

命题 5 若集 A 是闭的, 则 $\partial A\subset A$. 而若 $\partial A\subset A$ 则集 A 是闭的.

► 实际上, 在第一种情形, 由于集 $B=X\setminus A$ 是开的, 所以 $\partial B\bigcap B=\varnothing$, 即 $\partial B\subset A$. 然而 $\partial A=\partial B$, 所以 $\partial A\subset A$. 另一方面, 如果 $\partial A=\partial B\subset A$, 那么 $\partial B\bigcap B=\varnothing$. 因此集 B 是开集, 从而集 $A=X\setminus B$ 是闭集. ◄

定义 20 a) 点 a 叫作是集合 A 的极限点, 如果在点 a 的任何邻域中都有至少一点 $x\in A$ 使 $x\neq a$;

b) 点 a 叫作是集合 A 的极限点, 如果在点 a 的任何邻域中都含有无穷多个点 $x\in A$;

c) 点 a 叫作是集合 A 的极限点, 如果存在一个序列 $\{x_n\}\subset A, x_n\neq a, n=1,2,\cdots$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

命题 6 定义 a), b), c) 两两等价.

► 显然, 从 b) 推出 a). 我们来证明从 a) 推出 c). 为此应该构作一个收敛到 a 的序列 $\{x_n\}$, 使 $x_n \neq a$. 我们以下述方式来构作这个序列. 在点 a 的 1–邻域中任取 $x_1 \neq a$, 在点 a 的 $\frac{1}{2}$ 邻域中取点 $x_2 \neq a$, 依此类推. 那么, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 在点 a 的 ε 邻域之外含有序列 $\{x_n\}$ 的不多于 $n_0 = n_0(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$ 个点. 所以点 a 是序列 $\{x_n\}$ 的极限点.

现证明从 c) 推出 b). 由于序列 $\{x_n\}$ 是无穷序列, 且在点 a 的任何邻域之外仅含此序列的有限个点, 所以在此邻域内必含有序列的无穷多点. ◄

定义 21 *若点 $x \in A$, 但 x 不是 A 的极限点, 则此点 x 叫作是集合 A 的孤立点.*

现在我们发现, 在序列 $\{x_n\}$ 收敛到点 a 的定义中, 不必要求 $\{x_n\}$ 是基本列, 因为这是收敛的必然结果.

我们再证明一个简单的命题.

命题 7 *若序列 $\{x_n\}$ 有极限 a, 则 a 是它的唯一的极限.*

► 实际上, 设 b 是它的另一个极限. 那么 $\rho(a,b) = \rho_0 > 0$. 取点 a 的 $\rho_0/2$ 邻域. 在此邻域之外, 仅含序列 $\{x_n\}$ 的有限多项. 那么在点 b 的 $\rho_0/2$ 邻域中仅含此序列的有限多项, 甚或一项都没有. 这就产生了矛盾. 因此, 有极限的序列, 有唯一的极限. ◄

现在来证明集合的闭性准则.

定理 1 *a) 集合是闭的, 当且仅当它含有自己的全部极限点.*

b) 集 A 是闭的当且仅当它的边界 ∂A 含在 A 中, 即 $\partial A \subset A$.

► 我们来证明命题 a).

必要性 设 $x_n \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 应该证明 $a \in A$. 点 a 不可能是集 A 的外点, 因为在它的任何邻域中都含集合 A 的点. 这表明, 点 a 或为内点, 或为边界点. 因此, 或有 $a \in A$, 或有 $a \in \partial A \subset A$. 于是在两种情形下皆有 $a \in A$. 必要性获证.

充分性 设集合 A 含有自己的全部极限点. 要证的是 A 的余集 $B = X \setminus A$ 是开集, 即任何点 $x \in B$ 都是 B 的内点. 若 $x \in B$, 则点 x 或为集 B 的内点, 或为集 B 的边界点. 在第一种情形, 已没得说的. 考虑第二种情形, $x \in B$ 且 $x \in \partial B$ 即 x 是 B 的边界点. 然而, 一方面, 这个点 x 不属于 A 因为它属于 B, 另一方面点 $x \in \partial B = \partial A$, 即在点 x 的任何邻域中都存在集 A 的点, 因此根据定理的条件应有 $x \in A$. 而这是不可能的, 因为 $x \in B$. 根据所作的假定, 有 $A \bigcap B = \varnothing$. 因此点 $x \notin \partial B$. 也就是说第二种情形不存在. 所以只有一种情形: x 是集合 B 的内点. 而这就是所要证的.

定理的 b) 款已在命题 5 中证实. ◄

§4. 关于收缩球序列的引理. 压缩映射原理

我们来考察完备度量空间的两个性质. 第一个是关于收缩球序列的引理.

引理 1 *设 X 是完备的度量空间. $K(x_1,r_1)\supset K(x_2,r_2)\supset\cdots$ 是 X 中的一个嵌套闭球序列满足 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=0$. 那么存在唯一的点 x_0 属于所有这些球.*

► 首先我们看到, 球的中心的序列 $\{x_n\}$ 是基本的. 实际上, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0=n_0(\varepsilon)$ 使得对于任何 $n>n_0$ 皆有 $r_n<\varepsilon$. 因此对于任意的 $n_2>n_1>n_0$, 根据包含关系 $K(x_{n_1},r_{n_1})\supset K(x_{n_2},r_{n_2})$ 有 $\rho(x_{n_1},x_{n_2})<r_{n_1}<\varepsilon$. 所以序列 $\{x_n\}$ 满足基本列的定义.

由于 $\{x_n\}$ 是基本的, 所以根据空间 X 的完备性, 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0\in X$. 对于每个球来说,$x_0$ 都是极限点, 而由于这些球都是闭的, 所以对于任何自然数 n 都有 $x_0\in K(x_n,r_n)$.

我们来证明, x_0 是唯一的同时属于一切球的点. 假设并非如此, 即存在点 $y_0\in K(x_n,r_n)$, $\rho(x_0,y_0)=\rho>0$. 显然, 存在 n 使 $r_n<\rho/2$. 从三角形不等式得

$$\rho=\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(x_n,y_0)<\rho/2+\rho/2=\rho.$$

发生矛盾. 因此, x_0 是所有的球的唯一的公共点. ◄

定义 22 *设 X 是完备的度量空间. 设 $f:X\to X$ 是此空间到自身的映射, 并且存在实数 α 满足 $0<\alpha<1$, 使得对于任意的 $a,b\in X$ 皆有*

$$\rho(f(a),f(b))\leqslant\alpha\rho(a,b).$$

那么, 映射 f 叫作是压缩的.

现证明压缩映射原理.

定理 2 *若 $f:X\to X$ 是压缩映射, 则存在唯一的点 $x_0\in X$ 使得 $f(x_0)=x_0$. 点 x_0 叫作压缩映射 f 的***不动点***.*

► 设 x_1 是 X 的任意一点, $x_2=f(x_1),\cdots,x_{n+1}=f(x_n)$. 我们来证明序列 $\{x_n\}$ 是基本的, 实际上, 设 $\rho_n=\rho(x_n,x_{n+1})$. 那么

$$\rho_n=\rho(x_n,x_{n+1})=\rho(f(x_{n-1}),f(x_n))\leqslant\alpha\rho(x_{n-1},x_n)=\alpha\rho_{n-1}.$$

因此, $\rho_n\leqslant\alpha^{n-1}\rho_1$. 由此, 使用三角形不等式, 得

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_{n+m})&\leqslant\rho_n+\rho_{n+1}+\cdots+\rho_{n+m-1}\\&\leqslant(\alpha^{n-1}+\alpha^n+\cdots+\alpha^{n+m-2})\rho_1<\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\rho_1.\end{aligned}$$

由于 $0 < \alpha < 1$, 当 $n \to \infty$ 时有 $\alpha^{n-1} \to 0$. 因此, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 找得到 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ 使得对于任意的 $n > n_0$ 和任意的 $m \geqslant 1$, 成立不等式 $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$, 这就表明序列 $\{x_n\}$ 是基本的. 由于 X 是完备的度量空间, 所以存在点 x_0 使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

现证 $f(x_0) = x_0$. 用反证法. 设 $f(x_0) = y_0 \neq x_0$ 且 $\rho(x_0, y_0) = h > 0$. 取数 $n_0 = n_0(h/2)$ 使得对于任意的 $n > n_0$ 都有 $\rho(x_n, x_0) < h/2$. 那么

$$\rho(x_{n+1}, y_0) = \rho(f(x_n), f(x_0)) \leqslant \rho(x_n, x_0) < \frac{h}{2}.$$

因此,

$$h = \rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, y_0) < h/2 + h/2 = h = \rho(x_0, y_0),$$

此式是不可能的. 于是 x_0 是映射 f 的不动点. 它是唯一的不动点, 因为如果 a 和 b 都是不动点, 即 $f(a) = a, f(b) = b$, 那么 $\rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \leqslant \alpha\rho(a, b)$, 此式蕴含 $a = b$. ◀

第二十讲

§5. 度量空间的连续映射

定义 23 设给定两个度量空间 (X, ρ_X) 和 (Y, ρ_Y), 并假设定义了映射 $F: X \to Y$. 映射 F 叫作是在点 $x_0 \in X$ 处连续的, 如果对于任何 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得只要 $\rho_X(x, x_0) < \delta$ 就有 $\rho_Y(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$, 也就是说在空间 Y 中, 点 $F(x_0) \in Y$ 的 ε 邻域 $O_Y(F(x_0), \varepsilon)$ 整个地含有点 x_0 的某 δ 邻域在映射 F 之下的像, 即 $F(O_X(x_0, \delta)) \subset O_Y(F(x_0), \varepsilon)$.

定义 24 度量空间 X 到 Y 的映射 F 叫作是连续的, 如果它在 X 的每点 x 处都连续.

例 压缩映射 $F: X \to X$ 是连续的. 在这种情况下, 只需取 $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ 即可.

对于度量空间的点, 我们定义 $x \to x_0$ 的集合基为点 x_0 的全部开 δ 邻域的集合. 那么连续的定义表述如下:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0), \quad \text{其中 } x \in X, x_0 \in X, F(x) \in Y, F(x_0) \in Y.$$

我们还发现, 度量空间 X 到度量空间 Y 的映射 $F: X \to Y$ 沿着集合基 B 的极限的定义有如下形式: 点 $y_0 \in Y$ 叫作映射 $F: X \to Y$ 沿着基 B 的极限, 如果对于

任何 $\varepsilon > 0$ 都存在终端 $b = b(\varepsilon) \in B$, 使得对于任何点 $x \in b$ 都有 $\rho_Y(F(x), y_0) < \varepsilon$. 对于数值函数, 先前已定义过的函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 沿着基 B 的极限连同先前全部已证过的极限的性质仍保持有效.

定理 3 和定理 4 是先前已建立的函数沿集合基的依柯西意义和海涅意义的极限的一般性质的推论. 不过我们还是宁愿引入它们的直接的证明.

定理 3 设映射 $F: X \to Y$ 和 $G: Y \to Z$ 有如下性质: 映射 F 在点 $x_0 \in X$ 处连续, 而映射 G 在点 $y_0 = F(x_0)$ 处连续, 那么 F 与 G 的复合映射 $H: X \to Z$, 其中 $H(x) = G(F(x))$, 在点 x_0 处连续.

► 置 $z_0 = G(y_0)$. 那么成立等式 $H(x_0) = G(F(x_0)) = G(y_0) = z_0$. 由于映射 G 在点 y_0 处连续, 所以对于任意的数 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于任意的 $y \in O_Y(y_0, \delta)$ 都有 $G(y) \in O_Z(z_0, \varepsilon)$.

接着, 根据映射 F 在点 x_0 处的连续性, 存在 $\delta_1 = \delta_1(\delta(\varepsilon)) > 0$, 使得对于任何 $x \in O_X(x_0, \delta_1)$ 皆有 $F(x) \in O_Y(y_0, \delta) = O_Y(y_0, \delta(\varepsilon))$. 由此推出, 对于任何 $\varepsilon > 0$, 找到了 $\delta_1 = \delta_1(\delta(\varepsilon)) > 0$, 使得对于任意的 $x \in O_X(x_0, \delta_1)$ 有 $H(x) = G(F(x)) \in O_Z(z_0, \varepsilon)$. 于是映射 H 在点 x_0 处连续. ◄

定理 4 设在度量空间 X 中序列 $\{x_n\}$ 收敛到点 x_0, 而映射 $F: X \to Y$ 在点 x_0 处连续. 那么

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0), \text{ 即 } \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

► 根据映射 F 的连续性, 对于任何 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得对于任意的 $x \in O_X$ 有 $F(x) \in O_Y(F(x_0), \varepsilon)$.

接着, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, 那么可以指出 $n_0 = n_0(\delta) = n_0(\delta(\varepsilon))$, 使得对于任意的 $n > n_0$ 有 $x_n \in O_X(x_0, \delta)$. 由此推出定理的结论. ◄

我们指出, 度量空间的映射连续的概念的定义 24 等价于说, Y 中的任何开集的逆像在 X 中是开集. 通常以这样的方式来引入对于豪斯多夫空间的映射的连续的概念.

§6. 紧集的概念. $\mathbb{R}^n$ 中的紧集及空间 $\mathbb{R}^n$ 的完备性. 紧集上的连续函数的性质

定义 25 度量空间 X 中的集合 K 叫作紧集,如果从 K 的任何开覆盖中皆可抽取出有限的子覆盖.

定义 26 度量空间中的集合 B 叫作是有界的, 如果它包含在某个以点 x_0 为中心以 r 为半径的球 $O(x_0, r)$ 之中.

引理 2 紧集是有界集.

► 设 K 是紧集. 任取点 $x_0 \in K$. 那么球 $O_n = O(x_0, n)$ 的全体覆盖整个空间 X, 从而亦覆盖 K. 根据 K 的紧性, 从这些球中可抽取出有限的子覆盖 $\{O_{t_1} \subset O_{t_2} \subset \cdots \subset O_{t_s}, t_1 < t_2 < \cdots < t_s\}, K \subset O_{t_s}$. 这表明 K 是有界集. ◄

引理 3 设 K 是紧集. 那么任何无穷序列 $\{x_n\} \subset K$ 都至少有一个极限点属于 K.

► 我们从反面来论证. 设序列 $\{x_n\}$ 没有属于 K 的极限点. 那么, K 的每点 x 都可被某 ε 邻域 $O(x, \varepsilon)$ 包住而使 $O(x, \varepsilon)$ 中不含 $\{x_n\}$ 的与 x 不同的点. 于是得到一个 K 的开覆盖. 从此覆盖中取一个有限子覆盖. 只有这有限个球的中心可能是 $\{x_n\}$ 中的点, 面它们总共只有有限个. 结果, 序列 $\{x_n\}$ 的点的全体只有有限多个. 这与 $\{x_n\}$ 是无穷序列的假定相矛盾. ◄

引理 4 紧集 K 是闭集.

► 只需证明, 紧集 K 含有全部极限点. 实际上, 设 x_0 是 K 的任意一个极限点, 那么可以找出序列 $\{x_n\} \subset K$, 使当 $n \neq m$ 时有 $x_n \neq x_m$, 且当 $n \to \infty$ 时 $x_n \to x_0$. 由此, 根据引理 3 推出 $x_0 \in K$. ◄

引理 5 紧集的任何闭子集 M 本身是紧集.

► 集 $B = X \setminus M$ 是开集. 若对集 M 的任何一个开覆盖添加上开集 B, 则构成 K 的开覆盖, 从这个覆盖中可取出 K 的有限子覆盖. 抛掉集 B, 就得到 M 的有限覆盖. ◄

我们现在来描述 n 维空间的紧集并证明空间 $\mathbb{R}^n$ 的完备性.

定理 5 欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的任何闭方体, 即满足条件 $a_s \leqslant x_s \leqslant a_s + l, s = 1, \cdots, n$ 的点 $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 的集合, 是紧集.

► 只考虑 $\mathbb{R}^2$ 的情形, 因为 $\mathbb{R}^n$ 的一般情形并无原则上的不同. 那么, 设 h 是闭的正方形, 被开集的无穷的族 $\{U\}$ 所覆盖. 要证的是可从此覆盖中抽取出有限子覆盖. 我们从反面来证明这个结论. 把 h 用通过它的边的中点与坐标轴平行的直线划分成四个相等的闭正方形. 由于 h 不被 $\{U\}$ 中的有限个集所覆盖, 所以这四个新的闭正方形中, 至少有一个不被 $\{U\}$ 中的有限个集所覆盖. 再把这个闭正方形四等分, 并依此类推.

我们得到一个嵌套闭正方形序列. 这列正方形在两坐标轴上的投影分别构成嵌套闭区间序列. 它们分别在两坐标轴上有唯一的公共点 x_0 和 y_0. 那么点 $A = (x_0, y_0)$ 属于所有的正方形. 此外, 它被 $\{U\}$ 中的某开集 U_0 所覆盖. 因此存在 ε 邻域 $O(A, \varepsilon) \subset U_0$, 它完全盖住所构作的嵌套正方形序列中的某一个. 特别地, 边长小于 $\varepsilon/\sqrt{2}$ 的正方形 K_0 就被 U_0 这一个开集覆盖. 这就产生了矛盾. ◄

我们记得,$\mathbb{R}^n$ 中的度量 $\rho(a,b)$ 对于任意两点 $a,b\in\mathbb{R}^n$ 是借助于标量积,用等式 $\rho(a,b)=\sqrt{(a-b,a-b)}$ 来确定的.

定理 6 度量空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的.

► 只需证明,任何基本列 $\{x_n\}$ 皆收敛到此空间的元素. 显然,$\{x_n\}$ 是有界的,故可被某闭方体 K 所覆盖. 由于 K 是紧集,故根据引理 3,序列 $\{x_n\}$ 有极限点 $x_0\in K$. 由于基本列不可能有多于一个的极限点,所以 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0. ◄

定理 7 集 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集的必要充分条件是 K 是有界闭集.

► 必要性 若 K 是紧集,则根据引理 2 和引理 4,K 是有界闭集.

充分性 根据有界性,集 K 可被包含在某个闭方体 h 中. 由于 h 是紧的而 $K\subset h$ 是闭的,根据引理 5,集合 K 也是紧的. ◄

我们记得,映射 $F:A\to\mathbb{R}$ 叫作是集合 A 上的数值函数. 以后我们把"函数"一语反理解为数值函数. 我们来证明紧集上的连续函数的一些性质.

定理 8 设函数 f 在紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$ 上连续. 那么

1) f 在 K 上有界;

2) 存在 $x_1\in K,x_2\in K$,使得 $f(x_1)=M=\sup\limits_{x\in K}f(x), f(x_2)=m=\inf\limits_{x\in K}f(x)$.

► 1) 对于每点 $x\in K$,存在邻域 $O(x,\delta(x))$,使函数 f 在此邻域中有界[①]. 这些邻域构成 K 的开覆盖. 从中取出有限子覆盖,就得到,f 在整个紧集 K 上有界.

2) 用反证法来证. 设函数 f 取不到最大值. 那么函数 $g(x)=1/(M-f(x))$ 是紧集 K 上的连续函数. 根据此定理的结论 1),函数 g 在 K 上有界. 由此得

$$0<\frac{1}{M-f(x)}<M_1,\text{或者}f(x)<M-\frac{1}{M_1}.$$

那么,数 $M-\dfrac{1}{M_1}$ 是函数 f 的值的上界,而它比 M 小. 这与数 M 的定义相矛盾. 在函数 f 的值的下界的情形,证明是类似的. ◄

最后我们指出在度量空间中紧集的连续映射的下述重要性质.

1° 紧集的连续像是紧集.

2° 设 X 和 Y 都是度量空间,X 是紧的且 F 是 X 到 Y 的双方单值连续映射. 如果 $B\subset X$ 是任意的开集,则它的像 $F(B)$ 是 Y 中的开集. 同时,边界 ∂B 映成边界,内点映成内点,外点映成外点,而且逆映射是连续的.

► 我们来证明这个命题. 1°. 考察紧集 K 的像 $F(K)$ 的任意的开覆盖. 根据 F 的连续性,此覆盖的每个元素的逆像都是开集. 这些集合的全体构成了紧集 K 的开覆盖. 从这个覆盖中可抽取出 K 的有限子覆盖. 那么该子覆盖的像构成了 $F(K)$ 的有限子覆盖.

---

① 确切地说,是在 $O(x,\delta(x))\cap K$ 中有界 —— 译者注.

2°. 令 $K = B \cup \partial B$. 那么 K 和 ∂B 都是紧集, 因为它们都是闭集而 X 是紧集. K 和 ∂B 的像同样是紧集. 因此集合 $F(K)$ 的边界含在 $F(K)$ 中. 这表明, K 的外点 y 的像不在 $F(K)$ 内以及 $F(K)$ 的边界之中, 于是点 $F(y)$ 是 $F(K)$ 的外点. 对于闭集 $K_1 = X \setminus B$ 重复这一论证, 得知, 集 B 的内点 b 映射成集 $F(B)$ 的内点. 现设点 x 是 B 的边界点且 $y = F(x)$ 是它在 Y 中的像. 考虑点 y 的任意一个邻域 σ_y. 根据 F 的连续性,σ_y 包含点 x 的某个邻域 σ_x 的像. 但由于 $x \in \partial B$, 那么在 σ_x 中既含有 B 的点, 亦含有 B 的余集 $X \setminus B$ 的点. 因此, σ_y 既含有 $F(B)$ 的点, 亦含有 $F(X \setminus B) = F(X) \setminus F(B)$ 的点. 这表明 $y \in \partial F(B)$, 且 $F(\partial B) \subset \partial F(B)$.

现考察逆映射 F^{-1},它是空间 Y 到 X 的映射,那么,任何开集 B 的像 $F(B) \subset Y$ 都是 Y 中的开集, 这是因为 $F(B)$ 全由内点组成. 因此映射 F^{-1} 是连续的.

结论 1°和 2°全部获证. ◄

§7. 连通集及连续性

定义 27 度量空间 X 中的集合 A 叫作是连通的, 如果不管怎样把它划分成两个互不相交的不空子集 A_1 和 A_2 时, A_1 和 A_2 都有属于 A 的公共的边界点, 即满足下述条件的点 a:

1) $a \in A$;

2) 在点 a 的任意的 ε 邻域中都既存在集合 A_1 中的异于 a 的点. 也存在集合 A_2 中的异于 a 的点.

在平面上, 线段, 矩形, 圆等都是连通集的例子.

连通的开集叫作**区域**, 而连通的紧集叫作**连续统**.

定理 9 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通集, 函数 F 在 A 上连续. 又设存在点 x_1、$x_2 \in A, F(x_1) = a, F(x_2) = b, a < b$. 那么对于任意的数 $c \in (a,b)$, 存在点 $x_3 \in A$ 使得 $F(x_3) = c$.

► 考虑集合 $M_1 = \{x \in A | F(x) < c\}$ 和 $M_2 = \{x \in A | F(x) \geqslant c\}$. 根据集合 A 的连通性, 存在点 $x_3 \in A$, 既是 M_1 的边界点又是 M_2 的边界点. 在每个邻域 $O_n = O\left(x_3, \dfrac{1}{n}\right)$ 中存在点 $a_n \in M_1$ 和点 $b_n \in M_2$. 序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 皆收敛到 x_3. 那么根据函数 F 的连续性, 有

$$F(x_3) = F(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} F(a_n) \leqslant c,$$
$$F(x_3) = F(\lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty} F(b_n) \geqslant c.$$

可见 $F(x_3) = c$. ◄

第十四章　多变量函数的微分学

第二十一讲

§1. $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数

再次注意到这样一个事实, 由于函数连续的概念是作为函数沿着基的极限来定义的, 所以对于 n 个变量的在点 $\bar{x}=\bar{x}_0$ 处连续的函数可以完成算术运算而保持连续性, 只要保留通常的附加条件使分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的分母在点 $\bar{x}=\bar{x}_0$ 处不等于零. 关于在点 $\bar{x}=\bar{x}_0$ 处连续的函数的不等式的如下形式的定理也成立: 若 $f(\bar{x}_0)>g(\bar{x}_0)$, 则在点 $\bar{x}=\bar{x}_0$ 的某邻域内有 $f(\bar{x})>g(\bar{x})$[①].

和以前一样, 我们说给定在集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$ 是在集合 $B\subset A$ 上连续的, 如果 $f(\bar{x})$ 在每点 $\bar{x}\in B$ 都连续的话[②]. 我们记得, 对于在紧集上连续的函数, 关于函数在此集合上有界的定理, 关于达到上确界和下确界的定理以及关于一致连续性的定理都成立. 而对于给定在连通集上的连续函数, 与中间值定理类似的定理成立.

除了这些性质之外, 多变量函数还具有自己固有的特性.

设 $\bar{a}=(a_1,\cdots,a_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的某个点且函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{a}$ 的某个邻域中定义. 我们挑出点 $\bar{a}$ 的一个坐标. 设此坐标的号码是 $s, 1\leqslant s\leqslant n$, 并用 $M\subset\mathbb{R}^n$ 表示一切这样

[①]原文作 "若 $f(\bar{x}_0)\geqslant g(\bar{x}_0)$, 则 $\cdots\cdots f(\bar{x})\geqslant g(\bar{x})$", 不妥 —— 译者注.

[②]这里 "在每点 $\bar{x}\in B$ 都连续" 指的是 "相对于 A 而言的" 连续 —— 译者注.

的点的集合. 这些点的一切坐标, 除了第 s 个以外, 皆与 $\bar{a}$ 的坐标重合. 如果作为自变量考察点 $\bar{x} \in M$, 那么就得到一个单变量 x_s 的函数 $\varphi(x_s) = f(a_1, \cdots, x_s, \cdots, a_n)$. 例如, 如果 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2$, 则 $\varphi(x_2) = a_1^2 + a_1x_2$.

定义 1 说函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{a}$ 处关于变量 x_s 连续, 如果 $\varphi(x_s)$ 在点 $x_s = a_s$ 处连续.

可以给出函数 $f(\bar{x})$ 沿着任意的方向连续的更一般的定义.

定义 2 称任何单位向量 $\bar{e} \in \mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的方向.

定义 3 形如 $\bar{x} = \bar{a} + t\bar{e}$ 的点 $\bar{x}$ 的全体所成的集合叫作:

a) 从点 $\bar{a}$ 出发沿方向 $\bar{e}$ 的开射线, 如果 $t > 0$;

b) 闭射线, 如果 $t \geqslant 0$;

c) 沿方向 $\bar{e}$ 通过点 $\bar{a}$ 的直线, 如果 $t \in \mathbb{R}$.

我们来考察函数 $\psi(t) = f(\bar{a} + t\bar{e})$.

定义 4 说函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{a}$ 处沿方向 $\bar{e}$ 连续, 如果 $\psi(t)$ 在点 $t = 0$ 处连续.

下述明显的性质成立. 若 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x} = \bar{a}$ 处作为 n 个变量的函数连续, 则它在点 $\bar{a}$ 处沿任意的方向 $\bar{e}$ 都连续. 反过来的命题, 一般说来是不对的.

例 1) 设函数 $f(x, y)$ 以下述方式给定:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{若 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = y = 0. \end{cases}$$

它在原点关于 x 连续亦关于 y 连续, 但在此点作为两个变量 x, y 的函数是间断的.

2) 设函数 $f(x, y)$ 用下面的关系式给出:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{若 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = y = 0. \end{cases}$$

它在原点处沿任何方向都连续, 但作为两个变量的函数在原点处间断.

现考察映射 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. 这个映射单值地对应于 m 个函数 $\varphi_1(\bar{x}), \cdots, \varphi_m(\bar{x})$, 这 m 个函数给出了点 $\bar{y} = F(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m$ 的坐标, 即

$$\bar{y} = F(\bar{x}) = (\varphi_1(\bar{x}), \cdots, \varphi_m(\bar{x})), \quad y_s = \varphi_s(\bar{x}), s = 1, \cdots, m.$$

命题 1 为使映射 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 在点 $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ 处连续, 必须且只需每个函数 φ_s 都在点 $\bar{x} = \bar{x}_0$ 处连续.

命题的证明直接从连续映射的定义推出, 这是因为

$$|a_s - b_s| \leqslant \sqrt{\sum_{t=1}^{n}(a_t - b_t)^2} \leqslant \sum_{t=1}^{n}|a_t - b_t|.$$

现在我们把关于度量空间的复合映射的连续性的定理转述于多变量函数的情形.

定理 1 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, 并设映射 f 在点 $\bar{x}_0$ 处连续, 而函数 g 在点 $\bar{y}_0 = f(\bar{x}_0)$ 处连续. 还设在点 $\bar{x}_0$ 的某邻域内复合函数 $h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$ 有定义. 那么函数 h 在点 $\bar{x}_0$ 处连续.

定义 5 设 $A \subset \mathbb{R}^n, F: A \to \mathbb{R}$. 函数 F 叫作是在集合 A 上一致连续的, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于任何满足条件 $\rho(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$ 的 $\bar{x} \in A$ 和 $\bar{y} \in A$, 有 $|F(\bar{x}) - F(\bar{y})| < \varepsilon$.

定理 2 在紧集 K 上连续的函数 F 是在此集合上一致连续的.

► 给定任意的 $\varepsilon > 0$. 取数 $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$, 并对每点 $\bar{x} \in K$ 考察邻域 $O(\bar{x}, \delta_{\bar{x}}(\varepsilon_1))$, 它由满足条件 $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \varepsilon_1$ 的点 $\bar{y}$ 组成. 那么, "截断" 邻域 $O\left(\bar{x}, \frac{1}{2}\delta_{\bar{x}}(\varepsilon_1)\right)$ 的全体覆盖紧集 K. 根据紧集的定义, 从此覆盖中可选取出有限子覆盖. 把选取出的这有限个球形邻域的半径的最小值取作 $\delta = \delta(\varepsilon)$. 我们来考察满足条件 $\rho(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$ 的任意两点 $\bar{x} \in K$ 和 $\bar{y} \in K$. 那么, 存在 $O\left(\bar{x}_0, \frac{1}{2}\delta_{\bar{x}_0}(\varepsilon_1)\right)$ 含着点 $\bar{x}$. 而根据三角形不等式有

$$\rho(\bar{y}, \bar{x}_0) \leqslant \rho(\bar{x}, \bar{y}) + \rho(\bar{x}, x_0) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{\bar{x}_0}(\varepsilon_1) \leqslant \delta_{\bar{x}_0}(\varepsilon_1)^{①}.$$

因此,

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leqslant |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| + |f(\bar{x}_0) - f(\bar{y})| < 2\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

于是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 我们指定了 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于任意的 $\bar{x}, \bar{y} \in K$, 只要 $\rho(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$ 就有 $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \varepsilon$. 可见函数 f 在紧集 K 上一致连续. ◄

§2. $\mathbb{R}^n$ 上的可微函数

设数值函数 $f(\bar{x})$ 定义在点 $\bar{x} = \bar{a} \in \mathbb{R}^n$ 的某个邻域上.

定义 6 差 $\Delta f(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{a})$ 叫作函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x} = \bar{a}$ 处的增量; 差 $\Delta\bar{x} = \bar{x} - \bar{a}$ 叫作自变量 $\bar{x}$ 的增量.

向量 $\Delta\bar{x}$ 的长度记作 $|\Delta\bar{x}|$, 它等于 $\rho(\bar{x}, \bar{a})$.

①原文此式误为 $\rho(\bar{y}, \bar{x}_0) \leqslant \rho(\bar{y}, \bar{x}) + \rho(\bar{x}, \bar{x}_0) < \delta$—— 译者注.

命题 2 若函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处连续, 则它的增量 $\Delta f(\bar{x})$ 当 $\Delta\bar{x}$ 趋于零时趋于零, 即 $\Delta f(\bar{x})=o(1)$.

证明明显地从函数沿着集合基的极限的定义及性质推出.

定义 7 自变量的增量 $\Delta\bar{x}$ 的线性函数 $df(\bar{x})$ 叫作函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处的微分, 如果当 $\Delta\bar{x}\to 0$ 时, 增量 $\Delta f(\bar{x})$ 可以表示成如下形式:

$$\Delta f(\bar{x})=df(\bar{x})+o(|\Delta\bar{x}|).$$

若函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处存在微分 $df(\bar{x})$, 则说它在此点处可微.

命题 3 若函数在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处可微, 则它在此点处连续.

命题的证明明显地从下述事实推出: 当 $\Delta\bar{x}\to 0$ 时 $\Delta f(\bar{x})\to 0$.

再次强调, 函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处的增量的线性部分或者说主部, 叫作它在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处的微分. 由于 $df(\bar{x})$ 是线性函数, 它可写成形式

$$df(\bar{x})=A_1(x_1-a_1)+\cdots+A_n(x_n-a_n)=\sum_{s=1}^{n}A_s\Delta x_s,$$

其中 A_s 是某些实数而 $\Delta x_s=x_s-a_s$. 如果 $f(\bar{x})=x_s$, 则 $df(\bar{x})=dx_s=\Delta x_s$.

定理 3 设 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处可微, 那么每个坐标函数 $\varphi_s(x_s)=f(a_1,\cdots,x_s,\cdots,a_n)$ 都在点 $x_s=a_s$ 处可微, 且 $A_s=\varphi_s'(a_s), s=1,\cdots,n$.

► 在通过微分表示在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处的增量 $\Delta f(\bar{x})$ 的公式中令 $x_r=a_r, r\neq s$. 得

$$\Delta f(\bar{x})=f(\bar{x})-f(\bar{a})=A_s\Delta x_s+o(|\Delta x_s|).$$

那么, 根据函数 $\varphi_s(x_s)$ 的定义, 有

$$f(\bar{x})-f(\bar{a})=\varphi_s(x_s)-\varphi_s(a_s)=A_s\Delta x_s+o(|\Delta x_s|).$$

于是

$$A_s=\lim_{\Delta x_s\to 0}\frac{\varphi_s(x_s)-\varphi_s(a_s)}{\Delta x_s}=\varphi_s'(a_s). \quad ◄$$

定义 8 若导数 $\varphi_s'(a_s)$ 存在, 则称之为函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处的关于第 s 个变量的偏导数, 并记作

$$\varphi_s'(a_s)=\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_s}=\left.\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}\right|_{\bar{x}=\bar{a}}.$$

推论 函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处的微分单值地写成如下形式:

$$\left.df(\bar{x})\right|_{\bar{x}=\bar{a}}=\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_1}\Delta x_1+\cdots+\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

► 此性质之证明是明显的. ◄

例 设 $f(x,y)=x^2+xy$. 那么

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x+y,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x,\quad df(x,y)=(2x+y)dx+xdy.$$

于是, 函数在一点处可微的必要条件是在此点存在全部偏导数. 现在来证明函数在一点处可微的一个充分条件.

定理 4 *设在点 $\bar{a}$ 的某邻域内, 存在全部的偏导数 $\dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}, s=1,\cdots,n$, 且这些偏导函数在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处都连续, 那么函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{a}$ 处可微.*

► 为简单起见, 我们认为 $n=2$. 函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处的增量 $\Delta f(x,y)$ 可写成:

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y)&=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)\\&=(f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b+\Delta y))+(f(a,b+\Delta y)-f(a,b)).\end{aligned}$$

对于括号中的每个差可以分别使用拉格朗日有限增量公式, 这是因为在点 (a,b) 的所考察的邻域内, 函数 $f(x,y)$ 关于 x 和关于 y 分别有连续的偏导函数. 我们得到

$$\Delta f(x,y)=\frac{\partial f(a+\xi\Delta x,b+\Delta y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(a,b+\eta\Delta y)}{\partial y}\Delta y,$$

其中 ξ,η 是满足 $0<\xi<1, 0<\eta<1$ 的数 (它们与 $a,b,\Delta x,\Delta y$ 都有关系)①. 接着, 根据偏导函数的连续性, 当 $\Delta x\to 0$ 和 $\Delta y\to 0$ 时, 有下列关系式:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(a+\xi\Delta x,b+\Delta y)}{\partial x}&=\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}+o(1),\\ \frac{\partial f(a,b+\eta\Delta y)}{\partial y}&=\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}+o(1).\end{aligned}$$

由此得到

$$\Delta f(x,y)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\Delta y+o(|\Delta x|+|\Delta y|).$$

由于

$$|\Delta x|\leqslant|\Delta\bar{x}|,\quad |\Delta y|\leqslant|\Delta\bar{x}|,\quad \Delta\bar{x}=(\Delta x,\Delta y)$$

所以

$$\Delta f(x,y)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\Delta y+o(|\Delta\bar{x}|)=df(\bar{x})+o(|\Delta\bar{x}|),$$

即函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处可微. ◄

①原文此处说 ξ,η 是常数, 似不妥 —— 译者注.

我们引入一个在点 (0,0) 的邻域内有偏导函数但在此点处不可微的连续函数的例子: $z=\sqrt{|xy|}$.

此函数当 $x^2+y^2\neq 0$ 时显然有偏导数. 根据定义, 在点 (0,0) 处也有偏导数:

$$\frac{\Delta z(0,0)}{\Delta x}=\frac{z(\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x}=0,\quad \frac{\Delta z(0,0)}{\Delta y}=0,$$

因此,$z'_x(0,0)=0, z'_y(0,0)=0$.

而若 $\Delta x=\Delta y>0$, 则函数 $z(x,y)$ 在点 (0,0) 处的增量等于 Δx, 但是根据微分的定义, 它应该是 $o(\Delta x)$.

因此, 函数 $z=\sqrt{|xy|}$ 在点 (0,0) 处不是可微的.

第二十二讲

§3. 复合函数的微分法

定理 5 设 $\varphi(\bar{x})=(\varphi_1(\bar{x}),\cdots,\varphi_m(\bar{x}))$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射, 它定义在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 的某邻域内且在此点处可微. 还设对于某 $\varepsilon>0$ 和某 $\delta>0,\bar{a}$ 的 δ 邻域 $O(\bar{a},\delta)$ 在映射 φ 之下的像包含在点 $\bar{b}=\varphi(\bar{a})$ 的 ε 邻域之中. 最后设对于任何点 $\bar{y}\in O(\bar{b},\varepsilon)$, 数值函数 $f(\bar{y})$ 都有定义, 且 f 在点 $\bar{b}$ 处可微. 那么复合函数 $h(\bar{x})=f(\varphi(\bar{x}))$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处可微且成立等式

$$\frac{\partial h}{\partial x_s}=\frac{\partial h}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_s}+\cdots+\frac{\partial h}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_s},\quad s=1,\cdots,n.$$

这里, 关于变量 x_s 的偏导数是在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处取的, 而关于 $\bar{y}_l$ 的偏导数是在点 $\bar{y}=\bar{b}$ 处取的, $l=1,\cdots,m$.

► 根据函数 $f(\bar{y})$ 在点 $\bar{y}=\bar{b}$ 处的可微性, 在自变量的任意的增量 $\Delta\bar{y}=\bar{y}-\bar{b}$ 之下, 函数的增量 Δf 可写成:

$$\Delta f=df+o(|\Delta\bar{y}|),$$

其中

$$df=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_l}\cdot\Delta y_l.$$

用函数 $\varphi_l(\bar{x})$ 对应于自变量 $\bar{x}$ 的增量 $\Delta\bar{x}$ 的增量 $\Delta\varphi_l$ 代替 Δy_l. 那么此公式的左边得 $\Delta h(\bar{x})$, 且公式成为

$$\Delta h(\bar{x})=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_l}\cdot\Delta\varphi_l(\bar{x})+o(|\Delta\varphi(\bar{x})|).$$

根据函数 $\varphi_l(\bar{x})$ 的可微性, 有

$$\Delta\varphi_l(\bar{x})=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_s}\Delta x_s+o(|\Delta\bar{x}|),\quad l=1,\cdots,m.$$

诸函数 $\varphi_l(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处的偏导数都是具体的实数. 因此存在实数 $M>0$, 使得这些偏导数的绝对值都不超过 M. 那么有

$$|\Delta\varphi_l(\bar{x})|\leqslant 2Mn|\Delta\bar{x}|,\quad |\Delta\varphi|\leqslant 2Mn^2|\Delta\bar{x}|.$$

由此得到

$$o(|\Delta\varphi(\bar{x})|)=o(|\Delta\bar{x}|).$$

现将 $\Delta\varphi_l(\bar{x})$ 的值代入到关于 $\Delta h(\bar{x})$ 的公式中, 就得到定理的结论. ◄

推论 1 (一阶微分的形式不变性) *如果在一阶微分 $df(\bar{y})$ 的表达式中代替独立增量 Δy_s 以函数 $y_s=\varphi_s(\bar{x})$ 的微分, 那么所得的表达式就是复合函数 $h(\bar{x})=f(\varphi(\bar{x}))$ 的微分. 换句话说, 函数的一阶微分的形式当独立变量成为因变函数时, 不发生改变.*

推论的结论乃是定理 5 的论断的简单改写.

推论 2

微分法则

下述公式成立:

a) $d(cu)=cdu\ \forall c\in\mathbb{R}$;　c) $d(uv)=udv+vdu$;

b) $d(u\pm v)=du\pm dv$;　d) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$ 当 $v(\bar{x}_0)\neq 0$ 时.

► 我们仅证明性质 c). 设 $z=z(u,v)=uv$. 那么

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=vdu+udv.$$

在 u 和 v 都是其他独立变量的函数时, 我们就使用一阶微分形式的不变性 (推论 1). ◄

§4. 方向导数. 梯度

设给定方向 $\bar{e}=(e_1,\cdots,e_n),|\bar{e}|=1$, 以及坐标轴 $Ox_1,\cdots,Ox_n$ 的向量方向 $\bar{k}_1,\cdots,\bar{k}_n$. 那么显然, 若 α_s 是 $\bar{k}_s$ 和 $\bar{e}$ 之间的夹角, 则

$$e_s=(\bar{e},\bar{k}_s)=|\bar{e}||\bar{k}_s|\cos\alpha_s=\cos\alpha_s.$$

根据这个定义, 数 $e_1,\cdots,e_n$ 叫作方向 $\bar{e}$ 的**方向余弦**.

设 $f(\bar{x})$ 是一个在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处可微的函数, 且 $\bar{e}$ 是某个方向. 我们来考察复合函数 $h(t)=f(\bar{a}+t\bar{e})$. 它是一个变量 t 的函数, 且根据关于复合函数的微分的定理, 在 $t=0$ 处成立等式

$$dh(t)=h'(0)dt=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_s}e_s dt.$$

那么

$$h'(0)=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_s}e_s=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_s}\cos\alpha_s.$$

定义 9 此量叫作函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{a}$ 处沿方向 $\bar{e}$ 的导数,

记作:

$$\frac{\partial f}{\partial e}=\left.\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial e}\right|_{\bar{x}=\bar{a}}=h'(0).$$

定义 10 向量

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\nabla f$$

叫作函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处的梯度, 记作:

$$\nabla f=\operatorname{grad}f.$$

于是

$$\frac{\partial f}{\partial e}=(\bar{e},\operatorname{grad}f)=(\bar{e},\nabla f),$$

其中

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

是 "奈普拉" 算子.

我们给出方向导数的某些性质.

1° 函数 $f(\bar{x})$ 的方向导数的最大值等于梯度向量的长度, 且在方向 $\bar{e}=\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$ 上达到.

2° 若梯度向量为零向量或者它与方向向量垂直, 则方向导数等于零.

3° 如果 $\bar{e}=-\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$, 则函数 $f(\bar{x})$ 沿 $\bar{e}$ 的方向导数达最小值 $-|\operatorname{grad}f|$.

由此看到, 函数在梯度方向上的增长速度最大.

§5. 微分的几何意义

为了简单起见, 我们只考虑两个变量的函数.

定义 11 任何定义在某区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 上的连续函数 $z=f(x,y)$ 的图像叫作是 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 P. 换句话说, 曲面 P 是这样的点 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 的集合, 其中坐标 $z\in\mathbb{R}$ 与点 $(x,y)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 以关系式 $z=f(x,y)$ 相联系.

我们记得, 区域指的是连通开集.

定义 12 说曲面 $z = f_1(x,y)$ 和曲面 $z = f_2(x,y)$ 在点 (a,b,c) 处彼此相切, 如果 $c = f_1(a,b) = f_2(a,b)$ 且差

$$r(x,y) = f_1(x,y) - f_2(x,y)$$

当 $|\bar{x} - \bar{a}| \to 0$ 时是 $o(|\bar{x} - \bar{a}|)$.

一次函数 $z = kx + ly + m, k,l,m \in \mathbb{R}$ 的图像是 $\mathbb{R}^3$ 中的平面.

定理 6 设函数 $f(\bar{x})$ 定义在 $O(\bar{a},\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$ 且在点 $\bar{x} = \bar{a}$ 处可微, 而且 $z_0 = f(\bar{a})$. 那么由形如

$$z - z_0 = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_2}(x_2 - a_2)$$

的线性方程给定的平面 Π 与曲面 $P: z = f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x} = \bar{a}$ 处相切.

► 把平面 Π 看作是一次函数 $g(\bar{x})$ 的图像, 其中

$$g(\bar{x}) = z_0 + df(\bar{x}).$$

由于函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x} = \bar{a}$ 处可微, 所以

$$f(\bar{x}) - g(\bar{x}) = f(\bar{a}) + df(\bar{x}) + o(|\Delta\bar{x}|) - z_0 - df(\bar{x}) = o(|\Delta\bar{x}|).$$

因此, 根据曲面相切的定义, 平面 Π 和曲面 P 彼此相切. ◄

后面, 我们需要曲面的法线的概念.

定义 13 称过点 (x_0, y_0, z_0) 与向量 $(f'_x, f'_y, -1)$ 平行的直线为曲面 $P: z = f(x,y)$ 的法线.

第二十三讲

§6. 高阶偏导数

设函数 $f(x)$ 在某 δ 邻域 $O(\bar{a},\delta)$ 内有全部一阶偏导数 $\dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}, s = 1, \cdots, n$. 这些偏导数自身都是 n 个变元的函数, 并且可能还有偏导数, 即可以定义下列的量:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s} = f''_{x_s x_r} = (f'_{x_s})'_{x_r}, \quad s, r = 1, \cdots, n.$$

这些量叫作二阶偏导数. 如果 $s \neq r$, 则它们叫作混合导数.

下述关于二阶混合导数的定理成立.

定理 7 (施瓦茨定理) 设函数 $f(x_1,x_2)$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}=(a_1,a_2)$ 的某邻域内有二阶混合导数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}$, 并且它们都在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处连续. 那么在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处这些导数彼此相等, 即

$$f''_{x_1x_2}(\bar{a})=f''_{x_2x_1}(\bar{a}).$$

► 考察函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处的第二差分 $\Delta^2 f$:

$$\Delta^2 f=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2+h_2)+f(a_1,a_2).$$

令 $\varphi(x)=f(x,a_2+h_2)-f(x,a_2)$, 使用拉格朗日有限增量公式两次, 得

$$\begin{aligned}\varphi(a_1+h_1)-\varphi(a_1)&=h_1\varphi'(a_1+\theta_1h_1)\\&=h_1\left(f'_{x_1}(a_1+\theta_1h_1,a_2+h_2)-f'_{x_1}(a_1+\theta_1h_1,a_2)\right)\\&=h_1h_2f''_{x_1x_2}(a_1+\theta_1h_1,a_2+\theta_2h_2).\end{aligned}$$

根据函数 $f''_{x_1x_2}(x_1,x_2)$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处的连续性, 有

$$\varphi(a_1+h_1)-\varphi(a_1)=h_1h_2(f''_{x_1x_2}(a_1,a_2)+o(1)).$$

另一方面,

$$\varphi(a_1+h_1)-\varphi(a_1)=\psi(a_2+h_2)-\psi(a_2),$$

其中 $\psi(x)=f(a_1+h_1,x)-f(a_1,x)$. 再用拉格朗日定理, 得

$$\begin{aligned}\psi(a_2+h_2)-\psi(a_2)&=h_2(f'_{x_2}(a_1+h_1,a_2+\theta_2'h_2)-f'_{x_2}(a_1,a_2+\theta_2'h_2))\\&=h_1h_2f''_{x_2x_1}(a_1+\theta_1'h_1,a_2+\theta_2'h_2)=h_1h_2(f''_{x_2x_1}(a_1,a_2)+o(1)).\end{aligned}$$

从而成立等式

$$f''_{x_1x_2}(a_1,a_2)=f''_{x_2x_1}(a_1,a_2).\quad ◄$$

定理 8 (杨定理) 设函数 $f'_{x_1}(x_1,x_2)$ 和 $f'_{x_2}(x_1,x_2)$ 都在点 $\bar{x}=\bar{a}=(a_1,a_2)$ 的某个邻域内定义且在点 $\bar{a}$ 处可微. 那么

$$f''_{x_1x_2}(a_1,a_2)=f''_{x_2x_1}(a_1,a_2).$$

► 考察函数

$$\begin{aligned}&\Delta^2 f=f(a_1+h,a_2+h)-f(a_1+h,a_2)-f(a_1,a_2+h)+f(a_1,a_2),\\&\varphi(x)=f(x,a_2+h)-f(x,a_2).\end{aligned}$$

那么

$$\Delta^2 f=\varphi(a_1+h)-\varphi(a_1).$$

从拉格朗日定理推出

$$\Delta^2 f = h\varphi'(a_1+\theta_1 h) = h(f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h, a_2+h) - f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h, a_2)).$$

根据函数 $f'_{x_1}(x_1,x_2)$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处可微, 得

$$f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h, a_2+h) - f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h, a_2) = \theta_1 h f''_{x_1x_1}(\bar{a}) + hf''_{x_1x_2}(\bar{a}) + o(h),$$
$$f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h, a_2) - f'_{x_1}(a_1, a_2) = \theta_1 h f''_{x_1x_1}(\bar{a}) + o(h).$$

因此

$$\Delta^2 f = h^2 f''_{x_1x_2}(\bar{a}) + o(h^2).$$

另一方面,

$$\Delta^2 f = \psi(a_2+h) - \psi(a_2),$$

其中 $\psi(y) = f(a_1+h, y) - f(a_1, y)$. 与前面类似地得到

$$\Delta^2 f = h^2 f''_{x_2x_1}(\bar{a}) + o(h^2).$$

于是

$$f''_{x_1x_2}(a_1,a_2) = f''_{x_2x_1}(a_1,a_2). \quad ◄$$

推论 *杨定理和施瓦茨定理对于 $n>2$ 也成立.*

为证此推论, 需固定除 x_r 和 x_s 以外的其他变量, 并使用已证的定理于所得的函数.

定义 14 *函数 $f(\bar{x})$ 叫作是在一点处二次可微的,如果它的一切一阶偏导数都在此点可微. 一般地, 函数叫作是 n 次可微的, 如果它的一切 $n-1$ 阶偏导数都是可微函数.*

定理 9 (可微的充分条件) *为使函数 $f(\bar{x})$ 在一点处是 n 次可微的, 只需它的一切 n 阶偏导数都在此点处连续.*

证明用归纳法完成.

推论 (杨定理的推论) *如果函数 $f(\bar{x})$ 是 n 次可微的, 那么直到 n 阶的混合偏导数都与其中求导的次序无关.*

证明使用杨定理, 归纳地完成.

§7. 高阶微分. 泰勒公式

设函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处二次可微. 固定增量 $d\bar{x}=\bar{h}$. 那么得到由下式定义的

新的函数 $g(\bar{x}) = g(\bar{x}, \bar{h})$

$$g(\bar{x}) = df(\bar{x}) = \sum_{s=1}^{n} h_s \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}.$$

这是一个在点 $\bar{x} = \bar{a}$ 处可微的函数, 而且它的微分等于

$$dg(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial g(\bar{a})}{\partial x_r} \Delta x_r,$$

即

$$dg(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} h_s \Delta x_r \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s} \right)\bigg|_{\bar{x}=\bar{a}}.$$

现置 $h_s = \Delta x_s = dx_s$. 那么得到

$$d^2 f(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_s \partial x_r} dx_s dx_r.$$

这个表达式叫作**函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x} = \bar{a}$ 处的二阶微分**. 类似地定义 k 阶微分 $d^k f(\bar{x})$:

$$d^k f(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \cdots \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^k f(\bar{x})}{\partial x_s \cdots \partial x_r} dx_s \cdots dx_r.$$

显然, 这个表达式可以用如下记号写出:

$$d^k f(\bar{x}) = \left(\sum_{s=1}^{n} dx_s \frac{\partial}{\partial x_s} \right)^k f(\bar{a}),$$

其中为得到展开式应形式地把括号中的表达式的幂理解成多项式而把符号 $dx_s, \dfrac{\partial}{\partial x_s}$ 看作是独立变量, 然后在表达式 $\dfrac{\partial^k}{\partial x_s \cdots \partial x_r}$ 的分子的右边补写上 $f(\bar{a})$.

我们指出, 当 $r \geqslant 2$ 时,$d^r f(\bar{x})$ 一般说来不具有不变性质. 如果在 $d^2 f(\bar{x})$ 的表达式中代替 dx_s 以函数 $x_s = \varphi_s(\bar{t})$ 的微分, 那么就得到一个一般说来已不是二阶微分的表达式.

实际上, 如果 $h(\bar{t}) = f(\varphi(\bar{t}))$, 那么

$$d^2 h(\bar{t}) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_r} d\varphi_s d\varphi_r + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_s} d^2 \varphi_s.$$

这里我们用到

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_s} d\varphi_s \right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \right) d\varphi_s + \frac{\partial f}{\partial x_s} d^2 \varphi_s.$$

但若 $\varphi_s(\bar{t})$ 是一次函数, 即

$$\varphi_s(\bar{t}) = \lambda_{0,s} + \lambda_{1,s} t_1 + \cdots + \lambda_{n,s} t_n,$$

则 $d^2\varphi_s = 0$, 从而依然发生二阶微分形式不变. 类似的结论对于三阶微分等也成立. 据此, 例如当 $\bar{x} = \bar{a} + t\bar{e}$ 且 $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{e})$ 时, 有

$$d^r f(\bar{a} + t\bar{e})\Big|_{t=0} = d^r g(t)\Big|_{t=0} = g^{(r)}(0)(dt)^r,$$

从而函数 $g(t)$ 是 r 阶可微的.

我们使用这个注记于推导 n 个变量的函数的泰勒公式.

定理 10 (带佩亚诺型余项的泰勒公式) *设函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x} = \bar{a}$ 处 k 次可微. 那么当 $\bar{x}$ 趋于 $\bar{a}$ 时成立下述公式:*

$$f(\bar{x}) = P(\bar{x}) + r(\bar{x}),$$

其中

$$P(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \left. df(\bar{a})\right|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \frac{1}{2!}d^2 f(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \cdots + \frac{1}{k!}d^k f(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}},$$

$$r(\bar{x}) = o(|\bar{x} - \bar{a}|^k).$$

► 对参数 k 使用数学归纳法. 对于 $k = 1$, 定理的结论从函数的微分的定义推出. 现设 $k > 1$.

从定理的条件推出, 函数 $r(\bar{x})$ 在点 $\bar{x} = \bar{a}$ 的某邻域 U 内有直到 $k-1$ 阶的一切偏导数. 此外, 在点 $\bar{a}$ 处函数 $r(\bar{x})$ 本身及其一切直到 k 阶的偏导数都等于零.

往下设 $\bar{x} \in U, \Delta\bar{x} = \bar{x} - \bar{a}$. 那么

$$r(\bar{x}) = r(\bar{x}) - r(\bar{a}) = r(\bar{a} + \Delta\bar{x}) - r(\bar{a}) = D_1 + \cdots + D_n,$$

其中, 对于 $s = 1, \cdots, n$, 量 D_s 用下述等式定义

$$\begin{aligned} D_s &= r(a_1 + \Delta x_1, \cdots, a_s + \Delta x_s, a_{s+1}, \cdots, a_n) \\ &\quad - r(a_1 + \Delta x_1, \cdots, a_{s-1} + \Delta x_{s-1}, a_s, \cdots, a_n) \\ &= g(a_s + \Delta x_s) - g(a_s). \end{aligned}$$

由此, 使用拉格朗日公式于每个量 D_s, 对于某些满足 $0 < \xi_s < 1$ 的 ξ_s, 得

$$D_s = g'_{x_s}(a_s + \xi_s\Delta x_s)\Delta x_s = r'_{x_s}(\bar{a} + \bar{v}_s)\Delta x_s,$$

其中 $\bar{v}_s = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_{s-1}, \xi_s\Delta x_s, 0, \cdots, 0)$. 因此

$$r(\bar{x}) = r'_{x_1}(\bar{a} + \bar{v}_1)\Delta x_1 + \cdots + r'_{x_n}(\bar{a} + \bar{v}_n)\Delta x_n.$$

我们看到, 对于每个 $s = 1, \cdots, n$, 点 $\bar{a} + \bar{v}_s \in U$. 因此, 可以对于等式右边的各偏导函数使用将参数 k 换为 $k-1$ 之后的归纳假设, 那么, 对于从 1 到 n 的全部 s 都有

$$r'_{x_s}(\bar{a} + \bar{v}_s) = o(|\bar{x} - \bar{a}|^{k-1}).$$

由此推出 $r(\bar{x}) = o(|\bar{x}-\bar{a}|^k)$. ◀

定理 11 (带拉格朗日型余项的泰勒公式) 设函数 $f(\bar{x})$ 在每点 $\bar{x} \in O(\bar{a},\varepsilon)$ 处都有 $k+1$ 阶微分, 其中 ε 是某个正数. 那么对于任意的点 $\bar{b} \in O(\bar{a},\varepsilon)$, 存在点 $\bar{c} = \bar{a}+\theta(\bar{b}-\bar{a}), 0<\theta<1$, 使得

$$f(\bar{b}) = f(\bar{a}) + \sum_{s=1}^{k} \frac{d^s f(\bar{a})}{s!}\bigg|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}} + \frac{d^{k+1} f(\bar{c})}{(k+1)!}\bigg|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}}.$$

► 设 $g(t) = f(\bar{a}+t(\bar{b}-\bar{a}))$, 那么根据单变量函数的带有拉格朗日型余项的泰勒公式, 有

$$g(1) = g(0) + \sum_{s=1}^{k} \frac{g^{(k)}(0)}{s!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!},$$

其中 $0<\theta<1$. 由于成立公式

$$g(0) = f(\bar{a}),\ g'(0) = df(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}}, \cdots, g^{(k)}(0) = d^k f(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}},$$
$$g^{(k+1)}(\theta) = d^{(k+1)} f(\theta)\Big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}},$$

把它们代入上面的关系式中, 就得到定理的结论. ◀

注 我们指出使得带佩亚诺型余项和带拉格朗日型余项的泰勒公式成立的条件的差异 (定理 10 和定理 11). 在第一种情形, 仅假定函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处有 k 重可微性, 而在第二种情形则要求函数 $f(\bar{x})$ 在一个邻域 $O(\bar{a},\varepsilon)$ 上处处有 $k+1$ 重可微性. 我们注意到, 在单变量函数的情形, 函数在点 $x=a$ 处的 k 重可微性保证了在此点的一个邻域内的 $k-1$ 重可微性, 而在多重的情形, 这个条件只给出在此邻域内直到 $k-1$ 阶的偏导数的存在性.

第二十四讲

§8. 泰勒公式的应用. 多变量函数的局部极值

多变量函数的局部极值点的定义与对于单变量函数所作过的定义, 逐字逐句完全一样. 而且一般地, 对于定义在任意的度量空间上的函数也是一样, 只是使函数有极值的点的 ε 邻域是通过相应的度量来定义的.

定义 15 点 $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ 叫作函数 $f(\bar{x})$ 的严格局部极大点, 如果存在点 $\bar{a}$ 的 ε 邻域 $O(\bar{a},\varepsilon)$, 使得对于任何 $\bar{x} \neq \bar{a}$ 且 $\bar{x} \in O(\bar{a},\varepsilon)$ 都有不等式 $f(\bar{x}) < f(\bar{a})$:

若 $f(\bar{x}) \leqslant f(\bar{a})$ 则 $\bar{a}$ 叫作非严格极大点;

若 $f(\bar{x}) > f(\bar{a})$ 则 $\bar{a}$ 叫作严格极小点;

若 $f(\bar{x}) \geqslant f(\bar{a})$ 则 $\bar{a}$ 叫作非严格极小点.

在一点处的严格局部极大值和严格局部极小值都叫作在一点处的严格局部极值,而非严格的局部极大值和局部极小值叫作非严格局部极值.

定理 12 (极值的必要条件) 若 $\bar{a}$ 是函数 $f(\bar{x})$ 的非严格的局部极值点,并且函数 $f(\bar{x})$ 在此点有微分 $df(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a}}$,那么对于任意的增量 $\Delta\bar{x}$ 皆有

$$df(\bar{x})\Big|_{\bar{x}=\bar{a}} = 0,\ 或者\ \mathrm{grad} f(\bar{x})\Big|_{\bar{x}=\bar{a}} = \bar{0}.$$

► 显然,只需证明,对于 $s = 1, \cdots, n$ 成立等式

$$\left.\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}\right|_{\bar{x}=\bar{a}} = 0.$$

考察函数 $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{e}_s)$,其中 e_s 是轴 Ox_s 的方向向量. 那么显然,$g(t)$ 以 $t = 0$ 为局部极值点,从而 $g'(0) = 0$. 但由于

$$\left.\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}\right|_{\bar{x}=\bar{a}} = g'(0) = 0$$

所以定理的结论获得证实. ◄

定义 16 使函数 $f(\bar{x})$ 的梯度等于零向量的点 $\bar{a}$ 叫作函数 $f(\bar{x})$ 的稳定点.

我们发现,函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x} = \bar{a} \in \mathbb{R}^n$ 处的二阶微分是 n 个变量 $dx_1, \cdots, dx_n$ 的二次型.

定义 17 函数 $f(\bar{x})$ 的稳定点 $\bar{a}$ 叫作是正则的,若在此点存在二阶微分 $d^2f(\bar{a})$ 且它是变量 $dx_1, \cdots, dx_n$ 的非退化二次型,也就是说这个二次型的矩阵的行列式异于零.

定理 13 (极值的充分条件) 设 $\bar{a}$ 是函数 $f(\bar{x})$ 的稳定点,即此函数在点 $\bar{a}$ 处的微分等于零,又设在此点函数有二阶微分,它是变量 $dx_1, \cdots, dx_n$ 的非退化二次型,那么:

1) 若在此点 $d^2f(\bar{x})$ 是正定二次型,则函数 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x} = \bar{a}$ 处取局部极小值;

2) 若 $d^2f(\bar{a})$ 是负定的,则 $\bar{a}$ 是局部极大点;

3) 若 $d^2f(\bar{a})$ 是不定型,则 $\bar{a}$ 不是局部极值点.

► 1) 用 A 来代表变量 $dx_s, s = 1, \cdots, n$ 的二次型 $d^2f(\bar{a})$ 的矩阵,而用 $S(\bar{a})$ 代表满足 $|\Delta\bar{x}| = 1$ 的是 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ 的集合.

集合 $S(\bar{a})$ 是有界的,并因其与自己的边界 $\partial S(\bar{a})$ 重合从而包含这个边界,所以是闭的. 结果 $S(\bar{a})$ 是紧集. 因此,在集合 $S(\bar{a})$ 上,二阶微分作为增量 $\Delta\bar{x}$ 的函数达

到它的极小值 m, 即存在 $\bar{e}_0, |\bar{e}_0| = 1$, 使

$$d^2 f(\bar{x})\Big|_{\bar{x}=\bar{a},\Delta\bar{x}=\bar{e}_0} = m > 0.$$

我们见到, 对于任意的向量 $\Delta\bar{x} = |\Delta\bar{x}|\bar{e}, |\bar{e}| = 1$, 有

$$d^2 f(\bar{x})\Big|_{\bar{x}=\bar{a},\Delta\bar{x}} = |\Delta\bar{x}|^2 d^2 f(\bar{x})\ \Big|_{\bar{x}=\bar{a},\bar{e}}.$$

根据带佩亚诺型余项的泰勒公式, 得

$$\begin{aligned}\Delta f(\bar{x}) &= df(\bar{a}) + \frac{1}{2}d^2 f(\bar{a}) + o(|\Delta\bar{x}|^2)\\ &= \frac{1}{2}|\Delta\bar{x}|^2 d^2 f(\bar{x})\ \Big|_{\bar{x}=\bar{a},\bar{e}} + o(|\Delta\bar{x}|^2)\\ &\geqslant \frac{1}{2}|\Delta\bar{x}|^2 m(1+o(1)).\end{aligned}$$

于是存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于一切 $\bar{x} \in O(\bar{a},\varepsilon), \bar{x} \neq \bar{a}$, 成立不等式 $\Delta f(\bar{x}) > 0$.

2) 此款可类似地考察.

3) 根据二次型 $d^2 f(\bar{a})$ 的不定性, 得 $m < 0 < M$, 其中

$$M = \sup_{|\Delta\bar{x}|=1} d^2 f(\bar{a}),\quad m = \inf_{|\Delta\bar{x}|=1} d^2 f(\bar{a}),$$

并且量 M 在向量 $\bar{e}_1$ 处达到, 而量 m 在向量 $\bar{e}_2$ 处达到. 那么, 函数 $g_1(t) = f(\bar{a}+t\bar{e}_1)$ 在 $t=0$ 处达严格局部极小值[①], 而函数 $g_2(t) = f(\bar{a}+t\bar{e}_2)$ 在 $t=0$ 处达严格局部极大值[②]. 可见, 函数 $f(\bar{x})$ 本身在点 $\bar{a}$ 的任何邻域中都既取到比 $f(\bar{a})$ 大的值, 也取到比 $f(\bar{a})$ 小的值. 从而点 $\bar{a}$ 不是 $f(\bar{x})$ 的局部极值点. ◄

§9. 隐函数

设给定点 $(\bar{a},b) = (a_1,\cdots,a_{n-1},b) \in \mathbb{R}^n$, 给定它的 ε 邻域, 以及属于此邻域并满足方程 $f(\bar{x},y)=0$ 的点 $(\bar{x},y)$ 的集合.

定义 18 $n-1$ 个变量 $\bar{x} = (x_1,\cdots,x_{n-1})$ 的函数 $\varphi(\bar{x})$ 定义在点 $\bar{a}$ 的某 δ 邻域上, 叫作是对应于方程 $f(\bar{x},y)=0$ 的隐函数, 如果对于此 δ 邻域内任何 $\bar{x}$ 都成立等式 $f(\bar{x},\varphi(\bar{x}))=0$.

定义 19 函数 $f(\bar{x})$ 叫作是在区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 内的光滑函数, 如果对于任何 $\bar{x}\in\Omega$, 它都在点 $\bar{x}$ 处可微, 而且它的偏导函数在 Ω 上连续.

我们来证明关于隐函数的定理.

①此处原文作 "局部极大值"—— 译者注.
②此处原文作 "局部极小值"—— 译者注.

定理 14 (隐函数定理) 设

1) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ 的某 ε 邻域内连续;

2) $f(a,b)=0$;

3) 偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 Ω 上连续;

4) $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}>0$.

那么存在唯一的定义在 a 的某 δ 邻域内的函数 $y=\varphi(x)$, 使得

1) $\varphi(a)=b$;

2) 对于一切属于此 δ 邻域的 x 成立 $f(x,\varphi(x))=0$. 此外, 此函数 $\varphi(x)$ 是光滑的而且

$$\varphi'(x)=-\frac{f'_x(x,y)\ \big|_{y=\varphi(x)}}{f'_y(x,y)\ \big|_{y=\varphi(x)}}.$$

► 由于 $f'_y(x,y)$ 在 Ω 上连续且 $f'_y(a,b)>0$, 所以存在以点 (a,b) 为中心, 边平行于坐标轴且长度为 $2h$ 的闭的正方形 K 含于 Ω 之中, 使得在此正方形上函数 $f'_y(x,y)$ 的最小值 $m>0$. 根据 $f'_y(x,y)>0$, 函数 $f(a,y)$ 是严格增的. 再由 $f(a,b)=0$, 知 $f(a,b+h)>0$ 且 $f(a,b-h)<0$. 根据函数 $f(x,y)$ 的连续性, 存在 $\delta>0$, 使得对于任意的 $x\in[a-\delta,a+\delta]$ 皆有 $f(x,b+h)>0$ 和 $f(x,b-h)<0$.

由此推出, 在连接点 $A_1=A_1(x)=(x,b-h)$ 和 $A_2=A_2(x)=(x,b+h)$ 的线段上严格增函数 $g(y)=f(x,y)$ 仅在一个点 y_x 处等于零. 对于每个点 $x\in[a-\delta,a+\delta]$, 让点 y_x 与之对应, 这就定义了一个函数 $y=\varphi(x)=y_x$, 它满足

$$f(x,\varphi(x))=f(x,y_x)=0,$$

并且从等式 $f(a,b)=0$ 知 $\varphi(a)=b$.

函数 $\varphi(x)$ 就是要找的隐函数. 只需证明, 函数 $y=\varphi(x)$ 在开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 上可微且

$$\varphi'(x)=-\frac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))}.$$

我们先证 $\varphi(x)$ 的连续性. 设点 x 和 x_0 属于开区间 $(a-\delta,a+\delta)$. 我们来证当 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时 $\Delta\varphi(x_0)=\varphi(x)-\varphi(x_0)\to 0$. 置 $y=\varphi(x), y_0=\varphi(x_0), \Delta y=\Delta\varphi(x)$. 那么 $f(x_0,y_0)=0$. 结果, 对于函数 $g(t)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$ 成立等式 $g(0)=g(1)=0$. 函数 $g(t)$ 在每点 $t\in[0,1]$ 处皆有导数

$$g'(t)=f'_x(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta y.$$

根据罗尔定理, 存在数 $\theta\in(0,1)$ 使 $g'(\theta)=0$. 由此得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{f'_x(\bar{\xi})}{f'_y(\bar{\xi})},$$

其中 $\bar{\xi}=(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$. 因此

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \leqslant \frac{M}{m}, \quad M=\max_K |f'_x(x,y)|, \quad m=\min_K |f'_y(x,y)|>0.$$

从而量 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有界. 因此, 当 $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta y=\Delta x\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 0$, 即 $\varphi(x)$ 是连续函数. 此外, 由于当 $\Delta x\to 0$ 时 $\Delta y\to 0$, 那么 $\bar{\xi}\to(x_0,y_0)$. 进而根据偏导函数 f'_x 和 f'_y 的连续性以及 $f'_y>0$, 得

$$\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{f'_x(x,y)\ \big|_{y=\varphi(x)}}{f'_y(x,y)\ \big|_{y=\varphi(x)}}. \quad ◀$$

注 1. 把函数 f 换成 $g=-f$ 就把 $f'_y(x,y)<0$ 的情形归结到已考虑过的情形.

2. 函数 $y=\varphi(x)$ 的图像是曲面 $z=f(x,y)$ 与水平平面 $y=0$ 的交线.

推论 (一般的隐函数定理) 设:

1) 函数 $f(\bar{x},y)$ 在点 $(\bar{a},b)=(a_1,\cdots,a_{n-1},b)\in\mathbb{R}^n$ 的某 ε 邻域 Ω 中连续;

2) $f(\bar{a},b)=0$;

3) 偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}},\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 Ω 上连续;

4) $\frac{\partial f(\bar{a},b)}{\partial y}>0$.

那么存在唯一的函数 $y=\varphi(\bar{x})$ 定义在点 $\bar{a}$ 的某 δ 邻域中, 使得

1) $\varphi(\bar{a})=b$;

2) 对于此 δ 邻域的一切点 $\bar{x}$ 式 $f(\bar{x},\varphi(\bar{x}))=0$;

3) 函数 $\varphi(\bar{x})$ 是光滑的, 且

$$\varphi'_{x_s}(\bar{x})=-\frac{f'_{x_s}(\bar{x},y)\ \big|_{y=\varphi(\bar{x})}}{f'_y(\bar{x},y)\ \big|_{y=\varphi(\bar{x})}}, \quad s=1,\cdots,n-1.$$

证明实质上与定理的证明逐字逐句重合, 仅需代替点 $(a,b\pm h)$ 而考虑点 $(\bar{a},b\pm h)$, 而以球 $O(\bar{a},\delta)$ 代替开区间 $(a-\delta,a+\delta)$.

作为上述定理的应用, 我们来考察用幂级数表示的隐函数的算术性质. 这里引人的结果是艾森斯坦 (Eisenstein) 一个定理的特殊情形.

定理 15 设给定整系数代数方程 $F(x,y)=0$, 且 $F(0,0)=0, F'_y(0,0)\neq 0$. 还设幂级数 $y=y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是此方程的解. 那么 $y=y(x)$ 是代数函数. 还设系数 a_k 都是有理数, $k\geqslant 0$. 那么存在这样的整数 l, 使得当把 x 换成 lx 时, 从级数 $y=y(x)$ 所得到的幂级数的系数, 可能除 a_0 之外, 全都是整数.

▶ 根据隐函数定理, 存在唯一的函数 $y_0=y_0(x)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内满足方程 $F(x,y)=0$. 因此, 这个函数与幂级数 $y=y(x)$ 重合.

把多项式 $F(x,y)$ 写成如下形状

$$F(x,y)=P_0+P_1y+\cdots+P_my^m,$$

其中 $P_0=P_0(x),\cdots,P_m=P_m(x)$ 都是变量 x 的整系数多项式. 由于 $F(0,0)=0$, 所以 $P_0(0)=0$. 根据条件 $F'_y(0,0)\neq 0$ 得: $P_1(0)\neq 0$. 把多项式 $P_0=P_0(x),\cdots,P_m=P_m(x)$ 写成如下形式:

$$\begin{aligned}&P_0=g_0x+h_0x^2+\cdots,\\&P_1=g_1+h_1x+\cdots,\quad g_1\neq 0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&P_m=g_m+h_mx+\cdots.\end{aligned}$$

其中所有的系数都是整数.

现在令 $x=g_1^2t, y=g_1u$, 其中 t 和 u 是新的参数. 在等式 $F(g_1^2t,g_1u)=0$ 中消去 g_1^2, 得

$$G_0t+H_0t^2+\cdots+(1+G_1t+H_1t^2+\cdots)u+\cdots+(G_m+H_mt+\cdots)u^m=0,$$

其中所有的系数都是整数. 由此方程得

$$\begin{aligned}u=&-\frac{G_0t+H_0t^2+\cdots}{1+G_1t+H_1t^2+\cdots}-\frac{G_2+H_2t+\cdots}{1+G_1t+H_1t^2+\cdots}u^2-\cdots\\&-\frac{G_m+H_mt+\cdots}{1+G_1t+H_1t^2+\cdots}u^m.\end{aligned}\tag{*}$$

使用等式

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^nz^n+\cdots,\quad |z|<1.$$

那么表达式 (*) 取如下形式

$$u=(A_1t+A_2t^2+\cdots)+(B_0+B_1t+\cdots)u^2+\cdots.$$

其中一切系数都是整数. 我们来求出如下形式的函数 $u=u(t)$:

$$u=m_1t+m_2t^2+m_3t^3+\cdots.$$

那么, 系数 $m_1,m_2,m_3,\cdots$ 由下面的等式确定:

$$\begin{aligned}&m_1=A_1,\\&m_2=A_2+B_0m_1^2,\\&m_3=A_3+2B_0m_1m_2+B_1m_1^2,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

由此推出, 数 $m_1,m_2,m_3,\cdots$ 都是整数. ◀

特别地, 从上述定理推出, 函数

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

都不是代数函数.

问题 1. 设函数 $f(x,y)$ 定义在正方形 $K \subset \mathbb{R}^2$ 上, 并且对于每个固定的 y, 函数 $g(x) = f(x,y)$ 在每点 x 处都连续. 那么在正方形 K 内存在 $f(x,y)$ 作为二元函数的连续点.

2. 设函数 $f(x,y)$ 定义在 $\mathbb{R}^2$ 上, 且对于一个变量的每个固定的值, 它都是另一个变量的多项式. 那么函数 $f(x,y)$ 是两个变量的多项式.

3. 构作一个包含在 xOy 平面上的闭单位正方形内的闭集 A, 使它具有下述性质: 对于任何在轴 Ox 上的闭区间 $[0,1]$ 内的闭集 L, 在轴 Oy 上的闭区间 $[0,1]$ 内存在一点 y_L, 使 A 与水平直线 $y = y_L$ 的交集到 Ox 轴的投影恰为集合 L.

第二十五讲

§10. 隐函数组

我们来考察映射

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \cdots, f_m(\bar{x})).$$

设所有的函数 $f_1(\bar{x}), \cdots, f_m(\bar{x})$ 都在点 $\bar{a}$ 的 ε 邻域 $O(\bar{a}, \varepsilon)$ 内是光滑的. 那么, 这样的映射叫作是光滑的.

定义 20 设函数 $f_1(\bar{x}), \cdots, f_m(\bar{x})$ 皆在点 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ 处可微. 那么 m 行 n 列的矩阵

$$J = J_f = \left(\frac{\partial f_k(\bar{x})}{\partial x_s} \right)_{\substack{k=1,\cdots,m \\ s=1,\cdots,n}}$$

叫作映射 $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \cdots, f_m(\bar{x}))$ 的雅可比矩阵.

雅可比矩阵的行是函数 $f_k(\bar{x})$ 的梯度,$k = 1, \cdots, m$.

设 $m \leqslant n$. 我们考察矩阵 J 的随便不同的 m 列. 它们构成矩阵 J 的一个 $m \times m$ 阶的子矩阵 $J(k_1, \cdots, k_m)$, 其中 $k_1, \cdots, k_m$ 是所选出的列的号码.

定义 21 矩阵 $J(k_1, \cdots, k_m)$ 的行列式 H 称作是映射 $f(\bar{x})$ 的一个雅可比式,并记作

$$H = \frac{D(f_1, \cdots, f_m)}{D(x_{k_1}, \cdots, x_{k_m})}.$$

定义 22 可微映射 $f(\bar{x})$ 叫作是在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处非退化的，如果在此点处它有一个雅可比式异于零.

这意味着:

1) 矩阵 J 在此点处有最大的秩, 或者

2) 函数 $f_1(\bar{x}),\cdots,f_m(\bar{x})$ 的梯度在此点处线性无关.

定理 16 (隐函数组定理) 设 $n=m+p,p>0$. 此外,

1) 映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在点 $(\bar{a},\bar{b})$ 处非退化, 其中 $\bar{a}=(a_1,\cdots,a_p)$ 且 $\bar{b}=(b_1,\cdots,b_m)$, 而且 f 在点 $(\bar{x},\bar{y})=(\bar{a},\bar{b})$ 的某邻域 $\Omega=O((\bar{a},\bar{b}),\varepsilon)$ 内是光滑的;

2) $f(\bar{a},\bar{b})=\bar{0}$;

3) $H(\bar{y})=\dfrac{D(f_1,\cdots,f_m)}{D(y_1,\cdots,y_m)}\neq 0$.

那么, 在点 $\bar{a}$ 的某邻域 $O(\bar{a},\delta)=\Omega_1\subset\mathbb{R}^p$ 上存在唯一的光滑映射 $\varphi(\bar{x})=(\varphi_1(\bar{x}),\cdots,\varphi_m(\bar{x}))$ 其中 $\bar{x}=(x_1,\cdots,x_p)\in\Omega_1$, 具有下述性质:

1) $f(\bar{a},\varphi(\bar{a}))=\bar{0}$;

2) 对于一切 $\bar{x}\in\Omega_1$ 有 $f(\bar{x},\varphi(\bar{x}))=\bar{0}$;

3) $J_\varphi(\bar{x})=-A^{-1}B$, 其中 $A=J_f(\bar{y}),B=J_f(\bar{x})$.

这里 A 和 B 分别是雅可比矩阵 J_f 对应于变量 $y_1,\cdots,y_m$ 和 $x_1,\cdots,x_p$ 的两部分.

换个说法, 这个定理断言, 方程组

$$f_k(x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_m)=0,\quad k=1,\cdots,m$$

关于变量 $y_1,\cdots,y_m$ 有解, 它的解是变量 $x_1,\cdots,x_p$ 的函数 $y_1=\varphi_1(\bar{x}),\cdots,y_m=\varphi_m(\bar{x})$, 这些函数满足恒等式

$$f_k(\bar{x},\varphi(\bar{x}))=0,\quad \bar{x}\in\Omega_1\quad(\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)),$$

其中 Ω_1 是点 $\bar{a}$ 的某个邻域, 并且

a) $f(\bar{a},\varphi(\bar{a}))=\bar{0}$;

b) $f(\bar{x},\bar{y})$ 在点 $(\bar{a},\bar{b})$ 的某邻域内是满足条件

$$\frac{D(f_1,\cdots,f_m)}{D(y_1,\cdots,y_m)}\neq 0$$

的非退化光滑映射.

注 1. 第 3) 款中的矩阵等式确定了一切形如

$$\frac{\partial\varphi_k(\bar{x})}{\partial x_s},\quad k=1,\cdots,m,\quad s=1,\cdots,p$$

的偏导数.

2. 如果 $f(\bar{x})$ 是线性映射, 则定理的结论是线性代数中关于线性方程组的解的简单事实.

► 我们来证明定理, 考察矩阵 A 的雅可比式 $H(\bar{y})$. 把它按最后一列展开, 得

$$H(\bar{y}) = H_1\frac{\partial f_1}{\partial y_m} + H_2\frac{\partial f_2}{\partial y_m} + \cdots + H_m\frac{\partial f_m}{\partial y_m}.$$

由于 $H(\bar{y})$ 在点 $(\bar{a},\bar{b})$ 处不等于零, 所以矩阵 A 至少有一个子式不等于零. 不伤一般性, 可认为 $H_1 \neq 0$.

对于方程的个数 m 使用数学归纳法. 当 $m=1$ 时, 定理的结论已在上一节中证实. 假定定理的结论对于 $m-1$ 个方程成立. 我们来证明它对于 m 个方程也成立.

由于 $H_1 \neq 0$, 使用归纳假设于函数 $f_2(\bar{x},\bar{y}),\cdots,f_m(\bar{x},\bar{y})$, 得知存在函数

$$y_1 = \psi_1(\bar{x},y_m),\cdots,y_{m-1} = \psi_{m-1}(\bar{x},y_m)$$

对于点 $(\bar{a},b_m)$ 的某邻域 Ω_0 的一切点 $(\bar{x},y_m)$, 满足条件

$$f_k(\bar{x},\psi_1,\cdots,\psi_{m-1},y_m)=0,\quad k=2,\cdots,m.$$

现将 $\psi_1,\cdots,\psi_{m-1}$ 代入函数 $f_1(\bar{x},\bar{y})$. 那么

$$f_1(\bar{x},\psi_1(\bar{x},y_m),\cdots,\psi_{m-1}(\bar{x},y_m),y_m) = \Phi(\bar{x},y_m).$$

我们证明在点 $(\bar{a},b_m)$ 处 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_m}\neq 0$. 实际上

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial y_m} &= \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m},\\
0 &= \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_2}{\partial y_m},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= \frac{\partial f_m}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_m}{\partial y_m}.
\end{aligned}$$

把第一个方程乘以 H_1, 第二个乘以 H_2, 依此类推. 把所得的表达式加起来. 结果, 由于当 $k\neq m$ 时成立等式

$$\sum_{s=1}^{m} H_s\frac{\partial f_s}{\partial y_k} = 0$$

且当 $k=m$ 时, 此和等于 H, 那么就得到 $H_1\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_m} = H$. 由于 H和 H_1 都不等于零, 所以 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_m} = \dfrac{H}{H_1} \neq 0$.

于是, 根据隐函数定理, 存在唯一的函数 $y_m = \varphi_m(\bar{x})$ 使得在点 $\bar{a}$ 的某邻域 Ω 中 $f_1(\bar{x},\varphi(\bar{x}))\equiv 0$, 其中

$$\varphi_1(\bar{x}) = \psi_1(\bar{x},\varphi_m(\bar{x})),\cdots,\varphi_{m-1}(\bar{x}) = \psi_{m-1}(\bar{x},\varphi_m(\bar{x})).$$

当 $k=2,\cdots,m$ 时, 在区域 Ω 上有 $f_k(\bar{x},\varphi(\bar{x}))\equiv 0$.

根据一阶微分形式的不变性, 对于 $k=1,\cdots,m$ 有

$$0=df_k=\frac{\partial f_k}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial f_k}{\partial x_p}dx_p+\frac{\partial f_k}{\partial y_1}d\varphi_1(\bar{x})+\cdots+\frac{\partial f_k}{\partial y_m}d\varphi_m(\bar{x}).$$

此事用向量形式可表述成

$$Bd\bar{x}+Ad\varphi(\bar{x})=0,$$

其中

$$B=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial f_m}{\partial x_p}\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdots\dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}\cdots\dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}\end{pmatrix},$$

$$d\varphi(\bar{x})=\begin{pmatrix}d\varphi_1(\bar{x})\\ \vdots\\ d\varphi_m(\bar{x})\end{pmatrix},\qquad d\bar{x}=\begin{pmatrix}dx_1\\ \vdots\\ dx_p\end{pmatrix}.$$

由于成立等式

$$d\varphi(\overline{x})=J_\varphi(\overline{x})dx,$$

其中

$$J_\varphi(\overline{x})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_p}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_p}\end{pmatrix},$$

所以, 我们得到

$$AJ_\varphi(\bar{x})d\bar{x}+Bd\bar{x}=\bar{0},\ \text{即}\ \left(J_\varphi(\bar{x})+A^{-1}B\right)d\bar{x}=\bar{0}.$$

于是, 线性映射把任何向量 $d\bar{x}\in\mathbb{R}^p$ 都映成零向量. 因此, 它是零映射, 即 $J_\varphi(\bar{x})+A^{-1}B=\bar{0}$ 或 $J_\varphi(\bar{x})=-A^{-1}B$. ◀

推论 (逆映射定理) 设光滑映射 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 的一个邻域内给定且在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处非退化. 那么存在光滑逆映射 $\psi(\bar{y})=\varphi^{-1}(\bar{y})$ 定义在点 $\bar{b}=\varphi(\bar{a})$ 的某 δ 邻域内, 它使 $\psi(\varphi(\bar{x}))=\bar{x}$, 且映射 $\psi(\bar{y})$ 的雅可比矩阵 J_ψ 等于

$$J_\psi=J_\varphi^{-1}.$$

此定理是隐函数组定理的直接推论. 只需把等式 $\bar{y}-\varphi(\bar{x})=\bar{0}$ 写成隐函数组的形状:

$$f_1(\bar{x},\bar{y})=\varphi_1(\bar{x})-y_1=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(\bar{x},\bar{y})=\varphi_n(\bar{x})-y_n=0,$$

然后根据隐函数组定理通过 $\bar{y}$ 表示出 $\bar{x}$.

§11. 多变量函数的条件极值

定义 23 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域, $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 是定义在 Ω 上的光滑函数, $m<n$. 那么, 方程组 $\varphi_k(\bar{x})=0, k=1,\cdots,m$ 的解的集合 $\Omega_1\subset\Omega$ 叫作是由函数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 生成的流形.方程 $\varphi_k(\bar{x})=0$ 称作为流形 Ω_1 的条件方程.

定义 24 点 $\bar{a}$ 叫作是在流形 Ω_1 中的条件局部最大点, 如果在点 $\bar{a}$ 的某邻域内, 对于任何属于此邻域且属于流形 Ω_1 的点 $\bar{x}$ 都成立不等式 $f(\bar{x})<f(\bar{a})$.

条件局部最小点及条件局部极值点可类似地定义.

注 如果条件不存在, 则条件局部极值称作是无条件局部极值.

定义 25 点 $\bar{a}$ 叫作函数 f 的奇异点,若 $\mathrm{grad}f(\bar{a})=\bar{0}$, 而若 $\mathrm{grad}f(\bar{a})\neq\bar{0}$, 则叫作非奇异点.

定义 26 流形 Ω_1 叫作是非退化的,如果对于每点 $\bar{x}\in\Omega_1$ 梯度向量 $\Phi_s=\mathrm{grad}\varphi_s(\bar{x}), s=1,\cdots,m$, 都是线性无关的.

定理 17 (条件极值的必要条件) 若在非退化流形 Ω_1 中的非奇异点 $\bar{a}$ 处, 函数 $f(\bar{x})$ 取得条件极值, 那么向量 $\overline{F}=\mathrm{grad}(f(\bar{x}))$ 在点 $\bar{a}$ 处表达成诸梯度

$$\bar{\Phi}_1=\mathrm{grad}\varphi_1(\bar{x}),\cdots,\bar{\Phi}_m=\mathrm{grad}\varphi_m(\bar{x})$$

在该点处的值的线性组合, 也就是说, 存在实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 使得在点 $\bar{a}$ 处

$$\overline{F}=\lambda_1\bar{\Phi}_1+\cdots+\lambda_m\bar{\Phi}_m.$$

为了实际寻求条件极值, 此定理的结论可改述为如下形式.

推论 (拉格朗日乘子法) 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是独立的实变量. 考察拉格朗日函数

$$L(\bar{x},\bar{\lambda})=f(\bar{x})-\lambda_1\varphi_1(\bar{x})-\cdots-\lambda_m\varphi_m(\bar{x}).$$

为使函数 $f(\bar{x})$ 的非奇异点 $\bar{a}$ 是此函数在非退化流形 Ω_1 中的条件极值点, 必须对于某 $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0$ 成立等式

$$dL(\bar{x},\bar{\lambda})\Big|_{\bar{x}=\bar{a},\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0}=0,$$

也就是说, 函数 $L(\bar{x},\bar{\lambda})$ 关于变量 x_s 和 λ_r 的一切偏导数在点 $(\bar{x},\bar{\lambda})=(\bar{a},\bar{\lambda}_0)$ 处都等于零.

► 我们来证明此推论. 若让关于变量 λ_r 的偏导数都等于零, 则得到条件方程. 而若关于 $x_s, s=1,\cdots,n$, 求微分, 则得到把函数 $f(\bar{x})$ 的梯度表示成诸 $\varphi_r(\bar{x})$ 的梯度的线性组合的条件. 根据定理 17, 这就是必要条件. 推论获证.

证明定理的思想是, 寻找 $n-m$ 个线性无关的向量 $\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}^n$, 使得这些向量中的每个都同时垂直于向量 $\overline{F}$ 和向量 $\bar{\Phi}_1,\cdots,\bar{\Phi}_m$. 由此推出, 由这些向量的一切可能的线性组合所组成的线性空间 L 具有性质:$\overline{F}\perp L$ 且 $\bar{\Phi}_k\perp L, k=1,\cdots,m$. 空间 L 的正交补, 即空间 $L^\perp$, 由与 L 正交的一切向量 $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ 组成, 它包含向量 $\overline{F}$ 和 $\bar{\Phi}_1,\cdots,\bar{\Phi}_m$. 空间 $L^\perp$ 的维数等于 m. 由于 $\bar{\Phi}_1,\cdots,\bar{\Phi}_m$ 是线性无关的, 它们构成 $L^\perp$ 的基. 因此, 向量 $\overline{F}$ 是诸向量 $\bar{\Phi}_1,\cdots,\bar{\Phi}_m$ 的线性组合.

我们发现, 其实 L 是由位于每个曲面 $\varphi_s(\bar{x})=0$ 在点 $\bar{a}$ 处的切平面内的全体向量所组成的, $s=1,\cdots,m$.

于是, 剩下的事就是找出向量 $\bar{\alpha}_{m+1},\cdots,\bar{\alpha}_n\in L$①, 我们以如下的方式来选取这些向量. 不伤一般性, 可认为

$$\frac{D(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)}{D(x_1,\cdots,x_m)}\neq 0.$$

根据隐函数组定理, 在点 $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$ 的某 ε 邻域中, 存在 m 个光滑函数 $\psi_1(\bar{z}),\cdots,\psi_m(\bar{z})$, 其中 $\bar{z}=(x_{m+1},\cdots,x_n)$, 使得

$$\varphi_k(\psi_1(\bar{z}),\cdots,\psi_m(\bar{z}),\bar{z})\equiv 0,$$

同时

$$\varphi_k(\psi_1(\bar{z}_0),\cdots,\psi_m(\bar{z}_0),\bar{z}_0)=0,\quad (\psi_1(\bar{z}_0),\cdots,\psi_m(\bar{z}_0),\bar{z}_0)=\bar{a}.$$

设 $\bar{e}_r$ 是坐标轴 Ox_r 的方向向量, $r=m+1,\cdots,n$. 考察函数

$$h_{k,r}(t)=\varphi_k(\psi_1(\bar{z}_0+t\bar{e}_r),\cdots,\psi_m(\bar{z}_0+t\bar{e}_r),\bar{z}_0+t\bar{e}_r)\equiv 0,$$

其中 $k=1,\cdots,m$, 同时考察函数

$$h_{0,r}(t)=f(\psi_1(\bar{z}_0+t\bar{e}_r),\cdots,\psi_m(\bar{z}_0+t\bar{e}_r),\bar{z}_0+t\bar{e}_r).$$

①此处原文作 $\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_{n-m}\in L^\perp$. 原文中还把 $L^\perp$ 的维数写成 $n-m$. 还有其他诸如此类的疏漏 —— 译者注.

所有这些函数在点 $t=0$ 处的导数都等于零: 对于第一个到第 m 个函数, 这是因为它们根本就恒等于零, 而对于函数 $h_{0,r}(t)$, 则是因为点 $t=0$ 必是此函数的局部极值点.

根据关于复合函数的导数的定理来计算 $h'_{k,r}(t)\Big|_{t=0}$, 得

$$h'_{k,r}(t)\Big|_{t=0}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_r}+\cdots+\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_r}+\frac{\partial\psi_k}{\partial x_r},$$
$$h'_{0,r}(t)\Big|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_r}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_r}+\frac{\partial f}{\partial x_r},$$

其中 $k=1,\cdots,m;r=m+1,\cdots,n$. 于是得

$$h'_{k,r}(t)\Big|_{t=0}=(\bar{\Phi}_k,\bar{\alpha}_r)=0,\qquad h'_{o,r}(t)\Big|_{t=0}=(\overline{F},\bar{\alpha}_r)=0$$

这里

$$\bar{\alpha}_r=\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_r},\cdots,\frac{\partial\psi_m}{\partial x_r},0,\cdots,1,\cdots,0\right),$$

数 1 处于第 $m+r$ 位.

于是, 所有的向量 $\bar{\alpha}_{m+1},\cdots,\bar{\alpha}_n$ 与向量 $\overline{F},\bar{\Phi}_1,\cdots,\bar{\Phi}_m$ 中的每个都垂直, 这里根据流形 Ω_1 的非退化性诸向量 $\bar{\Phi}_1,\cdots,\bar{\Phi}_m$ 显然是线性无关的. ◄

§12. 可微映射. 雅可比矩阵

我们来证明, 映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 的雅可比矩阵具有与函数的导数相类似的某些重要性质.

定义 27 设映射 $\alpha:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 定义在点 $\bar{x}=\bar{0}$ 的某邻域中. 如果

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}}\frac{|\alpha(\bar{x})|}{|\bar{x}|}=0$$

则说 $\alpha(\bar{x})$ 是向量 $\bar{x}$ 的长度的高阶无穷小量, 记作

$$\alpha(\bar{x})=o(|\bar{x}|).$$

定义 28 称从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射 $l(\Delta\bar{x})$ 为映射 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处的微分, 如果

$$\Delta f(\bar{x})=l(\Delta\bar{x})+o(|\Delta\bar{x}|),$$

记作 $l(\Delta\bar{x})=df(\bar{x})\Big|_{\bar{x}=\bar{a},h=\Delta\bar{x}}$.

若映射在一点处存在微分, 则说它在**此点可微**. 映射的微分可用以下等式定义:

$$\lim_{\Delta\bar{x}\to\bar{0}}\frac{|\Delta f(\bar{x})-df(\bar{x})|}{|\Delta\bar{x}|}=0.$$

命题 4　若映射有微分, 则微分是单值确定的.

▶　设 $l_1(\Delta\bar{x})$ 和 $l_2(\Delta\bar{x})$ 都是映射 $f(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处的微分. 置 $l(\Delta\bar{x})=l_1(\Delta\bar{x})-l_2(\Delta\bar{x})$.

从三角形不等式得

$$|l(\Delta\bar{x})|\leqslant|\Delta f(\bar{x})-l_1(\Delta\bar{x})|+|\Delta f(\bar{x})-l_2(\Delta\bar{x})|.$$

根据映射的微分的定义, 由此式推出

$$\lim_{\Delta\bar{x}\to\bar{0}}\frac{|l(\Delta\bar{x})|}{|\Delta\bar{x}|}=0.$$

但由于映射 $l(\Delta\bar{x})$ 是线性的, 所以对于任何增量 $\Delta\bar{x}$ 有

$$\frac{|l(\Delta\bar{x})|}{|\Delta\bar{x}|}=\lim_{t\to 0}\frac{|l(t\Delta\bar{x})|}{|t\Delta\bar{x}|}=0.$$

可见, 映射 $l(\Delta\bar{x})$ 把整个线性空间映成零向量, 从而它是零映射, 而这就是所要证的. ◀

命题 5　设 $f(\bar{x})$ 是可微映射.那么成立等式

$$\Delta f(\bar{x})=J_f(\bar{a})\Delta\bar{x}+o(|\Delta\bar{x}|),$$

其中表达式 $J_f(\bar{a})\Delta\bar{x}$ 理解作雅可比矩阵 $J_f(\bar{a})$ 对向量 $\Delta\bar{x}$ 的乘积.

▶　证明是明显的. ◀

我们还引入映射的微分的某些性质, 这些性质都从定义直接推出.

1°　映射 $f(\bar{x})$ 有微分 $df(\bar{x})$, 当且仅当每个函数 $f_k(\bar{x})$ 都有微分 $df_k(\bar{x})$, 这里 $f(\bar{x})=(f_1(\bar{x}),\cdots,f_m(\bar{x}))$.

2°　若映射 $\bar{y}=g(\bar{x})$ 在点 $\bar{a}$ 处可微, 而映射 $f(\bar{y})$ 在点 $\bar{b}=g(\bar{a})$ 处可微, 且点 $\bar{a}$ 的某邻域在映射 g 之下的像包含在点 $\bar{b}$ 的某邻域中, 那么映射 $h(\bar{x})=f(g(\bar{x}))$ 在点 $\bar{a}$ 处可微, 且在点 $\bar{x}=\bar{a}$ 处成立

$$J_h(\bar{x})=J_f(g(\bar{x}))\cdot J_g(\bar{x}).$$

3°　在某球 $O(\bar{a},\varepsilon),\bar{a}\in\mathbb{R}^n,\varepsilon>0$, 内光滑的映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 必定在整个球 $O(\bar{a},\varepsilon)$ 内可微.

第三部分

函数级数与参变积分

近代数学课程的讲授有这样的一个趋势, 即把过分的抽象的叙述转化为丰富的具体内容. 这与过去的数学家的作法, 在一定程度上具有共同之处. 瓦莱–布散的《无穷小分析教程》就是一个把叙述的严密性与具体性以及与思想的明晰性相结合的例子, 此书在很多地方作出了典范. 本书的作者们力图把讲义的提纲挈领的简明叙述与可接受性及教科书的完整性结合起来. 另一方面, 教程力图把极限过程的作用贯穿于一切它可能出现的场合, 而作为表述对象的一个基本原则. 我们还要指出, 这一部分的材料反映了整个数学分析教程的最本质的基础内容. 这些内容联系于完成与两重极限概念相关联的某些极限过程, 以及这些极限过程的交换次序.

此处, 我们还要考虑一般理论在以下诸方面的应用: 对于无穷乘积以及无穷行列式, 欧拉积分的理论基础, 关于二体运动的开普勒问题以及贝塞尔函数, 反函数的拉格朗日公式, 广义泰勒公式, 泊松求和公式以及高斯和的精确计算. 理论的另一应用是, 拉普拉斯渐近方法的叙述以及周知的, 作复变函数论中的鞍点实插值方法的稳定位相法的叙述. 我们还注意到这种情况, 讲义中叙述应用材料的话, 其篇幅通常要超过单独包含课程的基础理论的讲义. 我们还将发现, 应用材料的选取的目的在于使大学生养成对客观事物的数学兴趣和爱好.

第十五章　数值级数

第一讲

§1. 收斂级数的基本性质. 柯西准则

数学分析教程的这部分包含三个大题目, 即:

1) 数值级数与函数级数;

2) 依赖于参数的积分;

3) 傅里叶级数和傅里叶积分.

第 3) 题目形式上应归属于前两个题目, 不过由于它的特殊的重要性和独特的固有性质传统上总把它另设一章.

数值级数的概念已在叙述数列的课题时顺带考虑过了. 现在我们来更详细地研究这个问题.

回忆一些基本的定义.

定义 1　*设 $\{a_n\}$ 是任意的一个实数列. 称形如*

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

的形式上的无穷和为数值级数或简称为级数.

通常使用简化的记号: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 或简化为 $\sum a_n$. 这里, 在求和号中自然参数

n 确定数列的项的号码. 对于固定的 n, 对应于它的项 a_n 叫作**级数的第 n 项**. 同时, 符号 a_n 作为自己的号码的函数叫作**级数!~ 的通项**. 代替字母 n 可以使用任何其他的字母来表示取自然数值的参数.

现考察由等式

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

给出的一个新的数列 $\{s_n\}$.

定义 2　数列 $\{s_n\}$ 叫作级数 $\sum a_n$ 的部分和数列,它的第 n 项叫作此级数的第 n 部分和.

定义 3　若级数 $\sum a_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛到 s, 即若 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, 则级数 $\sum a_n$ 叫作是收敛 (到 s) 的, 而数 s 叫作是它的和. 此时写:

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

而若数列 $\{s_n\}$ 没有极限, 则说级数 $\sum a_n$ 发散.

基本上我们将只对收敛级数感兴趣.

定义 4　若级数 $\sum a_n$ 收敛到数 s, 则差 $r_n = s - s_n$ 叫作级数的第 n 余项.

我们见到, 由于当 $n\to\infty$ 时 $s_n \to s$, 所以当 $n\to\infty$ 时 $r_n \to s - s = 0$.

对于所引入的定义和记号作一点修正. 若在数列 $\{a_n\}$ 中去掉前面的 m 项而剩下 $a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots$. 可把所剩的项看作一个新的数列 $\{b_n\}$, 其中 $b_n = a_{m+n}$. 以 b_n 为通项的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 有部分和

$$s'_n = b_1 + \cdots + b_n = a_{m+1} + \cdots + a_{m+n} = \sum_{k=1}^{n} a_{m+k} = \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k = s_{m+n} - s_m.$$

此外, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 作为形式上的无穷和, 可以写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n.$$

于是无穷和 $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n$ 可看作级数.

我们还将考察形如 $\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{n_s}$ 的级数, 其中 $\{n_s\}$ 是某个自然数的数列. 我们要研究这样的数列的收敛性.

命题 1　级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 的余项 r_n 可依下述意义表示成级数 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$:

1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$;

2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则此表示只具形式意义;

3) 不发生其他情形.

► 从第 3) 款开始证明. 当 $k > 1$ 时, 对于级数 $\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m$ 的部分和 s'_k 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和 s_{k+n} 成立等式 $s'_k = s_{k+n} - s_n$. 对于固定的 n, 数列 $\{s'_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{s_{k+n}\}_{k=1}^{\infty}$ 具有相同的收敛性和发散性. 这就表明第 3) 条结论成立.

在第 1) 种情形, 两级数同时收敛, 在等式 $s'_k = s_{k+n} - s_n$ 中令 $k \to \infty$ 而取极限. 那么得

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} s'_k = \lim_{k\to\infty} (s_{k+n} - s_n) = s - s_n = r_n.$$

从而结论 1) 获证.

至于结论 2), 应该看到, 形式的等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n}$$ [①]

可以看作是对于形式的数值级数的可能的一种运算的定义. 在引入类似的运算时, 只需限定等式的右边和左边当即使只有一边成立收敛性时, 转化成数值的等式. 实际上我们上面考察的情形正是如此. 命题 1 证毕. ◄

例 1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 且其和等于 1.

实际上, 我们有

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

当 $n \to \infty$ 时, 即 $s = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

2. 形如

$$a + aq + \cdots + aq^n + \cdots, \quad a \neq 0$$

的无穷几何级数的和.

当 $q = 1$ 时, 有 $s_n = na$, 从而级数发散. 当 $q \neq 1$ 时成立等式

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1})$$
$$= \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

---

① 原文等式最右端只有一项 "$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n}$" —— 译者注.

周知, 当 $|q|<1$ 时 $q^n\to 0$, 而当 $|q|\geqslant 1$ 时 $\{q^n\}$ 发散. 所以上述级数当 $|q|<1$ 时收敛到和 $s=\dfrac{a}{1-q}$, 而当 $|q|\geqslant 1, a\neq 0$ 时发散.

3. 调和级数 $\sum 1/n = 1+1/2+\cdots+1/n+\cdots$ 发散, 而当 $\alpha>1$ 时级数 $\sum 1/n^\alpha = 1+1/2^\alpha+\cdots+1/n^\alpha+\cdots$ 收敛.

首先我们看到, 级数之发散乃其部分和数列之发散故需证数列 $s_n=1+\cdots+1/n$ 发散. 为此只需证此数列无界.

对于 $n=2^k$ 有

$$\begin{aligned} s_n = s_{2^k} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\ &\quad +\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\geqslant 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k} \\ &= 1+\frac{k}{2}>\frac{k}{2}. \end{aligned}$$

由此推出, 无论数 $M>0$ 多大, 总存在号码 $n=2^k$ 使得 $s_n>k/2>M$. 为此只需选取自然数 $k>2M$. 换言之, 子列 $\{s_{2^k}\}$ 无界, 从而发散, 调和级数本身亦发散.

为证级数 $\sum 1/n^\alpha$ 收敛, 根据魏尔斯特拉斯定理, 只需证明它的部分和

$$t_n = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$$

是有界的, 这是因为部分和序列是单调增的. 考虑某满足条件 $n<2^k$ 的 k. 那么成立下述估计:

$$\begin{aligned} t_n < t_{2^k} &= 1+\frac{1}{2^\alpha}+\left(\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}\right)+\cdots \\ &\quad +\left(\frac{1}{(2^{k-1}+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{2^{k\alpha}}\right) \\ &\leqslant 1+1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\right)+\cdots \\ &\quad +\left(\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}}+\cdots+\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}}\right) \\ &= 1+1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{4}{2^{2\alpha}}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)\alpha}} \\ &< 1+\frac{1}{1-2^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

于是部分和数列 $\{t_n\}$ 有界, 从而原来级数收敛.

我们来建立收敛数列的一些最简单的性质.

命题 2 从无穷和中删除有限多项, 或对其添加有限多个新的被加项, 不影响级数的收敛性.

► 考虑删除被加项的情形, 因为第二种情形是类似的. 那么, 设从级数 $\sum a_n$ 中删除了具有号码 $n_1 < \cdots < n_k$ 的项把剩下的项依照它们从前的号码的递增顺序重新编号. 如此所得数列的通项记作 b_n. 那么对于任何 $m > n_k$ 有

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m-k} b_n + a_{n_1} + \cdots + a_{n_k}.$$

由此推出, 这两个级数的部分和数列 $s_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$ 和 s'_{m-k}① $= \sum\limits_{n=1}^{m-k} b_n = s_m - a_{n_1} - \cdots - a_{n_k}$ 同时收敛或同时发散. ◄

命题 3 若 $\sum a_n = s$ 且 $c \in \mathbb{R}$, 则 $\sum ca_n = cs$.

命题 4 若 $\sum a_n = s$ 且 $\sum b_n = t$, 则 $\sum(a_n + b_n) = s + t$.

命题 3 和命题 4 的证明是级数和的定义以及级数 $\sum a_n$ 和级数 $\sum b_n$ 的收敛的部分和数列 $\{s_n\}$ 和 $\{t_n\}$ 的算术性质的直接结果.

命题 5 (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum a_n$ 收敛, 则当 $n \to \infty$ 时 $a_n \to 0$. 换言之,$\{a_n\}$ 是无穷小数列.

由于 $a_n = s_n - s_{n-1}$ 故当 $n \to \infty$ 时,$a_n \to s - s = 0$, 此即所欲证者.

例 1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散, 因为 $a_n = (-1)^{n-1}$ 不趋于零. L. 欧拉赋予此级数以和 $\frac{1}{2}$. 尽管依我们的定义, 这是不对的, 但依处理问题的另一种更一般的观点, 欧拉的论断具有严格的数学意义. 这要说到发散级数求和问题的恰当而卓有成效的提出. 例如, 可以把定义在数列 $\{a_n\}$ 上的特殊的线性泛函数的值看作发散级数的和, 等等.

2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ 发散. 为证此结论, 只需认定等式 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0$ 不成立. 实际上, 假设当 $n \to \infty$ 时 $\sin n \to 0$. 那么由于

$$\sin n = \sin((n-1)+1) = \sin(n-1)\cos 1 + \sin 1 \cdot \cos(n-1),$$
$$\sin 1 \neq 0, \quad \cos 1 \neq 0.$$

在上式中过渡到极限, 得

$$\begin{aligned}0 = \lim_{n\to\infty} \sin n &= \cos 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \sin(n-1) + \sin 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \cos(n-1) \\ &= 0 + \sin 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \cos(n-1).\end{aligned}$$

由此得 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n-1) = 0$. 但在这种情况下, 当 $n \to \infty$ 时

$$1 = \sin^2 n + \cos^2 n \to 0 + 0 = 0,$$

①原文此处作 “s'_m”—— 译者注.

这是不可能的. 因此, 级数 $\sum \sin n$ 发散, 这就是要证的.

所考察的例子表明, 就连最简单的判别级数收敛性的条件, 对于研究级数的收敛性也是很有用的. 另一方面, 对于数列的收敛性的柯西准则也提供了对于数值级数的收敛性的相应的准则.

定理 1 (柯西准则) *级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要且充分的条件是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在号码 $n_0 = n_0(\varepsilon)$, 使得对于任何自然数 p 以及一切 $n > n_0(\varepsilon)$, 成立不等式*

$$|s_{n+p} - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

定理的论断与对于级数的部分和数列 $\{s_n\}$ 的收敛性的柯西准则等价. 根据定义, 部分和数列的收敛性就是级数自身的收敛性.

定理 1 可以用直接的形式改述为级数发散的准则.

定理 2 (级数发散的柯西准则) *级数 $\sum a_n$ 发散的必要且充分的条件是, 存在一个 $\varepsilon > 0$, 使得对于任何 $n_0 \geqslant 1$ 都找得到自然数 $n > n_0$ 和自然数 p, 满足下面的不等式*

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \geqslant \varepsilon.$$

定义 5 *任何形如 $s_{n+p} - s_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k$ 的表达式都叫作级数 $\sum a_n$ 的一段.*

例 1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n^2}$ 收敛.

使用定理 1 证明这个论断. 我们有

$$\begin{aligned}|s_{n+p} - s_n| &= \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &\leqslant \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

所需的不等式 $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ 成立, 如果, 譬如说, $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 亦即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. 置 $n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. 则 $n_0(\varepsilon) > 1/\varepsilon$ 且对于任意的自然数 $n > n_0(\varepsilon)$ 和任意的自然数 p, 成立不等式

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0(\varepsilon)} < \varepsilon, \quad |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon.$$

因此, 根据定理 1, 级数收敛.

2. 调和级数 $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ 发散. 使用定理 2, 对于一切 n 和 $p = n$ 有

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

于是, 若令 $\varepsilon = 1/2$ 并且对于任何 $n_0 \geqslant 1$, 作为 n 和 p 取数 $n = p = n_0$ 则定理 2 的条件成立. 因此断定级数发散.

3. 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = \frac{1}{2 \ln 2} + \cdots + \frac{1}{n \ln n} + \cdots$$

发散. 实际上, 对于任何自然数 k 皆有

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n \ln n} \geqslant \frac{2^k}{2^{k+1}(k+1)\ln 2} = \frac{1}{2(k+1)\ln 2}.$$

因此, 对于 $k \geqslant 1$ 我们得到

$$S_{2^{2k}} - S_{2^k} \geqslant \frac{1}{2(k+1)\ln 2} + \cdots + \frac{1}{4k \ln 2} > \frac{k}{4k \ln 2} = \frac{1}{4 \ln 2}.$$

置 $\varepsilon = \dfrac{1}{4 \ln 2}$. 那么, 作为 n 和 $n + p$ 取数 $n = 2^k$ 且 $n + p = 2^{2k}$, 则对于任意的 $k \geqslant 1$ 成立定理 2 的条件. 这就表明所给的级数发散.

我们再次提起注意于在级数的收敛性的定理和数列的收敛性的定理之间的紧密联系. 我们还明确, 任何级数都产生一个部分和数列, 它决定级数的收敛性. 反过来的结果也成立, 就是说: 任何数列都可以看作是某个级数的部分和数列. 实际上, 如果 $\{b_n\}$ 是某个数列, 那么可将它联系于级数 $\sum a_n$, 其中 $a_1 = b_1$, 且对于 $n \geqslant 1, a_{n+1} = b_{n+1} - b_n$.

第二讲

§2. 非负项级数

定义 6 级数 $\sum a_n$ 叫作非负项级数, 如果对于一切 n 有 $a_n \geqslant 0$.

非负项级数是一种最简单的类型的级数. 人们常通过非负项级数的性质来研究一般类型的级数. 因此, 级数理论的展开通常总是从非负项级数的研究开始. 对于这种级数的一般项, 我们将特别地使用记号 p_n(代替 a_n). 基本上我们将只对这种级数的收敛问题感兴趣.

定理 3 非负项级数 $\sum p_n$ 收敛的必要且充分的条件是它的部分和数列有界.

► 设 s_n 是级数 $\sum p_n$ 的第 n 部分和. 由于 $p_n \geqslant 0$, 所以数列 $\{s_n\}$ 不减. 于是, 所要的结论从魏尔斯特拉斯关于单调数列收敛的准则推出. ◄

例 设 b_n 是正的,$\{b_n\}$ 不减且趋于 $+\infty$. 那么级数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散, 而级数 $\sum(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})$ 收敛.

实际上, 对于这两级数的部分和 s_n 和 t_n, 有

$$s_n = b_{n+1} - b_1 \to +\infty, t_n = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}} < \frac{1}{b_1}.$$

于是所需的结果从定理 3 推出.

定理 4 (比较判别法) 设 $\sum p_n$ 和 $\sum q_n$ 是两个非负项级数, 并设从某号码 n_0 开始, 对于一切 $n \geqslant n_0$ 有 $0 \leqslant q_n \leqslant p_n$.

那么:

a) 级数 $\sum p_n$ 收敛蕴含级数 $\sum q_n$ 收敛;

b) 级数 $\sum q_n$ 发散蕴含级数 $\sum p_n$ 发散.

► 不伤害收敛性, 可以抛弃每个级数的前 n_0 项. 对于一切 $n > n_0$, 令

$$s_n = \sum_{m=n_0+1}^{n} p_m, \quad t_n = \sum_{m=n_0+1}^{n} q_m.$$

那么, 对于任何 $n > n_0$ 皆有 $0 \leqslant t_n \leqslant s_n$. 在情形 a), 数列 $\{s_n\}$ 有界, 所以 $\{t_n\}$ 也有界, 于是级数 $\sum q_n$ 收敛. 在情形 b), 数列 $t_n \to +\infty$, 因此 $s_n \to +\infty$, 于是级数 $\sum p_n$ 发散. ◄

定义 7 定理 4 中的级数 $\sum p_n$ 叫作级数 $\sum q_n$ 的强级数, 而级数 $\sum q_n$ 叫作级数 $\sum p_n$ 的弱级数. 也说级数 $\sum p_n$ 强过级数 $\sum q_n$, 而后者弱于前者.

对于非负数列也有类似的定义.

应用比较判别法的方案是选择适当的强级数以证明级数收敛, 或选择适当的弱级数以证明级数发散. 通常作为强级数和弱级数的是通项比所考虑的级数来得简单的级数, 或人所共知的例如调和级数, 几何级数等等.

例 (柯西缺项判别法) 若非负数列 $\{p_n\}$ 不增, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n p_{2^n}$ 同收敛或同发散.

► 由于 $p_n \geqslant 0$ 所以级数 $\sum p_n$ 的部分和数列不减, 而且它的任何子列 $\{s_{n_k}\}$ 都与 $\{s_n\}$ 同收敛或同发散. 对于任意的自然数 n, 存在整数 k 满足条件 $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$.

对于这样的 n 和 k 我们定义 $b_n = p_{2^k}$. 那么根据条件, 成立不等式

$$b_n = p_{2^k} \leqslant p_n \leqslant p_{2^{k-1}} = b_{n-1},$$
$$2^{k-1}p_{2^k} \leqslant p_{2^{k-1}+1} + \cdots + p_{2^k} \leqslant 2^{k-1}p_{2^{k-1}}.$$

因此, 对于级数 $\sum b_n$ 的部分和 $\sigma_{2^{k-1}}$ 和 σ_{2^k}, 有

$$\sigma_{2^k} = \sum_{n=1}^{2^k} b_n = \sum_{m=1}^{k} 2^{m-1}p_{2^m} \leqslant \sum_{n=1}^{2^k} p_n$$
$$= s_{2^k} \leqslant 2\sum_{n=1}^{2^{k-1}} 2^m p_{2^m} = 2\sigma_{2^{k-1}}.$$

这表明,$\{\sigma_{2^k}\}$ 是 $\{s_{2^k}\}$ 的弱数列而 $\{2\sigma_{2^{k-1}}\}$ 是 $\{s_{2^k}\}$ 的强数列. 于是级数 $\sum p_n$ 和 $\sum 2^k p_{2^k}$ 同收敛或同发散, 这就是上面所断言的. ◄

比较判别法的思想可用来导出一些其他的类似的有用的命题. 下面的定理就属于此类.

定理 5 (广义比较判别法) 若在定理 4 条件中, 把不等式 $q_n \leqslant p_n$ 换成不等式 $\frac{q_{n+1}}{q_n} \leqslant \frac{p_{n+1}}{p_n}$, 则定理的结论依然成立.

► 由于抛弃级数开头的有限项不影响其收敛性, 所以从一开始就可认为 $n_0 = 1$. 把定理条件中的全部不等式连乘至号码 n, 就得到不等式

$$\frac{q_n}{q_1} \leqslant \frac{p_n}{p_1}, \qquad q_n p_1 \leqslant p_n q_1.$$

使用定理 4, 得到关于级数 $p_1\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 和级数 $q_1\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 的所需的结果. 而用同一个异于零的数遍乘级数的每一项, 不影响级数的收敛性, 所以这就完全证明了定理 5. ◄

定理 6 (达朗贝尔判别法) 设对于级数 $\sum p_n$ 的项, 从某个号码 n_0 开始成立条件

1) $p_n > 0$;

2) $D_n = \frac{p_{n+1}}{p_n} \leqslant q$, 其中 $0 < q < 1$.

那么级数收敛. 而若对一切 $n \geqslant n_0$, 代替不等式 2) 而成立 $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant 1$, 则级数发散.

► 1) 把级数 $\sum p_n$ 与收敛级数 $\sum b_n$ 相比较, 其中 $b_n = q^n$. 对于 $n > n_0$ 有

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leqslant q = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

因此, 定理 6 的第一个结论从定理 5 推出.

2) 在第二种情形, 应对于一切 n 都令 $b_n = 1$. 那么根据级数 $\sum b_n$ 的发散性和不等式

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant 1 = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

从同一个定理 5 推出级数 $\sum p_n$ 发散. ◀

定理 7 (极限形式的达朗贝尔判别法) 考察级数 $\sum p_n$. 设对于一切 n 有 $p_n > 0$. 令

$$q = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_{n+1}}{p_n}, \quad r = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_{n+1}}{p_n}.$$

那么, 当 $q < 1$ 时级数 $\sum p_n$ 收敛, 而当 $r > 1$ 时它发散.

我们证得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\geqslant m} a_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant m} a_n.$$

► 先考虑收敛的情形. 令 $q_1 = \dfrac{q+1}{2}$. 那么 $q < q_1 < 1$. 由于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{p_{n+1}}{p_n} = q$, 所以对于某 n_0 有

$$\sup_{n\geqslant n_0} \frac{p_{n+1}}{p_n} < q_1 < 1.$$

因此, 根据定理 6 的第一个结论, 级数 $\sum p_n$ 收敛.

现考虑发散的情形. 令 $r_1 = \dfrac{r+1}{2}$. 那么 $r > r_1 > 1$. 由于 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{p_{n+1}}{p_n} = r$, 所以对于某 n_1 有

$$\inf_{n\geqslant n_1} \frac{p_{n+1}}{p_n} > r_1 > 1.$$

于是, 根据定理 6 的第二个结论, 级数 $\sum p_n$ 发散. ◀

注 在定理 6 和定理 7 中, 当 $q = 1$ 时, 级数 $\sum p_n$ 的收敛问题没有定论. 级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 和 $\sum \frac{1}{n}$ 就是例子. 前一个收敛而后一个发散. 在两种情况皆有 $q = 1$. 为了研究类似的级数的收敛性, 需要更为"精细" 的判别法. 后面将考察这样的判别法.

下述定理给出了一个更为"精细" 的判别法.

定理 8 (柯西判别法) 若非负项级数 $\sum p_n$ 的项从某号码 n_0 开始成立不等式 $p_n^{\frac{1}{n}} \leqslant q$, 其中 $q < 1$ 是固定的, 那么级数 $\sum p_n$ 收敛.

而若对于无穷多个 n 有 $p_n^{\frac{1}{n}} \geqslant 1$, 则此级数发散.

► 先考虑第一种情形. 那么 $p_n^{\frac{1}{n}} \leqslant q, p_n \leqslant q^n$. 由于 $q < 1$, 所以, 与级数 $\sum q^n$ 比较而知级数 $\sum p_n$ 收敛.

在第二种情形, 对于无穷多个 n 的值有 $p_n \geqslant 1$. 这表明 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n \neq 0$. 于是级数收敛的必要条件 (当 $n \to \infty$ 时 $p_n \to 0$) 不成立. 从而级数 $\sum p_n$ 发散. ◀

定理 9 (极限形式的柯西判别法)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ p_n^{\frac{1}{n}} = q,$$

其中对于一切 $n, p_n \geqslant 0$. 那么当 $q < 1$ 时级数 $\sum p_n$ 收敛, 而当 $q > 1$ 时 $\sum p_n$ 发散.

► 先假定 $q < 1$ 并令 $q_1 = \dfrac{q+1}{2}$. 那么对于某号码 $n_0 > 1$ 有

$$\sup_{n\geqslant n_0}\ p_n^{\frac{1}{n}} < q_1 < 1.$$

因此, 根据柯西判别法的第一种情形, 级数 $\sum p_n$ 收敛.

而若 $q > 1$, 则对于一切 $n_1 \geqslant 1$ 有估计式

$$\sup_{n\geqslant n_1}\ p_n^{\frac{1}{n}} > \frac{q+1}{2} > 1.$$

这表明存在无穷多个 n 的值, 使不等式 $p_n^{\frac{1}{n}} > 1$ 成立. 因此, 根据柯西判别法的第二种情形, 级数 $\sum p_n$ 发散. ◄

柯西判别法, 与达朗贝尔判别法一样, 也是很粗糙的. 例如, 它也解决不了级数 $\sum \dfrac{1}{n}$ 和 $\sum \dfrac{1}{n^2}$ 的收敛性的问题. 但它毕竟比达朗贝尔判别法更精细些或者说更强一些, 因为可以找出使柯西判别法适用而达朗贝尔判别法无效的级数, 但反之不然. 确切地说, 如果级数 $\sum p_n$ 关于某 q 和 n_0 满足达朗贝尔判别法的条件, 则它关于同一 q 和某适当的 n_0 亦满足柯西判别法的条件.

第三讲

§3. 非负项级数收敛的基本判别法

前面所讲的级数收敛判别法, 都是最简单的并且是构作更精细的收敛判别法的出发点. 例如, 拉比[①]判别法就是一个精细得多的判别法.

定理 10 (拉比判别法) 1. 若对于从某一值 n_0 开始的一切 n 以及某个 $\alpha > 1$ 成立不等式

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n},$$

则级数 $\sum p_n$ 收敛.

[①] Raabe, Joseph Ludwig (1801—1859), 瑞士人 —— 译者注.

2. 若从某 n_1 开始, 成立不等式

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n},$$

则级数 $\sum p_n$ 发散.

► 1. 使用定理 5. 考虑辅助级数 $\sum \frac{1}{n^\beta}$, 其中 $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$, $\alpha > \beta > 1$. 此级数收敛 (见 §1 命题 1 的例 3). 将其通项记作 $q_n = \frac{1}{n^\beta}$. 那么当 $n \to \infty$ 有

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

但因 $\alpha > \beta$, 故对于充分大的 n, 即对于某 n_1 当 $n > n_1$ 时有

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{n} \geqslant \frac{p_{n+1}}{p_n}.$$

据此, 对于级数 $\sum p_n$, 定理 5 的条件满足, 从而它收敛.

2. 对于 $n \geqslant 2$ 置 $b_n = \frac{1}{n-1}$ 并令 $b_1 = 1$. 第 2 款中的不等式对于 $n \geqslant 2$ 可写成

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} > \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

由于级数 $\sum b_n$ 发散 (它就是调和级数), 所以根据定理 5 的第二个结论, 级数 $\sum p_n$ 也发散. ◄

定理 11 (极限形式的拉比判别法) 设对于一切 n 有 $p_n > 0$, 且存在极限

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{p_{n-1}}{p_n}\right) = l.$$

那么当 $l > 1$ 时级数 $\sum p_n$ 收敛, 而当 $l < 1$ 时 $\sum p_n$ 发散.

此定理从定理 10 推出, 就像定理 9 从定理 8 推出或定理 7 从定理 6 推出一样.

定理 12 (库默尔[①] 判别法) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 是两个正数列.

1) 若存在 $\alpha > 0$ 和号码 n_0, 使得对于一切 $n > n_0$ 有

$$c_n - c_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha,$$

则级数 $\sum a_n$ 收敛.

2) 若存在数 n_0 使得对于一切 $n \geqslant n_0$ 成立不等式

$$c_n - c_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 0,$$

而且级数 $\sum \frac{1}{c_n}$ 发散, 那么级数 $\sum a_n$ 也发散.

[①] Kummer, Ernst Edward (1810—1893) 德国人 —— 译者注.

在证明定理之前, 我们先注意此定理的显著特点: 关于收敛性的结论是对一个级数 $\sum a_n$ 作出的, 而同时第二个数列 $\{c_n\}$ 是不固定的, 这就使我们能在应用库默尔判别法来研究具体的数值级数的收敛性时来根据各种情况作出不同的选择.

► 不伤一般性, 可认为 $n_0 = 1$, 因为号码为 $n < n_0$ 的项显然可以删除.

1) 我们有

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geqslant \alpha a_n.$$

把此式对于 $n = 1, 2, \cdots, m$ 加起来, 得

$$c_1 a_1 - c_{m+1} a_{m+1} \geqslant \alpha(a_1 + \cdots + a_m),$$

由此

$$s_m = a_1 + \cdots + a_m \leqslant \frac{c_1 a_1 - c_{m+1} a_{m+1}}{\alpha} < \frac{c_1 a_1}{\alpha}.$$

这表明级数 $\sum a_n$ 的一切部分和的集合是有界的, 从而根据定理 3, 此级数收敛.

2) 不等式可改写成

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}.$$

但因按条件级数 $\sum \frac{1}{c_n}$ 发散, 故根据定理 5 级数 $\sum a_n$ 亦发散. ◄

我们来看定理 12 的几个推论.

推论 1 对于一切 n 皆令 $c_n = 1$. 则级数 $\sum a_n$ 收敛的条件成为

$$1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha \quad \text{或} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \alpha.$$

在这种情况下, 对于发散性的条件是

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \geqslant 0 \quad \text{或} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1.$$

推论 2 令 $c_n = n - 1$. 那么当条件

$$n - 1 - n\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \alpha, \quad \text{即} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{\alpha + 1}{n}$$

成立时级数 $\sum a_n$ 收敛. 而在条件

$$n\frac{a_{n+1}}{a_n} - (n-1) \geqslant 0 \quad \text{即} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}$$

级数 $\sum a_n$ 发散.

换言之, 我们得到了拉比判别法.

推论 3 (贝特朗判别法) 1. 正项级数 $\sum a_n$ 收敛, 如果存在 $\alpha>0$ 和号码 n_0, 使得对于一切 $n>n_0$ 成立不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1+\alpha}{n\ln\ n}.$$

2. 正项级数 $\sum a_n$ 发散, 如果对于一切足够大的 n 都成立不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln\ n}.$$

► 1. 在库默尔判别法中取

$$c_n=(n-1)\ln(n-1)\qquad (n>2).$$

那么此判别法中的收敛条件成为:

$$(n-1)\ln(n-1)-n\ln\ n\quad\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\alpha,$$

即

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1-\frac{1}{n}+\frac{(n-1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\ln\ n}-\frac{\alpha}{n\ln\ n}. \tag{*}$$

进而由于

$$(n-1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}>-1,$$

不等式 (*) 从下面的不等式推出:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1+\alpha}{n\ln\ n}\leqslant 1-\frac{1}{n}+\frac{(n-1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\ln\ n}-\frac{\alpha}{n\ln\ n}.$$

这就是说, 贝特朗判别法的收敛条件蕴含着库默尔判别法的收敛条件.

于是, 对于级数的收敛性的贝特朗判别法获得证明.

2. 在库默尔判别法中令 $c_n=(n-2)\ln(n-1)$. 那么级数 $\sum a_n$ 发散, 如果下面的不等式成立的话:

$$(n-1)\ln\ n\frac{a_{n+1}}{a_n}-(n-2)\ln(n-1)\geqslant 0.$$

只需证明此不等式是贝特朗判别法中发散条件

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln\ n}$$

的推论就可以了. 也就是说, 只需证明对于一切大于某 n_0 的 n 成立

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln\ n}\geqslant\frac{n-2}{n-1}\quad\frac{\ln(n-1)}{\ln\ n}.$$

然而此式从下面的一串不等式推出 $(n \geqslant 3)$:

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) < -\frac{1}{n},$$

$$1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n\ln\, n} \geqslant \left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n\ln\, n}\right)$$

$$\geqslant \left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln\, n}\right) = \frac{n-2}{n-1}\frac{\ln(n-1)}{\ln\, n}. \quad ◀$$

高斯判别法是达朗贝尔判别法, 拉比判别法以及贝特朗判别法的推论.

定理 13 (高斯判别法) 若对一切自然数 n 皆有 $a_n > 0, \varepsilon > 0$ 是一个常数, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O(n^{-1-\varepsilon}),$$

那么:

1) 级数 $\sum a_n$ 当 $\lambda > 1$ 时收敛而当 $\lambda < 1$ 时发散;

2) 若 $\lambda = 1$ 则级数当 $\mu > 1$ 时收敛而当 $\mu \leqslant 1$ 时发散.

► 1) 当 $n \to \infty$ 时 $D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \dfrac{1}{\lambda}$. 所以根据定理 7, 级数 $\sum a_n$ 当 $\lambda > 1$ 时收敛而当 $\lambda < 1$ 时发散. 这就是第 1) 款的结论.

2) 若 $\lambda = 1$ 且 $\mu \neq 1$, 则 $B_n = n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \to \mu$. 所以, 根据定理 2 的注, 当 $\mu > 1$ 时级数收敛而当 $\mu < 1$ 时级数发散. 而若 $\lambda = \mu = 1$, 则对于某 $\varepsilon_0 > 0$, 当 $n \to \infty$ 时有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + O(n^{-1-\varepsilon_0}).$$

但是由于 $\ln\, n = o(n^{\varepsilon_0})$, 所以对于一切足够大的 n 成立不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + O(n^{-1-\varepsilon_0}) > 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\ln\, n}.$$

于是, 当 $\lambda = \mu = 1$ 时, 根据贝特朗判别法, 级数 $\sum a_n$ 发散. ◀

把上面所得的结果组合起来, 重新运用本质上与上面一样的论证, 可以得到越来越精细和越来越复杂的收敛判别法. 但是在实践中, 真正有用的却是一个简单得多并且有效得多的级数收敛判别法, 那就是柯西 - 麦克劳林积分判别法. 现在我们就来证明这个判别法.

定理 14 (柯西–麦克劳林积分判别法) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上定义且单调减. 那么:

1) 如果对于一切 $n \geqslant n_0$ 有 $0 \leqslant p_n \leqslant f(n)$ 而且反常积分 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 收敛, 那么级数 $\sum p_n$ 也收敛;

2) 如果对于一切 $n \geqslant n_0$ 有 $p_n \geqslant f(n) \geqslant 0$ 而且反常积分 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 发散, 那么级数 $\sum p_n$ 也发散.

► 和前面一样, 无伤一般性可认为 $n_0 = 1$. 由于函数 $f(x)$ 单调减, 对于任何自然数 k 以及 $k \leqslant x \leqslant k+1$ 都有

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1).$$

在所述区间上积分此不等式, 得

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k)dx \geqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \geqslant \int_k^{k+1} f(k+1)dx = f(k+1).$$

对于任意的 $n \geqslant 2$, 把这些不等式关于 k 从 1 到 $n-1$ 加起来. 得

$$s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geqslant \int_1^n f(x)dx \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = s_n - f(1).$$

分别考察两种情形.

1. 此时积分 $I = \int_1^{\infty} f(x)dx$ 收敛. 因此, 对于级数 $\sum f(n)$ 的部分和 s_n, 当 $n \geqslant 2$ 时成立同一形式的估计式 $s_n \leqslant I + f(1)$. 而由于对于一切自然数 $n, f(n) \geqslant 0$, 所以级数 $\sum f(n)$ 收敛. 从而被它控制的级数 $\sum p_n$ 也收敛, 这就是要证的.

2. 此时积分 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 发散, 当 $n \to \infty$ 时 $\int_1^n f(x)dx \to \infty$. 但由于

$$s_n \geqslant s_{n-1} \geqslant \int_1^n f(x)dx,$$

所以当 $n \to \infty$ 时 $s_n \to +\infty$. 这表明级数 $\sum f(n)$ 发散. 面根据所给的条件, 级数 $\sum p_n$ 是 $\sum f(n)$ 的控制级数, 所以级数 $\sum p_n$ 亦发散. ◄

注 显然, 在定理 13 的条件中, 积分 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 可换为积分 $\int_a^{\infty} f(x)dx$, 其中 $a > 1$ 是一个任意的数.

我们来看从积分判别法推出的一些推论.

1. 早已证明, 当 $s > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 收敛. 它的和用 $\zeta(s)$ 表示, 叫作“黎曼的 ζ 函数”(“ζ” 读作汉语拼音 ceita), 我们引入此级数收敛性的另一证明. 实际上, 对于这样的 s 值, 反常积分 $\int_1^{\infty} x^{-s}dx$ 收敛且易于计算. 我们有

$$\int_1^{\infty} x^{-s}dx = \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_1^{\infty} = \frac{1}{s-1}.$$

因此, 根据定理 14, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 也收敛. 这就是要证明的. 而若 $s \leqslant 1$, 则积分 $\int_1^{\infty} x^{-s}dx$ 发散, 从面级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 也一道发散.

注 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 对于某些 s 值, 最先为 L. 欧拉所研究. 而且对于等于偶自然数的 s, 欧拉找到了和 $\zeta(s)$ 的精确值. 其后,B. 黎曼对于自变量 s 的一切值, 除了点 $s=1$ 外, 不仅包括实数值而且也包括复数值, 定义了函数 $\zeta(s)$. 他仔细地研究了这个函数的性质. 正是因此, 这个函数以他的名字命名. 黎曼的 ζ 函数在数论中起着巨大的作用. 关于这个函数的某些性质, 黎曼曾提出一系列的猜测. 这些猜测都已被证明, 只是除了一个以外, 这就是黎曼关于 ζ 函数的零点的猜测. 当今这个猜测是一个最著名的数学问题.

2. 瓦莱布散证明 [35], 当 $s>1$ 时成立等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^s}+\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}}-\frac{1}{n^{s-1}}\right)\right], \tag{$*$}$$

而且右端的级数当 $s>0$ 时收敛. 实际上这个级数的通项可写成

$$0<p_n=\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx\leqslant\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}.$$

因此, 级数 $\sum p_n$ 当 $s>0$ 时收敛. 当 $s>1$ 时, 只要打开 $(*)$ 右端的括号, 并使用等式

$$-\frac{1}{s-1}=\frac{1}{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}}-\frac{1}{n^{s-1}}\right)$$

我们就得到等式 $(*)$.

3. 凭靠积分判别法,我们来研究级数$\sum p_n$的收敛性,其中$p_n=\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

我们有

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=-\int_2^{\infty}d\left(\frac{1}{\ln\ x}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

可见反常积分收敛. 因此级数 $\sum p_n$ 也收敛.

第四讲

§4. 级数的绝对收敛和条件收敛. 莱布尼茨级数

我们来继续研究一般形状的数值级数.

定义 8 级数 $\sum a_n$ 叫作是绝对收敛的, 如果级数 $\sum|a_n|$ 收敛.

任何收敛的非负项的级数都是绝对收敛的. 同时, 容易构作出收敛的级数, 使它不是绝对收敛的. 作为例子, 可引入下列级数:

$$-1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\cdots.$$

它的和等于零, 而同时, 由它的项的绝对值组成的级数是发散的, 因为调和级数是发散的.

定义 9 收敛的级数 $\sum a_n$ 叫作是条件收敛的, 如果级数 $\sum |a_n|$ 发散.

根据这个定义, 上面哪个级数是条件收敛的. 我们指出, 谈及绝对 (或条件) 收敛的级数, 也说级数绝对 (或条件) 收敛.

下述定理确定所引入的概念是合理的.

定理 15 若级数 $\sum a_n$ 绝对收敛, 则它收敛.

► 根据柯西准则, 由级数 $\sum |a_n|$ 的收敛性推出, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 找得到 $n_0(\varepsilon)$, 使得对于一切 $p \geqslant 1$ 和 $n > n_0(\varepsilon)$

$$\sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m| < \varepsilon,$$

由此

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \leqslant \sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m| < \varepsilon.$$

而这就表明柯西准则成立. ◄

定义 10 数值级数 $\sum a_n$ 叫作交错级数, 如果它的相邻的项取相异的符号.

定义 11 交错级数 $\sum a_n$ 叫作是莱布尼茨级数, 如果它的项的绝对值 $|a_n|$ 单调趋于零.

定理 16 任何莱布尼茨级数都收敛.

► 先证明, 此级数之任何一段皆被其第一项控制. 设 $\sum\limits_{m=n+1}^{n+p} a_m$ 是级数的某一段. 我们要证不等式

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \leqslant |a_{n+1}|.$$

对于一切 $k \in \mathbb{N}$, 令 $b_k = |a_k|$. 那么

$$|a_k + a_{k+1}| = |a_k| - |a_{k+1}| = b_k - b_{k+1} < b_k.$$

此外, 对于一切 k, 数 $b_k - b_{k+1}$ 皆取同样的符号. 因此对于偶数 $p = 2r$ 有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+2r-1} + a_{n+2r}| \\ &= (b_{n+1} - b_{n+2}) + \cdots + (b_{n+2r-1} - b_{n+2r}) \\ &= b_{n+1} - (b_{n+2} - b_{n+3}) - \cdots - (b_{n+2r-2} - b_{n+2r-1}) - b_{n+2r} \\ &\leqslant b_{n+1} = |a_{n+1}|. \end{aligned}$$

而当 $p = 2r+1$ 时

$$0 \leqslant |a_{n+1} + \cdots + a_{n+2r+1}| = (b_{n+1} - b_{n+2}) + \cdots + (b_{n+2r-1} - b_{n+2r}) + b_{n+2r+1}$$
$$= b_{n+1} - (b_{n+2} - b_{n+3}) - \cdots - (b_{n+2r} - b_{n+2r+1})$$
$$\leqslant b_{n+1} = |a_{n+1}|.$$

于是在两种情况下都成立

$$T_{n,p} := \left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \leqslant |a_{n+1}| = b_{n+1}.$$

但因 $b_{n+1} \to 0$, 对于事先给定的 $\varepsilon > 0$ 和足够大的 n 有

$$T_{n,p} \leqslant b_{n+1} < \varepsilon.$$

由此, 根据 p 的任意性, 从柯西准则出发, 断定级数 $\sum a_n$ 收敛. ◄

定理 17 (莱布尼茨级数的余项的估计) 对于莱布尼茨级数 $\sum a_n$ 的余项 r_n 成立估计式 $|r_n| \leqslant |a_{n+1}|$.

► 根据定理 16, 级数 $\sum a_n$ 收敛, 因此

$$|r_n| = \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} a_n\right|.$$

我们在证明定理 16 时已见到, 对于任何自然数 p 都有估计式

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_n\right| \leqslant |a_{n+1}|.$$

让 $p \to \infty$ 就得到所要的不等式. ◄

§5. 阿贝尔判别法和狄利克雷判别法

阿贝尔判别法和狄利克雷判别法, 适用于足够宽的一类一般形状的数值级数. 两个判别法的证明同基于离散阿贝尔变换的公式.

定理 18 设 $A_k = \sum\limits_{m=N+1}^{k} a_m$. 那么对于 $M > N$ 成立公式

$$\sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k = A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k (b_k - b_{k+1}); \tag{1}$$

$$\sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k = A_M b_{M+1} + \sum_{k=N+1}^{M} A_k (b_k - b_{k+1}). \tag{2}$$

► 先指出, 两式的右端彼此相等, 因为从公式 (1) 的右端中减掉公式 (2) 的右端得到

$$A_M b_M - A_M b_{M+1} - A_M(b_M - b_{M+1}) = 0.$$

因此只需证明公式 (1). 计算其右端得

$$\begin{aligned} A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k(b_k - b_{k+1}) &= A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k b_k - \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=N+1}^{M} A_k b_k - \sum_{l=N+2}^{M} A_{l-1} b_l = A_{N+1}b_{N+1} + \sum_{k=N+2}^{M} (A_k - A_{k-1})b_k \\ &= a_{N+1}b_{N+1} + \sum_{k=N+2}^{M} a_k b_k = \sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k. \end{aligned}$$ ◄

阿贝尔判别法和狄利克雷判别法适用于形如 $\sum a_n b_n$ 的级数.

定理 19 下述断言成立.

(A) **(阿贝尔判别法)** 若数列 b_n 单调有界而级数 $\sum a_n$ 收敛, 则级数 $\sum a_n b_n$ 也收敛.

(D) **(狄利克雷判别法)** 若数列 b_n 单调且当 $n \to \infty$ 时 $b_n \to 0$, 而级数 $\sum a_n b_n$ 的部分和数列 s_n 有界, 则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛.

► 只考虑 $b_n \geqslant 0$ 且 b_n 单调减的情形. 一切其他情形易于通过下述方式归纳为上述情形. 若 $b_n \leqslant 0$, 则改变一切 a_n 和 b_n 的符号即可. 而若 $b_n \uparrow$, 则 b_n 必可表为 $b_n = b_0 - d_n$, 其中 $b_0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 那么就把定理归结为研究级数 $\sum a_n d_n$. 此时已有 $d_n \downarrow$.

通过对级数 $\sum a_n b_n$ 使用柯西准则来证明定理. 为此, 对该级数的一段 $T_{n,p}$ 使用阿贝尔变换公式 (1). 使用记号 $A_k = s_k - s_n$ 并注意到 $b_k - b_{k+1} \geqslant 0$, 得

$$\begin{aligned} |T_{n,p}| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|A_{n+p}b_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k(b_k - b_{k+1})\right| \\ &\leqslant |A_{n+p}|b_{n+p} + \max_{n<k<n+p} |A_k| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) \leqslant \max_{n<k\leqslant n+p} |A_k| b_{n+1}. \end{aligned}$$

现考虑情形 (A). 由于数列 b_n 有界, 那么对于某 $c > 0$, $|b_{n+1}| < c$ 对于一切 n 成立. 还有, 由于级数 $\sum a_n$ 收敛, 那么对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在号码 $n_0(\varepsilon)$, 使得对于一切 $n > n_0(\varepsilon)$ 和 $k > n$, 有

$$|A_k| = \left|\sum_{m=n+1}^{k} a_m\right| = |s_k - s_n| < \varepsilon.$$[1]

[1] 原文此处读为 $|s_k - s_n| \leqslant |s_k| + |s_n| < \varepsilon$——译者注.

那么, 对于上述 n 和 p, 成立关于 $T_{n,p}$ 的估计式

$$|T_{n,p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant c\varepsilon.$$

而由于 ε 是任意的而 c 是固定的, 那么上面的不等式表明级数 $\sum a_n b_n$ 满足柯西准则, 从而此级数收敛. 这就证明了阿贝尔判别法.

在情形 (D), 级数 $\sum a_n$ 的部分和 A_k 有界. 从而存在 c 使对一切 k, $|A_k| < c$. 此外,$b_n \to 0$. 因此, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 足够大的 $n > n_0(\varepsilon)$ 和任意的 $p \geqslant 1$ 有估计式

$$|T_{n,p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant c\varepsilon.$$

由此, 如在情形 (A) 中一样, 我们根据柯西准则断定, 级数 $\sum a_n b_n$ 收敛. ◄

第五讲

§6. 级数的项的重排

定义 12 设 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是自然数列到自身的双方单值映射. 那么级数 $\sum a_{\sigma(n)}$ 叫作级数 $\sum a_n$ 的重排.

定理 20 绝对收敛的级数 $\sum a_n = A$ 的任何重排 $\sum b_n$ 都绝对收敛到同一个和 A.

► 置

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k,$$
$$A' = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad A'_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

固定某 $\varepsilon > 0$. 设 n_1 大到使得 $A' - A'_n < \varepsilon$. 那么对于任意的 $n \geqslant n_1$, 级数 $\sum a_k$ 的余项 $r_n = A - A_n$ 满足不等式

$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| = A' - A'_n < \varepsilon.$$

设 $b_k = a_{\sigma(k)}$. 那么, 只要 n_2 充分大 $(n_2 > n_1)$, 就可使在数 $\sigma(1), \cdots, \sigma(n_2)$ 中包含有闭区间 $[1, n_1]$ 中的一切整数. 置

$$m = \max(\sigma(1), \cdots, \sigma(n_2)).$$

那么对于一切 $n > n_2$ 有

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{n_1} a_k + {\sum_{k=n_1+1}^{m}}' a_k.$$

在最后的一个和式中的撇号表示其中删除某些项. 对于这个和, 虽然成立估计式

$$|B_n - A_{n_1}| = \left|{\sum_{k=n_1+1}^{m}}' a_k\right| \leqslant {\sum_{k=n_1+1}^{m}}' |a_k| \leqslant A'_m - A'_{n_1} \leqslant A' - A'_{n_1} < \varepsilon.$$

由此推出, 对于一切 $n > n_2$

$$|A - B_n| \leqslant |A - A_{n_1}| + |B_n - A_{n_1}| \leqslant A' - A'_{n_1} + A' - A'_{n_1} < 2\varepsilon.$$

根据 $\varepsilon > 0$ 的选取的任意性, 这就表明, 当 $n \to \infty$ 时 $B_n \to A$, 即级数 $\sum b_n$ 收敛且 $\sum b_n = \sum a_n$. 由此, 特别地推出, 级数 $\sum |b_n|$ 收敛到和 A', 从而级数 $\sum b_n$ 绝对收敛. ◄

级数的绝对收敛性与条件收敛性的基本不同, 在对级数进行重排时显现出来了. 如定理 20 所表明的, 绝对收敛级数在重排时, 就像在有限和中进行重排时那样, 所得的无穷和并不改变. 而对于条件收敛的级数, 情况要复杂得多. 然而, 下述定理相当充分地描述了这种情况.

定理 21 (关于条件收敛级数重排的黎曼定理) *无论 A 是怎样的实数, 条件收敛的级数 $\sum a_n$ 都有一个重排 $\sum b_n$ 使得 $\sum b_n = A$.*

► 为简单起见, 设对于一切 n 都有 $a_n \neq 0$. 先从级数 $\sum a_n$ 中分出全体正的被加数 p_k 和负的被加数 $-q_l$, 分别用标号 k 和 l 按照在级数 $\sum a_n$ 中排列的次序编号. 然后构作级数 $\sum a_n$ 的重排: 如果 $A \geqslant 0$, 则作为 b_1 取 p_1, 而若 $A < 0$ 则取 $-q_1$. 我们强调一下, 全体 p_k 和 q_l 都是正数.

接着, 在总和 $\sum\limits_{m=1}^{n} b_m$ 上按下述原则顺次添加被加数: 如果此和不超过 A, 则按顺序添入正的被加数 $b_{n+1} = p_{k_1}$, 而若此和超过了 A, 则按顺序添入负的被加数 $b_{n+1} = -q_{l_1}$. 结果, 和数永远在 A 值附近振动, 且振动的幅度逐步减少而趋于零, 于是作为极限, 得级数 $\sum b_n$ 的和为所需之值 A.

为了完成定理的证明, 只需对上述步骤的某些环节阐明其理由.

我们来证明两级数 $\sum p_k$ 和 $\sum(-q_l)$ 皆发散. 实际上, 倘两者皆收敛, 则原始的级数 $\sum a_n$ 必绝对收敛; 而若两者之一收敛, 另一个发散, 则因级数 $\sum a_n$ 的部分和

实由 $\sum p_k$ 和 $\sum q_l$ 的相应的部分和合成, 它必将也发散, 而这是不真实的. 我们还看到, 由于 $\{p_k\}$ 和 $\{-q_l\}$ 都是 $\{a_n\}$ 的子列, 所以当 $k\to\infty$ 时 $p_k\to 0$ 且当 $l\to\infty$ 时 $-q_l\to 0$.

为确定起见, 我们认为 $A>0$. 那么按其作法级数 $\sum b_n$ 有这样的构造:

$$\sum b_n = \underbrace{p_1+\cdots+p_{k_1}}_{P_1}\underbrace{-q_1-\cdots-q_{l_1}}_{Q_1} + \underbrace{p_{k_1+1}+\cdots+p_{k_2}}_{P_2}\underbrace{-q_{l_1+1}-\cdots-q_{l_2}}_{Q_2}+\cdots\cdots$$

这里 $P_1,P_2,\cdots,Q_1,Q_2,\cdots$ 是在级数 $\sum b_n$ 中连续排列的同号被加项的和. 这样的同号被加项的组数是无限的. 否则的话, 级数 $\sum b_n$ 与 $\sum p_k$ 或者与 $\sum(-q_l)$ 仅差有限多项, 那么它必将相应地发散到 $+\infty$ 或者发散到 $-\infty$. 而这是不会发生的, 因为按其作法, 级数 $\sum b_n$ 的部分和 s_n 在每一步都是向着接近数 A 的方向来变化, 只要 $s_n\neq A$ 的话. 据此, 在和式 $\sum b_n$ 中必定囊括了一切数 p_k 和 $-q_l$, 结果就囊括了全体 a_n. 也就是说 $\sum b_n$ 的确是级数 $\sum a_n$ 的重排.

现在来估计差 $r_n=s_n-A$. 对于任何一个 n, 级数的项 b_n 根据自己的符号, 必定是和 P_m 中的一项或者和 Q_m 中的一项. 因此, 等式 $b_n=p_k$ 或 $b_n=-q_l$ 之一成立.

根据级数 $\sum b_n$ 的构造, 如果 $b_n=p_{k_m}$ 或者 $b_n=-q_{l_m}$, 则 r_n 的值与 r_{n-1} 的值异号. 那么在这两种情形下总有

$$|r_n|=|s_n-A|\leqslant|b_n|.$$

对于一切别的 n, 当逐次加入被加数时, $|r_n|$ 的值即部分和 s_n 到数 A 的距离是减小的, 从而 $|r_n|<|r_{n-1}|$. 因此总有

$$|s_n-A|<p_{k_m}+q_{l_m}+q_{l_{m-1}}.$$

这里, 号码 m 可以看作是 n 的单调趋于无穷的函数, 从而对于数列 $d_n=p_{k_m}+q_{l_m}+q_{l_{m-1}}$ 来说, 由于当 $k\to\infty$ 和 $l\to\infty$ 时有 $p_k\to 0$ 和 $q_l\to 0$, 所以当 $n\to\infty$ 时 $d_n\to 0$. 由此, 终于得到, 当 $n\to\infty$ 时 $r_n=s_n-A\to 0$, 即 $s_n\to A$. ◀

第六讲

§7. 对于收敛数列的算术运算

我们已经了解了对于数值级数的某些运算, 如逐项相加, 级数的所有的项同乘

以一个数, 级数的项重排. 我们把所有这些运算都叫作是对于级数的**算术运算**. 我们还要考虑其他的运算, 即: 加括号和去括号, 以及级数的乘法运算.

命题 6 若在收敛的级数 $\sum a_n$ 中, 把某些被加数用括号括起来, 那么所得的级数仍然收敛并且和不变.

► 在无穷和 $\sum a_n$ 中, 形式地加括号导出一个新的无穷和

$$(a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots = b_1 + b_2 + \cdots,$$

其中对于 $s = 1, 2, \cdots$ 有 $b_s = a_{k_{s-1}+1} + \cdots + a_{k_s}$ 以及 $k_0 = 0$.

显然, 级数 $\sum b_s$ 的部分和数列 $\{B_s\}$ 不是别的, 恰是级数 $\sum a_n$ 的部分和数列的子列 $\{A_{k_s}\}$. 然而由于任何子列都与数列本身收敛到同一极限, 所以对于 $A_k \to A$ 有当 $s \to \infty$ 时 $B_s = A_{k_s} \to A$. ◄

收敛级数 $(1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0$ 的例子表明, 逆命题不成立. 不过, 作为例子, 下面的命题成立.

命题 7 设 $\sum b_n = B$, 其中 $b_n = (a_{n1} + \cdots + a_{nk})$, k 是固定的, 又设当 $n \to \infty$ 时 $a_{ns} \to 0, s = 1, \cdots, k$. 那么, 在级数 $\sum b_n$ 中可以打开括号, 也就是说级数

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1k} + a_{21} + \cdots = d_1 + d_2 + \cdots + d_k + d_{k+1} + \cdots$$

也收敛到 B, 其中 $d_{k(n-1)+s} = a_{ns}$.

► 此命题从收敛数列的性质推出. 实际上, 对于级数 $\sum d_n$ 和 $\sum b_m$ 的部分和 D_n 和 B_m, 当 $n = km$ 时有等式

$$D_{km} = B_m \to B, m \to \infty.$$

注意, 差 $\alpha_n = D_n - D_{km}$ 当 $m = \left[\frac{n}{k}\right]$ 且 $s = n - km$ 时等于

$$\alpha_n = d_{km+1} + \cdots + d_{km+s} = a_{m1} + \cdots + a_{ms}.$$

而由于对于任意的 $s = 1, \cdots, k$, 当 $m \to \infty$ 时 a_{ms} 都是无穷小量, 那么因为当 $n \to \infty$ 时有 $m \to \infty$, 我们有

$$|\alpha_n| \leqslant |a_{m1}| + \cdots + |a_{ms}| \to 0,$$

$$\alpha_n \to 0, \quad D_n = D_{mk} + \alpha_n \to B + 0 = B. \quad ◄$$

如果在某些括号中所含的项数少于 k, 那么可用零来补足空缺的项. 于是, 所证的命题在这种稍许一般一些的情况下也成立.

关于数值级数的乘积的问题是比较复杂的. 对此我们需要新的定义.

定义 13 我们以某种方式给自然数对 (m,n) 所成的可数集编号,也就是说,对于每个自然数对 (m,n) 赋予一个自己的号码 k. 于是我们得到两个自然数序列:$m=m(k)$ 和 $n=n(k)$. 我们把这样的编号称作是数对的线性编号. 现若 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 是两个数项级数, 而 $h_k=a_{m(k)}b_{n(k)}$, 则我们称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_k$ 是它们对应于所给的脚标对 (m,n) 的线性编号或者说对应于所给的两两乘积 a_mb_n 的按列的乘积.

问题 (施坦尼茨(Steinitz)定理) 设 $\{\bar{c}_n\}$ 是由 k 维空间 $\mathbb{R}^k$ 中的向量组成的序列,$k\geqslant 2$. 设对于任意的向量 $\bar{f}\in\mathbb{R}^k,\bar{f}\neq 0$, 级数 $\sum(\bar{c}_n,\bar{f}_n)$ 都条件收敛, 其中 $(\bar{c}_n,\bar{f}_n)$ 表示向量 $\bar{c}_n$ 和 $\bar{f}$ 的标量积.

要证明的是, 对于任何 $\bar{b}\in\mathbb{R}^k$, 都存在一个重排 $\sum\bar{c}_{\sigma(n)}$, 使得 $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}\bar{c}_{\sigma(n)}=\bar{b}$.

定义 14 级数 $\sum\limits_{n=1}^{m}h_n$ 叫作是两级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 的形式乘积 (或简称乘积), 如果 $h_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k},n\in\mathbb{N}$.

定理 22 若两级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 皆绝对收敛, 且 $\sum a_n=A,\sum b_n=B$, 那么对它们的项的两两乘积的任何排列, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_k$ 都绝对收敛到和 AB.

► 任意固定一个两两乘积的排列 $k\longleftrightarrow(m(k),n(k))$. 我们先来证明级数 $\sum h_k$ 绝对收敛. 设 $\{H_k'\}$ 是级数 $\sum|h_k|$ 的部分和数列, 而 r 是某一号码. 那么

$$H_r'=\sum_{k=1}^{r}|a_{m(k)}b_{n(k)}|.$$

置 $m_0=\max\limits_{k\leqslant r}m(k),n_0=\max\limits_{k\leqslant r}n(k)$. 此时显然有

$$H_r'=\sum_{k=1}^{r}|a_{m(k)}||b_{n(k)}|\leqslant\sum_{k=1}^{m_0}|a_k|\sum_{k=1}^{n_0}|b_k|\leqslant A'B',$$

其中 $A'=\sum|a_n|,B'=\sum|b_n|$.

于是级数 $\sum|h_k|$ 的部分和之全体有界, 而这表明级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_k$ 绝对收敛到某个数 H. 然而, 此时不管怎样重排其项都不破坏其收敛性亦不改变其和. 我们重排其项使得对于任何 $k=n^2$, 部分和 H_k 都等于 $(a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n)=A_nB_n$. 那么, 当 $n\to\infty$ 时, 有 $H_{n^2}\to AB$. 由于级数 $\sum h_k$ 收敛, 其部分和数列 $\{H_k\}$ 收敛到 H, 而 $\{H_{n^2}\}$ 是 $\{H_k\}$ 的子列, 所以 $H=AB$.

于是, 若两级数 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 皆绝对收敛, 则此两级数的乘积的和等于它们的和的乘积. ◄

在一般情况下得不到这样的等式. 实际上, 如果级数 $\sum a_n$ 条件收敛, 而作为 $\sum b_n$ 取最简单的级数 $\sum b_n=1+0+0+\cdots$, 那么由定义可确定, 它们的对应于数

对 (m,n) 的一个排列的乘积给出的级数 $\sum c_n$ 恰为级数 $\sum a_n$ 的一个重排. 而根据黎曼定理, 当重排这样的级数时, 它的和是可以改变的.

当然, 在一定的限制之下, 上述定理的结论还是可以作些不同的推广的. 例如下述定理成立.

定理 23 (梅尔滕斯 (F. Mertens) 定理) 设级数 $\sum a_n$ 绝对收敛到和 A 而级数 $\sum b_n$ 条件收敛到和 B. 那么此两级数的形式乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n$ 收敛到和 AB.

▶ 设 $\{H_n\}$ 是级数 $\sum h_n$ 的部分和数列. 那么

$$H_n = \sum_{m=1}^{n} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_k b_{m+1-k}.$$

令 $l = m+1-k$. 显然,$1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$, 从而 $1 \leqslant m-k+1 = l \leqslant n-k+1$. 因此

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{n-k+1} b_l = \sum_{k=1}^{n} a_k B_{n-k+1}.$$

这里 B_{n-k+1} 是级数 $\sum b_n$ 的相应的部分和.

由于级数 $\sum b_n$ 收敛到 B, 差 $\beta_l = B - B_l$ 是它的余项 $\beta_l = \sum\limits_{k=l+1}^{\infty} b_k$, 所以它随着 l 的增大而趋于零. 用 α_n 和 A_n 代表级数 $\sum a_n$ 的余项和部分和. 那么我们得到

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k B_{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k (B - \beta_{n-k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k B - \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_{n-k+1} = AB - \alpha_n B - \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_{n-k+1}. \end{aligned}$$

剩下的是证明, 若 $R_n = AB - H_n$, 则当 $n \to \infty$ 时 $R_n \to 0$. 然而当 $n \to \infty$ 时 $\alpha_n \to 0$, 因此 $R_n' = \alpha_n B \to 0$. 现在来考察和 $R_n'' = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \beta_{n-k+1}$:

$$\begin{aligned} |R_n''| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}| \\ &= \overbrace{\sum_{k \leqslant \frac{n}{2}} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}|}^{\sum_1} + \overbrace{\sum_{\frac{n}{2} < k \leqslant n} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}|}^{\sum_2} \\ &= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2. \end{aligned}$$

由于 $\beta_k \to 0$, 所以对于某常数 $c > 0, |\beta_k| < c$ 对于一切 k 成立. 由此

$$\sum\nolimits_2 \leqslant \sum_{\frac{n}{2} < k \leqslant n} |a_k| c \leqslant c \sum_{\frac{n}{2} < k \leqslant n} |a_k| = cT.$$

但级数 $\sum |a_n|$ 收敛, 故由柯西准则知, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和足够大的 $n > n_0(\varepsilon)$, 成立不等式 $T < \varepsilon$, 由此推出 $\sum_2 < c\varepsilon$. 另一方面, 由于 $\beta_n \to 0$, 所以对于足够大的 $l = n - k + 1 > n_1(\varepsilon)$ 有 $|\beta_l| < \varepsilon$. 这表明, 若 $\frac{n}{2} > n_1(\varepsilon)$ 且 $k \leqslant \frac{n}{2}$, 则 $|\beta_{n-k+1}| < \varepsilon$, 由此

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{k \leqslant \frac{n}{2}} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}| \leqslant \varepsilon \cdot \sum_{k \leqslant \frac{n}{2}} |a_k| \leqslant \varepsilon A',$$

其中 A' 是收敛级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ 的和. 结果当 $n \geqslant 2n_1(\varepsilon) + n_0(\varepsilon)$ 时, 有

$$R''_n < \varepsilon A' + \varepsilon c = \varepsilon(A' + c).$$

根据数 $\varepsilon > 0$ 之选取的任意性, 这表明当 $n \to \infty$ 时 $R''_n \to 0$. 于是亦有 $R_n = R'_n + R''_n \to 0$, 由此 $H_n \to AB$. ◄

第七讲

§8. 二重级数和累次级数

两个级数的乘积的概念可以看作是二重级数这一更一般的概念的一个例子. 本节研究二重级数.

定义 15 两个自然数变数 m 和 n 的数值函数 $a(m,n) = a_{m,n} = a_{mn}$ 叫作二重数列.

对于这样的数列, 也使用记号 $\{a_{m,n}\}$.

定义 16 称形如

$$S = a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{21} + a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{31} + a_{32} + a_{33} + \cdots$$

的形式无穷和为二重级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m,n} a_{m,n} = \sum a_{m,n}.$$

定义 17 有限的二重和

$$A_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} = a_{11} + \cdots + a_{1n} + \cdots + a_{m1} + \cdots + a_{mn}$$

叫作二重级数 $\sum a_{mn}$ 的 (矩形) 部分和. 数 a_{mn} 叫作级数的项.

我们还要给出一个二重级数的收敛作为部分和 A_{mn} 的极限的定义.

定义 18 数 l 叫作是二重数列 $\{B_{mn}\}$ 的极限 (或二重极限), 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 都找得到数 $m_0(\varepsilon)$和 $n_0(\varepsilon)$, 使得只要 $m > m_0(\varepsilon), n > n_0(\varepsilon)$, 就成立不等式

$$|B_{m,n} - l| < \varepsilon.$$

二重数列的极限的概念与函数沿着基的极限的一般定义完全一致. 在所述的情况下, 基 B 是一切终端 $b_{m_0n_0}$ 的集合, 而终端 $b_{m_0n_0}$ 是由满足 $m > m_0, n > n_0$ 的自然数对 (m, n) 所成的集合. 沿着这个基的极限 $A = \lim\limits_{B} A_{m,n}$ 就是上述的二重极限. 对于基 B 本身, 我们将使用记号 $m \to \infty, n \to \infty$ 来表示. 于是我们将写:

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} A_{mn} = A.$$

沿着集合基的极限的一切性质对于二重极限都成立. 例如, 和的极限等于极限的和, 极限的唯一性成立. 特别地, 由此推出二重级数收敛的必要条件.

命题 8 (二重级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum a_{mn}$ 收敛, 则当 $m \to \infty, n \to \infty$ 时 $a_{mn} \to 0$.

► 我们有 $a_{m,n} = A_{m,n} - A_{m,n-1} - A_{m-1,n} + A_{m-1,n-1}$. 由于按条件 $A_{m,n} \to A$, 所以

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{m,n} = A - A - A + A = 0. \quad ◄$$

从函数沿着集合基有极限的柯西准则的一般表述出发, 可以叙述二重级数收敛的柯西准则.

定理 24 (柯西准则) 二重级数 $\sum a_{m,n}$ 收敛的必要且充分条件是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在数 $m_0(\varepsilon)$ 和 $n_0(\varepsilon)$, 使得对于一切 $m_1, m_2 > m_0(\varepsilon)$ 和 $n_1, n_2 > n_0(\varepsilon)$ 成立不等式

$$|A_{m_1n_1} - A_{m_2n_2}| < \varepsilon.$$

在具有非负通项 $P_{mn} \geqslant 0$ 的二重级数这种重要情况下, 成立下述定理.

定理 25 对于满足条件 $p_{mn} \geqslant 0$ 的二重级数 $\sum\limits_{m}\sum\limits_{n} p_{mn}$ 来说, 其收敛的必要且充分条件是其部分和 P_{mn} 的全体有界, 即存在 $C > 0$, 使对于一切自然数 m 和 n 成立 $P_{mn} < C$.

► 充分性.我们看到, 若 $m_1 < m_2, n_1 < n_2$, 则 $P_{m_1n_1} \leqslant P_{m_2n_2}$. 还有, 从部分和 P_{mn} 的有界性推出, 存在数 $M = \sup\limits_{m,n} P_{m,n}$. 于是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 数 $M - \varepsilon$ 已不是 $\{P_{mn}\}$ 的上界, 从而存在 $m_0(\varepsilon)$ 和 $n_0(\varepsilon)$ 使 $M - \varepsilon < P_{m_0n_0} \leqslant M$. 而此时对于

一切 $m > m_0$ 和 $n > n_0$ 有

$$M - \varepsilon < P_{m_0 n_0} \leqslant P_{mn} \leqslant M,$$

从而 $|P_{mn} - M| < \varepsilon$. 这表明当 $m \to \infty, n \to \infty$ 时 $P_{mn} \to M$, 即 $\sum\limits_m \sum\limits_n p_{mn} = M$.

必要性 数列 $\{P_{mn}\}$ 的有界性, 在它收敛的情况下是沿着基有极限的函数的相应的一般性质的推论. ◀

定义 19 二重级数 $\sum\limits_m \sum\limits_n a_{mn}$ 叫作是绝对收敛的, 如果由它的项的绝对值所成的级数 $\sum\limits_m \sum\limits_n |a_{mn}|$ 收敛.

定理 26 二重绝对收敛的级数 $\sum\sum a_{mn}$ 是收敛的

► 置

$$p_{mn} = \frac{|a_{mn}| + a_{mn}}{2}, q_{mn} = \frac{|a_{mn}| - a_{mn}}{2}.$$

那么 $|a_{mn}| = p_{mn} + q_{mn}$ 且

$$a_{mn} = p_{mn} - q_{mn}, p_{mn} \geqslant 0, q_{mn} \geqslant 0.$$

由于级数 $\sum\limits_m \sum\limits_n |a_{mn}|$ 收敛, 所以存在数 $C > 0$ 满足条件

$$A'_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}| < C$$

对于一切 m, n. 但对于部分和 P_{mn} 和 Q_{mn} 成立不等式 $P_{mn} \leqslant A'_{mn}, Q_{mn} \leqslant A'_{mn}$, 所以根据定理 25, 级数 $\sum\sum p_{mn}$ 和 $\sum\sum q_{mn}$ 都收敛. 因此, 级数 $\sum\sum a_{mn}$ 作为它们的差也收敛. ◀

形如 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ 的无穷和还可以看成另一种重要的使用极限过程的结构, 它导致累次级数的概念.

定义 20 设 $\{a_{mn}\}$ 是二重数列. 固定号码 m 而考察形式级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$, 以符号 b_m 代表之. 那么形式无穷和

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \right)$$

叫作累次级数.

显然, 与同一个二重数列 a_{mn} 还可联系着另一个累次级数, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \right),$$

其中 $\beta_n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{mn}$. 如果在这个等式中略去括号, 那么一般说来, 表达式 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}$ 既可看作二重级数也可看作累次级数, 这就可能引起误解. 当可能引起误解时, 必须使用括号, 或者专门说明表达式的准确含义.

我们来引入累次级数收敛的概念并研究在二重级数的收敛性与累次级数的收敛性之间的联系.

定义 21　若对于任意的 m, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}$ 收敛到 b_m, 而级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}b_m$ 也收敛到某数 A, 则说累次级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}\right)$ 收敛到和 A, 并记作

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\right)=A.$$

定义 22　设 $(m(k),n(k))$ 是全体数对 (m,n) 的集合的某个线性编号, $d_k=a_{m(k)n(k)}$. 那么级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}d_k$ 叫作是二重级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}$ 相应于它的项的给定的编号的线性重排.

定理 27　设对于一切数对 (m,n) 有 $a_{mn}\geqslant 0$ 并设 $\sum d_k$ 是级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}$ 的某个线性重排. 那么, 只要下列三级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn},\ \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\right),\ \sum_{k=1}^{\infty}d_k$$

之中的一个收敛, 则其他两个也收敛到同一个和.

► 用 A,B 和 D 代表相应的三个级数的和. 要证的是, 只要这三个数中的一个存在, 则另两个也存在, 且它们彼此全相等, 为此只需证明三个命题:

1) 若 A 存在则 B 亦存在且 $B\leqslant A$;

2) 若 B 存在则 D 亦存在且 $D\leqslant B$;

3) 若 D 存在则 A 亦存在且 $A\leqslant D$.

我们来考察这三个命题.

1) 数 A 存在表明级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}$ 的部分和 A_{mn} 当 $m\to\infty,n\to\infty$ 时收敛到 A. 先前曾证明, 在这种情况下, $A=\sup\limits_{m,n}A_{mn}$. 由此推出 $A_{mn}\leqslant A$ 对于一切自然数 m,n 成立显然, 此时成立不等式

$$b_m(n)=\sum_{l=1}^{n}a_{ml}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}=A_{mn}\leqslant A.$$

因此, 对于任意的 m, 存在数

$$b_m=\sup_n b_m(n)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk}.$$

还有, 由于

$$\sum_{k=1}^{m} b_k(n) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} = A_{mn} \leqslant A,$$

那么, 令 $n \to \infty$, 对于任何 m 都有

$$A \geqslant \sum_{k=1}^{m} b_k = B_m.$$

但 B_m 不减, 故当 $m \to \infty$ 时数列 $\{B_m\}$ 收敛到某数 B, 且 $B \leqslant A$. 命题 1) 获证.

2) 设 B 存在. 那么对于任意的部分和 $D_k = \sum\limits_{r=1}^{k} d_r$ 存在数对 (m_0, n_0) 满足条件: $m(r) \leqslant m_0$ 和 $n(r) \leqslant n_0$ 对于一切 $r \leqslant k$ 成立. 这时, 一切被加数 d_r 都包括在和式 $A_{m_0n_0}$ 之中, 同时

$$A_{m_0n_0} = \sum_{k=1}^{m_0}\sum_{l=1}^{n_0} a_{kl} \leqslant \sum_{k=1}^{m_0}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = \sum_{k=1}^{m_0} b_k = B_{m_0} \leqslant B.$$

这表明, 部分和 D_k 以数 B 为上界, 从而对于某个数 D 当 $k \to \infty$ 时有 $D_k \to D \leqslant B$. 命题 2) 获证.

3) 设 D 存在. 那么对于任何 A_{mn} 皆存在号码 k_0 使得和 $D_{k_0} = \sum\limits_{k=1}^{k_0} d_k$ 包含了全部进入和 A_{mn} 中的被加数 a_{kl}. 于是对于一切 m, n 有 $A_{mn} \leqslant D_{k_0} \leqslant D$. 因此存在 $A = \sup\limits_{m,n} A_{mn}$ 且 $A \leqslant D$, 这就是所要证的. ◀

定理 28 *把定理 27 中的条件 $a_{mn} \geqslant 0$ 去掉而把级数的收敛都看作是绝对收敛, 则其结论依然成立.*

► 把数 a_{mn} 表示成 $a_{mn} = p_{mn} - q_{mn}$ 其中

$$p_{mn} = \frac{|a_{mn}| + a_{mn}}{2} \geqslant 0, q_{mn} = \frac{|a_{mn}| - a_{mn}}{2} \geqslant 0.$$

接下来只要把定理 27 使用于以 p_{mn} 和 q_{mn} 为通项的级数而后考察它们的差即可. ◀

定理 29 *二重绝对收敛的级数的任何项的重排都不伤害其收敛性且不改变其和.*

► 设 $\sum\sum b_{mn}$ 是二重绝对收敛级数 $\sum\sum a_{mn} = A$ 的重排. 我们来考察对应于级数 $\sum\sum a_{mn}$ 和 $\sum\sum b_{mn}$ 的如定理 27 所述的单重级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d'_k$. 那么级数 $\sum d_k = A$ 绝对收敛, 而级数 $\sum d'_k$ 是 $\sum d_k$ 的某个重排. 于是 $\sum d'_k$ 也绝对收敛, 而与它一道, 级数 $\sum\sum b_{mn}$ 也绝对收敛, 并且

$$A = \sum\sum a_{mn} = \sum d'_k = \sum d_k = \sum\sum b_{mn}. \quad ◀$$

定理 30　在形如 $\sum\limits_m\left(\sum\limits_n a_{mn}\right)$ 的累次绝对收敛的级数中可以改变求和的次序. 此时级数保持绝对收敛且其和不变.

► 根据定理 28, 二重级数 $\sum\sum a_{mn}$ 同样绝对收敛, 而根据同一定理, 与此二重级数一样, 级数 $\sum\limits_n\left(\sum\limits_m a_{mn}\right)$ 也绝对收敛, 而且三个级数的和是一样的. ◄

最后强调指出, 在改变求和次序时保持和不变的性质以后总是很有意义的. 定理 30 给出了可以改变完成极限过程的顺序的例子.

第十六章　函数序列与函数级数

第八讲

§1. 函数级数之收敛

函数序列的概念与函数级数的概念彼此紧密联系，就像在通常的数值情形时一样. 我们实质上早已遇到了这些概念. 无穷几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}, \quad |q| < 1$$

或黎曼的 ζ 函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1$$

就是例子, 如果在前一种情形固定 q, 而在第二种情形固定 s, 则我们就得到通常的数值级数. 而就是这些参数可以看作是数值函数的自变量, 于是级数的和同样代表了某些数值函数. 这样的观点使我们导致下述定义.

定义 1 称具有同一定义域 $D \subset \mathbb{R}$ 编了号的函数的总体 $\{f_n(x)\}$ 为函数序列. 此时集合 D 称为函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的定义域.

此处 “编了号” 一语指的是 “作成与自然数集 $\mathbb{N}$ 的双方单值对应”.

定义 2 设 $\{a_n(x)\}$ 是某个函数序列定义在集合 D 上. 形式无穷和

$$a_1(x)+a_2(x)+a_3(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$$

或简写作 $\sum a_n(x)$, 叫作定义在 D 上的函数级数.

固定某值 $x=x_0\in D$, 就得到通常的数值级数 $\sum a_n(x_0)$. 与在数值情形一样, 我们也定义函数级数的部分和.

定义 3 对于一切 $n\in\mathbb{N}$, 函数

$$A_n(x)=a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)$$

叫作函数级数 $\sum a_n(x)$ 的第 n 部分和, 而 $a_n(x)$ 叫作它们通项.

下面设 D 为函数级数 $\sum a_n(x)$ 的定义域, 也是序列 $\{A_n(x)\}$ 的定义域.

定义 4 若对于固定的 $x=x_0\in D$, 数值级数 $\sum a_n(x_0)$ 收敛, 则说函数级数 $\sum a_n(x)$ 在点 $x=x_0$ 处收敛.

定义 5 由使级数 $\sum a_n(x)$(或者序列 $\{A_n(x)\}$) 收敛的点的全体所成的集合 $D_0\subset D$ 叫作该级数 (或该序列) 的收敛域.

注 函数级数的收敛域通常比它的定义域狭小. 例如无穷几何级数 $\dfrac{q}{1-q}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ 就是如此.

定义 6 设 D_0 是函数序列 $\{A_n(x)\}$ 的收敛域, 并设 $A(x)$ 是此序列在固定的点 $x\in D_0$ 处的极限值. 那么对于一切 $x\in D_0$, 数对 $(x,A(x))$ 的集合给出了一个函数 $y=A(x)$, 它定义在集合 D_0 上. 这个函数叫作函数序列 $\{A_n(x)\}$ 的极限函数. 若此处 $\{A_n(x)\}$ 是级数 $\sum a_n(x)$ 的部分和序列则函数 $A(x)$ 叫作此级数的和.

于是, 函数级数的和是一个定义在级数的收敛域上的函数. 对于 $x\in D_0$, 级数的余项 $r_n(x)=A(x)-A_n(x)$ 也是 x 的一个函数, 而且当 $n\to\infty$ 时, 对于任何 $x\in D_0$ 皆有 $r_n(x)\to 0$.

级数 $\sum a_n(x)$ 的和 $A(x)$ 的许多性质, 譬如连续性, 都与它的余项 $r_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 的性状有关. 为了描述此性状, 还要引入函数级数及函数序列的一致收敛这一重要概念. 为了强调一致收敛与上面引入的简单的收敛概念的不同, 常把后者叫作点态收敛

不同的函数按泰勒公式展开, 产生函数级数的重要的例子. 例如, 在点 $x_0=0$ 处展开函数 $y=\sin\ x(x\in\mathbb{R})$, 得到

$$\sin\ x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+r_n(x),$$

其中 $r_n(x)$ 是公式的余项①. 把余项写成拉格朗日形式:

$$r_n(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin^{(2n)} z$$

其中 z 位于点 0 和点 x 之间. 由此

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

然而对于 $n > x^2$ 成立下述不等式:

$$(2n)! > n^{n+1}, \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leqslant \frac{x^2}{n^2} < \frac{1}{n}.$$

于是当 $n \to \infty$ 时 $r_n(x) \to 0$.

结果, 令

$$a_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}, x \in \mathbb{R}$$

得展开式 $\sin\ x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$.

定义 7 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 叫作函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的泰勒级数, 也叫作函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的泰勒级数展开式.

我们举出一些函数的泰勒级数的例子:

例 1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$

2. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \qquad -1 < x \leqslant 1.$

3. $\sin\ x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$

4. $\cos\ x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \qquad -1 < x \leqslant 1.$

6. $\arctan x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \qquad |x| \leqslant 1.$

7. $\arcsin x = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \leqslant 1.$

①此 r_n 不是 n 阶余项, 而是 $2n-1$ 或 $2n$ 阶余项 —— 译者注.

§2. 一致收敛

定义 8　设函数序列 $\{r_n(x)\}$ 对于每个 $x \in M$ 都收敛到零. 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在号码 $n_0 = n_0(\varepsilon)$, 使得对于一切 $n > n_0$ 同时对于一切 $x \in M$ 都成立不等式 $|r_n(x)| < \varepsilon$, 那么就说 $\{r_n(x)\}$ 在 M 上一致收敛到零.

记作: 当 $n \to \infty$ 时 $r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$.

注　此定义中"同时"一词一般说来是多余的, 可以删去, 不过它强调一致收敛与点态收敛的主要区别在于, 在第一种情形在极限的定义中的数 $n_0(\varepsilon)$ 对于一切 $x \in M$ 都是同一个, 而在第二种情形它还可以与 x 有关, 即 $n_0(\varepsilon) = n_0(\varepsilon, x)$.

定义 9　若函数 $A(x) = A_n(x) + r_n(x)$, 其中当 $n \to \infty$ 时 $r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$, 则说序列 $\{A_n(x)\}$ 在集合 M 上当 $n \to \infty$ 时一致收敛到 $A(x)$, 记作:

当 $n \to \infty$ 时 $A_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x)$.

这里, 符号 M 可以略去, 如果明白所说的是哪个集合的话. 还有, 如果这里 $\{A_n(x)\}$ 是级数 $\sum a_n(x)$ 的部分和序列, 则此级数叫作是**在集合M上一致收敛到** $A(x)$ 的.

所引入的一致收敛概念的重要性, 以下述定理为例即可见到.

定理 1　设每个函数 $a_n(x)$ 都在点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处连续, 且级数 $\sum a_n(x)$ 在开区间 $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上一致收敛到函数 $A(x)$, 其中 $\delta > 0$ 是一个固定的数. 那么和函数 $A(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

▶　根据一致收敛的定义有

$$A(x) = A_n(x) + r_n(x), \quad r_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0 (n \to \infty),$$
$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x), \quad r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x).$$

使用记号 $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$, 其中 $f(x)$ 是任意的函数, 得

$$\Delta A(x) = \Delta A_n(x) + \Delta r_n(x) = \Delta A_n(x) + r_n(x) - r_n(x_0).$$

由于 $r_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0 (n \to \infty)$, 所以对于任意的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在号码 $n_0 = n_0(\varepsilon_1)$, 使得对于一切 $n > n_0$ 和一切 $x \in I$, 有

$$|r_n(x)| < \varepsilon_1, \qquad |r_n(x_0)| < \varepsilon_1.$$

我们注意到函数 $A_n(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 因此对于任意的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在

$\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时成立不等式

$$|\Delta A_n(x)| = |A_n(x) - A_n(x_0)| < \varepsilon_1.$$

现对于给定的 $\varepsilon > 0$, 可取 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$; 则对于一切满足条件 $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon)$ 的 x 以及数 $n = n_0(\varepsilon_1) + 1 = n_0(\varepsilon)$, 有

$$|\Delta A(x)| \leqslant |\Delta A_n(x)| + |r_n(x)| + |r_n(x_0)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

这就表明函数 $A(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续. ◀

我们来考察一致收敛的函数序列的一些简单性质.

定义 10 *函数序列 $\{A_n(x)\}$ 叫作是在集合 M 上一致有界的, 如果存在数 C, 使得对于一切 $n \in \mathbb{N}$ 和一切 $x \in M$*

$$|A_n(x)| < C.$$

命题 1 *由在集合 M 上有界的函数组成的在 M 上一致收敛的函数序列 $\{A_n(x)\}$ 是在 M 上一致有界的.*

► 设 $B_m = \sup\limits_{x\in M} |A_m(x)|, m \in \mathbb{N}$. 在一致收敛的定义中取 $\varepsilon = 1$. 那么对于一切足够大的 $n > n_0$ 和一切 $x \in M$

$$|A(x) - A_n(x)| < 1, |A(x)| \leqslant |A_n(x)| + 1 \leqslant B_n + 1.$$

这表明函数 $A(x)$ 有界.

接下去令 $B_0 = \sup\limits_{x\in M} |A(x)|, B = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n_0} B_k$. 置 $C = B + 1$. 那么当 $k \leqslant n_0$ 时成立估计式

$$|A_k(x)| \leqslant B < B + 1 = C,$$

而当 $k > n_0$ 时有

$$\begin{aligned}|A_k(x)| &\leqslant |A(x)| + |A(x) - A_k(x)| \\ &\leqslant B_0 + 1 \leqslant B + 1 = C.\end{aligned}$$ ◀

顺便还证明了一个命题.

命题 2 *若函数 $A(x)$ 在集 M 上有界且 $A_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x)$, 那么对于某 $n_0 \in \mathbb{N}$, 函数序列 $\{A_{n_0+n}(x)\}$ 在 M 上一致有界.*

下面两个命题不予证明, 因为它们的证明与数值级数的类似情形完全一样.

命题 3　设当 $n \to \infty$ 时

$$a_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} a(x), \qquad b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} b(x).$$

那么

1° $a_n(x) + b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} a(x) + b(x)$.

2° 若 $|b(x)| < C$ 对于某 $C > 0$ 和一切 $x \in M$ 成立, 则 $a_n(x)b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} a(x)b(x)$.

3° 只要对于一切 $x \in M$, $\dfrac{1}{|b(x)|} > C > 0$, 就有 $\dfrac{a_n(x)}{b_n(x)} \underset{M}{\rightrightarrows} \dfrac{a(x)}{b(x)}$.

命题 4　若序列 $\{d_n(x)\}$ 是一致有界的且当 $n \to \infty$ 时 $r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$, 则当 $n \to \infty$ 时 $d_n(x)r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$.

第九讲

§3. 函数序列一致收敛的准则

现在我们来证明函数序列一致收敛的柯西准则.

定理 2 (柯西准则)　函数序列 $\{A_n(x)\}$ 在集合 M 上一致收敛的必要且充分条件是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在号码 $n_0 = n_0(\varepsilon)$, 使得对于一切 $m > n_0, n > n_0$ 和一切 $x \in M$ 成立不等式 $|A_n(x) - A_m(x)| < \varepsilon$.

► *必要性*　在这种情况下,$A_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x)$. 于是对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ 使得对于一切 $n > n_0$ 和一切 $x \in M$ 有 $|A_n(x) - A(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 此时, 对于 $m > n_0$ 和 $n > n_0$ 有

$$|A_m(x) - A_n(x)| \leqslant |A_m(x) - A(x)| + |A(x) - A_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性　对于每个固定的 $x \in M$, 数值序列 $\{A_n(x)\}$ 满足柯西准则. 这表明它有极限 $A(x)$. 所以在整个集合 M 上, 极限函数存在. 接着, 不管数 $\varepsilon > 0$ 多小, 根据条件都存在号码 $n_1 = n_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, 使得对于一切 $m > n_1$ 和 $n > n_1$ 有 $|A_m(x) - A_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 对于一切 $x \in M$ 成立.

再次, 任意地固定 $x \in M$ 并让 m 趋于无穷. 得不等式

$$|A_n(x) - A(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

那么, 取 $n_0 = n_0(\varepsilon) = n_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, 则对于一切 $n > n_0$ 和一切 $x \in M$ 有

$$|A_n(x) - A(x)| < \varepsilon.$$

这表明 $A_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x)$. ◀

如果 $\{A_n(x)\}$ 是函数级数 $\sum a_n(x)$ 的部分和序列, 则定理 2 给出了此级数一致收敛的柯西准则. 我们将它叙述成下述定理.

定理 3 *级数 $\sum a_n(x)$ 在集合 M 上一致收敛的必要且充分条件是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ 使得对于每个 $n > n_0$ 和每个 $p \in \mathbb{N}$ 以及一切 $x \in M$ 成立不等式*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| < \varepsilon.$$

最后, 从定理 3 出发, 我们以直接的形式叙述级数 $\sum a_n(x)$ 不一致收敛的准则.

定理 4 *级数 $\sum a_n(x)$ 或序列 $\{A_n(x)\}$ 在集合 M 上不一致收敛的必要且充分条件是, 存在 $\varepsilon > 0$ 和自然数的两个序列 $\{n_m\}$ 和 $\{p_m\}$, 其中 $n_{m+1} > n_m$, 以及 M 中的一列点 $\{x_m\}$ 使得成立不等式*

$$\left|\sum_{k=n_m+1}^{n_m+p_m} a_k(x_m)\right| \geqslant \varepsilon.$$

我们来看不一致收敛的级数和不一致收敛的序列的例子.

例 1. 级数 $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ 在 $[0,2)$ 上不一致收敛.

实际上, 级数的和 $A(x)$ 当 $x \neq 0$ 时等于

$$A(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n = \frac{x}{1-(1-x)} = \frac{x}{x} = 1,$$

而 $A(0) = 0$. 这表明 $x = 0$ 是函数 $A(x)$ 的间断点. 但由于 $a_n(x) = x(1-x)^n$ 在零处连续, 倘若收敛是一致的话, 则根据定理 1 函数 $A(x)$ 该是连续的. 但并不如此. 所以收敛不是一致的.

2. 若 $A_n(x) = x^n$, 则在集合 $M = (0,1)$ 上一致收敛不成立.

实际上, 在定理 4 中置 $\varepsilon = 0.1$ 并对于每个 $m > 1$ 取 $n_m = m, x_m = 1 - \dfrac{1}{m}, p_m = m$. 那么将有

$$|A_m(x_m) - A_{2m}(x_m)| = \left|\left(1-\frac{1}{m}\right)^m - \left(1-\frac{1}{m}\right)^{2m}\right|$$

$$= \left(1-\frac{1}{m}\right)^m\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\right) > \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} > 0.1 = \varepsilon.$$

于是, 根据定理 4 形式的柯西准则, 序列 $\{A_n(x)\}$ 不是一致收敛的.

问题 设函数 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$n \in \mathbb{N}$. 并设当 $n \to \infty$ 时 $f_n(x) \to f_0(x)$. 证明函数 $f_0(x)$ 在 $(0,1)$ 上有连续点.

§4. 一致收敛判别法

我们将证明函数级数一致收敛的三个判别法，它们分别属于魏尔斯特拉斯，阿贝尔和狄利克雷. 这些判别法给出了一致收敛的充分条件, 但它们不是必要的, 也就是说, 级数 $\sum a_n(x)$ 可以一致收敛但不满足这些条件中的任何一个. 话说回来了, 对于通常的数值级数情况也是一样. 另一方面, 我们指出, 这些判别法对应于数值级数收敛的同名判别法并且发展了它们的原理.

先考察下述关于无穷小函数序列的一致收敛准则.

定理 5 *当 $n \to \infty$ 时 $b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ 的充分必要条件是, 存在数列 $\{\beta_n\}$, 使当 $n \to \infty$ 时 $\beta_n \to 0$ 且对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和一切 $x \in M, |b_n(x)| \leqslant \beta_n$.*

► *充分性* 设这样的数列 $\{\beta_n\}$ 存在. 那么对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在号码 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ 使得对于每个 $n > n_0$ 成立 $\beta_n < \varepsilon$. 然而对于同样的 n 和一切 $x \in M$ 都有 $|b_n(x)| \leqslant \beta_n < \varepsilon$. 所以, 当 $n \to \infty$ 时

$$b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0.$$

必要性 设当 $n \to \infty$ 时 $b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$. 令 $\beta_n = \sup\limits_{x \in M} |b_n(x)|$. 由于对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在号码 $n_0 = n_0(\varepsilon)$, 使得对于每个 $n > n_0$ 和一切 $x \in M$ 成立不等式 $|b_n(x)| < \varepsilon$, 所以对于同样的 n 有 $\beta_n = \sup\limits_{x \in M} |b_n(x)| \leqslant \varepsilon$. 这表明当 $n \to \infty$ 时 $\beta_n \to 0$. ◄

注 定理 5 中的数列 $\{\beta_n\}$ 叫作 $\{b_n(x)\}$ 的优控. 此定理的结论说的是, 无穷小函数序列之一致收敛等价于它有无穷小优控.

现考察函数级数一致收敛的魏尔斯特拉斯判别法.

定义 11 *收敛的非负项数值级数 $\sum p_n$ 叫作函数级数 $\sum a_n(x)$ 在集合 M 上的优控, 如果对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和一切 $x \in M$ 成立估计式 $|a_n(x)| \leqslant p_n$. 也说级数 $\sum a_n(x)$ 在集合 M 上被级数 $\sum p_n$ 控制.*

定理 6 (魏尔斯特拉斯判别法) *设函数级数 $\sum a_n(x)$ 在集合 M 上有优控 $\sum p_n$. 则它在此集合上一致收敛.*

► 只需确认级数的余项 $r_n(x)$ 在集合 M 上一致收敛到零. 我们看到, 对于任何固定的 $x \in M$, 数值级数 $\sum a_n(x)$ 是收敛的, 因为有优控 $\sum p_n = P$. 此外, 对于每个固定的 x 有

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k = \rho_n,$$

其中 ρ_n 是数值级数 $\sum p_n$ 的余项且当 $n \to \infty$ 时 $\rho_n \to 0$. 而根据定理 5 的注, 这就

表明 $\{r_n(x)\}$ 有无穷小优控 $\{\rho_n\}$. 因此, 根据定理 5, 当 $n\to\infty$ 时 $r_n(x)\underset{M}{\rightrightarrows}0$, 即级数 $\sum a_n(x)$ 在 M 上一致收敛. ◀

定理 7 (A) **阿贝尔判别法** 设:

1) $\sum a_n(x)\underset{M}{\rightrightarrows}A(x)$;

2) 序列 $\{b_n(x)\}$ 在 M 上一致有界;

3) 对于任何固定的 $x\in M$, 数列 $\{b_n(x)\}$ 都是单调的. 那么级数 $\sum a_n(x)b_n(x)$ 在 M 上一致收敛

(D) **(狄利克雷判别法)**设:

1) 部分和 $A_n(x)$ 在 M 上一致有界;

2) 当 $n\to\infty$ 时 $b_n(x)\underset{M}{\rightrightarrows}0$;

3) 对于任何固定的 $x\in M$, 数列 $\{b_n(x)\}$ 都是单调的. 那么, 级数 $\sum a_n(x)b_n(x)$ 在 M 上一致收敛.

► 施用与证明关于数值级数的同名判别法相同的步骤. 与前一样, 先认为数列 $\{b_n(x)\}$ 是单调减的并且对于每个 $n\in\mathbb{N}, b_n(x)\geqslant 0$. 施用阿贝尔变换于级数 $\sum a_n(x)b_n(x)$ 的部分和并使用记号

$$H'_k(x)=\sum_{m=n+1}^{k}a_m(x)b_m(x),\quad A'_k(x)=\sum_{m=n+1}^{k}a_m(x)$$

来表示级数 $\sum a_n(x)b_n(x)$ 和 $\sum a_n(x)$ 的一段. 得

$$\begin{aligned}|H'_{n+p}(x)|&=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(x)b_k(x)\right|\\&=\left|A'_{n+p}(x)b_{n+p}(x)+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}A'_k(x)(b_k(x)-b_{k+1}(x))\right|\\&\leqslant|A'_{n+p}(x)|b_{n+p}(x)+\sup_{n<k<n+p}|A'_k(x)|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k(x)-b_{k+1}(x))\\&\leqslant b_{n+1}(x)\sup_{n<k\leqslant n+p}|A'_k(x)|.\end{aligned}$$

考虑情形 (A). 由于级数 $\sum a_n(x)$ 一致收敛并根据柯西准则, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在号码 $n_0=n_0(\varepsilon)$, 使得对于每个 $k>n_0$ 都成立不等式

$$\sup_{x\in M}|A'_k(x)|<\varepsilon.$$

此外, 由于 $\{b_n(x)\}$ 一致有界, 存在数 $C>0$ 使得对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 和一切 $x\in M$ 有 $b_n(x)\leqslant C$. 因此当 $n\geqslant n_0$ 时成立估计式 $|H'_{n+p}(x)|\leqslant C\varepsilon$.

根据 $\varepsilon>0$ 的任意性, 这表明对于级数 $\sum a_n(x)b_n(x)$ 一致收敛的柯西准则的条件成立, 于是情形 (A) 时结论成立.

现考虑情形 (D). 此时由于和 $A_k(x)$ 一致有界, 从而 $A'_k(x)=A_k(x)-A_n(x)$ 也同样一致有界, 所以存在数 $C>0$ 使得 $|A'_k(x)|<C$ 对于一切 $k\in\mathbb{N}$ 和一切 $x\in M$ 成立. 根据第 2) 款, 当 $n\to\infty$ 时 $b_n(x)\underset{M}{\rightrightarrows}0$. 那么, 对于任意的 $\varepsilon>0$ 当 $n>n_0(\varepsilon)$ 足够大时 $|b_{n+1}(x)|<\varepsilon$ 对一切 $x\in M$ 成立. 由此, 同上面一样得 $|H'_{n+p}(x)|\leqslant C\varepsilon$. 于是 (D) 的结论也获得证实.

剩下的是取消限制:1) 序列 $\{b_n(x)\}$ 减;2) 对于一切 $n, b_n(x)\geqslant 0$. 为取消限制 1). 可将一切函数 $a_n(x)$ 和 $b_n(x)$ 都同时改变成相反的符号. 那么条件 $\{b_n(x)\}$ 增就转化成条件 $\{b_n(x)\}$ 减, 而加于级数 $\sum a_n(x)$ 的一切条件都不变. 为了消除限制 2), 考虑函数 $b_0(x)=\inf\limits_n b_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}b_n(x)$. 那么 $b_n(x)=b_0(x)+\beta_n(x)$, 其中 $\beta_n(x)\geqslant 0$ 对于一切 $x\in M$ 成立, 并且 $\{\beta_n(x)\}$ 减. 由此

$$\sum a_n(x)b_n(x)=b_0(x)\sum a_n(x)+\sum a_n(x)\beta_n(x).$$

在情形 (D), 右端第一个被加项等于零, 面在情形 (A) 它是一致收敛的级数. 而第二个级数满足定理的条件且符合上面所作的两条假定. ◀

我们来证明下面的关于正弦级数一致收敛性的精致的判别法 ([36], [37]).

定理 8 *设 $\{b_n\}$ 是单调减的正数列. 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\ nx$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛的必要且充分的条件是*

$$\lim_{n\to\infty}nb_n=0.$$

▶ *必要性* 根据柯西准则, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0=n_0(\varepsilon)$, 使得对于一切 $m>n_0$, 一切 $n>n_0$ 和一切 $x\in[0,\pi]$ 成立不等式

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}b_k\sin\ kx\right|<\varepsilon.$$

取 $m=\left[\frac{n}{2}\right]$ 以及 $x=\frac{\pi}{(2n)}$.① 那么当 $m+1\leqslant k\leqslant n$ 时有 $\sin kx\geqslant\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因此

$$\sum_{k=m+1}^{n}b_k\sin kx\geqslant(n-m)b_n\frac{\sqrt{2}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}nb_n.$$

于是, 对于任意的 $\varepsilon>0$ 找得到数 $n_0=n_0(\varepsilon)$, 使得对于一切 $n>n_0$ 成立不等式 $|nb_n|<\frac{4}{\sqrt{2}}\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=0$. 必要性证毕.

充分性 由于对于任何自然数 n, 函数都是以 2π 为周期的奇函数, 所以只需证明所考虑的级数在闭区间 $[0,\pi]$ 上一致收敛就可以了. 从定理的条件推出, 对于任意

①原文此处为 $x=\frac{\pi}{(4n)}$——译者注.

的 $\varepsilon > 0$, 找得到 $n_0 = n_0(\varepsilon)$, 使得对于一切 $n > n_0$ 成立不等式 $|nb_n| < \varepsilon$. 取任意的 $n > n_0$ 和任意的 $p \geqslant 1$ 来估计和

$$\sum = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \sin kx\right| = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

其中

$$\sum\nolimits_1 = \left|\sum_{k=n+1}^{[\frac{\pi}{x}]} b_k \sin kx\right|, \sum\nolimits_2 = \left|\sum_{k=[\frac{\pi}{x}]+1}^{n+p} b_k \sin kx\right|$$

当 $k \leqslant \dfrac{\pi}{x}$ 时有 $\sin kx \leqslant kx$, 所以

$$\sum\nolimits_1 \leqslant \sum_{k=n+1}^{[\frac{\pi}{x}]} \frac{\varepsilon}{k} kx \leqslant \varepsilon\pi.$$

为估计和 $\sum_2$, 实施阿贝尔变换. 得到

$$\sum\nolimits_2 \leqslant b_{[\frac{\pi}{x}]+1} \max_{1\leqslant q\leqslant p} \left|\sum_{k=[\frac{\pi}{x}]+1}^{n+q} \sin kx\right| < \frac{\varepsilon}{\left[\dfrac{\pi}{x}\right]+1} \cdot \frac{\pi}{x} \leqslant \varepsilon,$$

这是因为当 $0 < t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时函数 $\dfrac{\sin t}{t}$ 单调减, 且

$$\left|\sum_{k=[\frac{\pi}{x}]+1}^{n+q} \sin kx\right| = \left|\frac{\cos\left(n+q-\dfrac{1}{2}\right)x - \cos\left(\left[\dfrac{\pi}{x}\right]+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\dfrac{x}{2}} \leqslant \frac{\pi}{x}.$$

因此,$\sum < \varepsilon(\pi+1)$. 于是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 找得到数 $n_0 = n_0(\varepsilon)$, 使得对于一切 $n > n_0$, 对于一切 $p \geqslant 1$ 以及对于一切 $x \in \mathbb{R}$, 成立不等式 $\sum < \varepsilon(\pi+1)$. 根据级数一致收敛的柯西准则, 这表明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 是在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛的. ◄

我们指出, 哈代 [37] 给出了这个定理的一些有趣的推广.

第十讲

§5. 迪尼定理

迪尼定理对于弄清楚一致收敛概念的本质有重要作用. 我们来证明这个定理.

定理 9 (迪尼判别法)　设在闭区间 $I=[a,b]$ 上连续的非负函数 $p_n(x)$ 的序列在此区间上逐点收敛到零. 如果对于一切 $x\in I$ 和一切 $n\in\mathbb{N}$ 成立 $p_n(x)\geqslant p_{n+1}(x)$, 那么收敛在闭区间 I 上是一致的, 即当 $n\to\infty$ 时 $p_n(x)\underset{I}{\rightrightarrows}0$.

► 由于序列 $\{p_n(x)\}$ 逐点收敛到零, 所以对于任何 $\varepsilon>0$, 对于每个 $x\in I$ 都可以指出号码 $n=n(\varepsilon,x)$, 使 $p_n(x)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 而由于函数 $p_n(x)$ 连续, 所以在点 x 处存在一个 δ 邻域 $(\delta>0)$, 对于此邻域 (与 I 的交集) 中的一切点 y 有 $p_n(y)<\varepsilon$. 一切这样的邻域的全体完全覆盖了闭区间 I. 而 I 是紧致集, 故从这个覆盖中可取出有限的子覆盖 $O(\delta_1,x_1),\cdots,O(\delta_k,x_k)$. 数 $x_1,\cdots,x_k$ 中的每一个都对应有自己的号码 $n_1,\cdots,n_k$. 以及函数 $p_{n_1}(y),\cdots,p_{n_k}(x)$, 使得对于一切 $y\in O(\delta_s,x_s)$ 有 $0\leqslant p_{n_s}(y)<\varepsilon$. 令 $n_0=\max\limits_{1\leqslant s\leqslant k}n_s$. 那么对于任何 $y\in O(\delta_{n_s},x_{n_s}),s=1,\cdots,k$ 有 $0\leqslant p_{n_0}(y)\leqslant p_{n_s}(y)<\varepsilon$. 闭区间 I 的每点 y 都必含于某个这样的邻域中, 因此在 I 的每点 y 处都成立不等式 $0\leqslant p_{n_0}(y)<\varepsilon$. 那么, 对于一切 $n>n_0=n_0(\varepsilon)$ 和一切 $y\in I$ 成立 $|p_n(y)|<\varepsilon$. 证得当 $n\to\infty$ 时 $p_n(x)\underset{I}{\rightrightarrows}0$. ◄

如果在定理 9 中作为 $p_n(x)$ 而考虑满足条件 $a_n(x)\geqslant 0$ 的函数级数 $\sum a_n(x)$ 的余项 $r_n(x)$, 那么与先前已证明的一致收敛保持和的连续性的定理一起, 我们就得到下述准则.

定理 10　由在闭区间 I 上连续的非负的函数组成的级数的和仍在 I 上连续的必要且充分的条件是此级数在 I 上一致收敛.

注　对于定理 9 的结论的真确性, 闭区间 I 是紧致的这一性质具有本质的意义. 例如, 若在其条件中把闭区间 I 换成开区间, 则定理不再成立. 先前举的例子 $\sum x(1-x)^n$ 就说明了这一点. 此级数在开区间 $(0,1)$ 上不是一致收敛的.

§6. 级数的逐项微分和逐项积分

我们下一个目标是寻求保证函数级数可逐项微分和可逐项积分的条件. 级数一致收敛的概念在此起着主要的作用.

关于一致收敛级数的和的连续性的定理表明

$$\begin{aligned}A(x_0)&=\lim_{x\to x_0}A(x)=\lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to\infty}A_n(x))=\lim_{x\to x_0}\sum a_n(x)\\&=\sum a_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}A_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x_0}A_n(x)).\end{aligned}$$

换言之, 这个定理允许交换顺次完成的两个极限过程 $x\to x_0$ 和 $n\to\infty$ 的次序. 我们还要证明一个形式很一般的命题, 然后指出, 无论是逐项微分还是逐项积分, 同样可以看作是对于完成关于两个不同类型的集合基的极限过程的次序的交换.

我们来考虑级数的逐项积分的问题.

定理 11 由在 $I=[\alpha,\beta]$ 上黎曼可积的函数组成的在 I 上一致收敛的级数 $\sum a_n(x)$ 的和 $A(x)$ 仍然黎曼可积, 并且

$$B=\int_\alpha^\beta A(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\alpha^\beta a_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

► 根据函数黎曼可积的勒贝格准则, 每个函数 $a_n(x)$ 的间断点的集合 T_n 的测度都等于零. 于是所有这些集合的并集 $T=UT_n$ 的勒贝勒测度也是零. 区间 I 的一切其他的点都是一切函数 $a_n(x)$ 的共同的连续点. 于是, 根据级数 $\sum a_n(x)$ 的一致收敛性, 此级数的和 $A(x)$ 是有界的并且在 $I\setminus T$ 的每点都连续. 那么, 有界函数 $A(x)$ 的间断点的集合的勒贝格测度也是零. 从而根据勒贝格准则, $A(x)$ 在 I 上黎曼可积. 那么对于一切 $n\in\mathbb{N}$ 有

$$\int_\alpha^\beta A(x)dx=\int_\alpha^\beta A_n(x)dx+\int_\alpha^\beta r_n(x)dx.$$

但由于当 $n\to\infty$ 时 $r_n(x)\rightrightarrows 0$, 所以当 $n\to\infty$ 时 $\sup\limits_I|r_n(x)|=\rho_n\to 0$. 由于得知当 $n\to\infty$ 时

$$\left|\int_\alpha^\beta A(x)dx-\int_\alpha^\beta A_n(x)dx\right|\leqslant\int_\alpha^\beta|r_n(x)|dx\leqslant\rho_n(\beta-\alpha)\to 0.$$

即当 $n\to\infty$ 时 $\left(B-\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right)\to 0$, 也就是 $B=\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$. ◄

所得的结果可以用来非常简单地证明级数逐项微分的第一个规则.

定理 12 级数 $\sum a_n(x)$ 可以逐项微分, 如果:

1) 此级数在区间 $I=[\alpha,\beta]$ 的某点 x_0 处收敛;

2) 它的每个被加项 $a_n(x)$ 的导函数都在 I 上连续;

3) 由这些导函数组成的级数 $\sum a_n'(x)$ 在 I 上一致收敛.

更准确地说, 我们有

1) $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x)=A_n(x)\underset{I}{\rightrightarrows}A(x)$

2) $A'(x)=\sum a_n'(x)$.

► 该定理的条件允许使用定理 11 来对级数 $\sum a_n'(x)$ 在以 x_0 和 t 为端点的区间上逐项积分, 此处 $t\in[\alpha,\beta]$. 这时借助于牛顿-莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned}A(t)-A(x_0)=B(t)&=\int_{x_0}^{t}A'(x)dx=\int_{x_0}^{t}\sum a_n'(x)dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{t}a_n'(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(t)-a_n(x_0))=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t).\end{aligned}$$

这个等式表明,$A'(t)=B'(t)=\sum a'_n(t)$. 剩下的是证明, 级数 $\sum a_n(x)$ 在 I 上一致收敛. 我们有

$$\beta_n(t)=\int_{x_0}^{t} r'_n(x)dx=\int_{x_0}^{t}\sum_{k=n+1}^{\infty} a'_k(x)dx$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k(t)-a_k(x_0))=\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k(t),$$

$$\beta_n(t)=B(t)-\sum_{k=1}^{n} b_k(t).$$

但当 $n\to\infty$ 时 $r'_n(t)\underset{I}{\rightrightarrows}0$, 所以存在数列 $\{p_n\}$ 满足条件:$p_n\to 0$ 且对一切足够大的 $n>n_0$ 和一切 $x\in I$, $|r'_n(x)|\leqslant \rho_n$. 因此,

$$|\beta_n(t)|\leqslant\left|\int_{x_0}^{t}|r'_n(x)|dx\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{t}p_n dx\right|\leqslant p_n(\beta-\alpha).$$

这表明, 当 $n\to\infty$ 时 $\beta_n(t)\underset{I}{\rightrightarrows}0$, 即级数 $\sum b_n(t)$ 在 I 上一致收敛. 那么级数 $\sum a_n(x)$ 也与它一道一致收敛, 因为

$$A(t)=\sum a_n(t)=\sum b_n(t)+\sum a_n(x_0),$$

其中 $\sum a_n(x_0)$ 是数值级数. ◀

定理 13 设

1) 级数 $\sum a_n(x)$ 在某点 $x_0\in I=[\alpha,\beta]$ 收敛;

2) 级数 $\sum a'_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

那么级数 $\sum a_n(x)$ 也在 I 上一致收敛, 并且它的和 $A(x)$ 有导数 $A'(x)=\sum a'_n(x)$.

首先指出, 这里不能使用牛顿-莱布尼茨公式, 因为函数 $a'_n(x)$ 可以不是黎曼可积的. 所以必须使用别的办法.

► 先证明初始的级数 $\sum a_n(x)$ 在 I 上一致收敛. 为此, 对这个级数来验证柯西准则的条件成立. 确言之, 我们考察差

$$\sum(a_n(x)-a_n(x_0))=\sum h_n(x).$$

这是可行的, 因为 $\sum a_n(x)=\sum h_n(x)+\sum a_n(x_0)$, 其中数值级数 $\sum a_n(x_0)$ 收敛.

将拉格朗日有限增量公式施用于级数 $\sum h_n$ 的一段, 对于 x_0 和 x 之间的某个 t 有

$$T=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} h_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(a_k(x)-a_k(x_0))\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(x-x_0)a'_k(t)\right|.$$

于是根据柯西准则, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和足够大的 $n > n_0$ 以及任意的 $p \in \mathbb{N}$, 有

$$T \leqslant |x - x_0| \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a'_k(t) \right| < \varepsilon |x - x_0|.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 这表明柯西准则的条件对于级数 $\sum h_n(x)$ 也成立, 从而它与级数 $\sum a_n(x)$ 一道一致收敛.

现在必须证明, 级数 $\sum a_n(x)$ 的和 $A(x)$ 可微, 并且在 I 的任何一点 x_1 处和的导数等于导数的和. 为此考察比式

$$\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \frac{A(x) - A(x_1)}{x - x_1} = \frac{\Delta A_n(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta r_n(x)}{\Delta x} = D_n + R_n,$$

其中 $n \in \mathbb{N}$ 是任意的.

再次使用有限增量公式, 对于 R_n 得估计式

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \frac{r_n(x) - r_n(x_1)}{x - x_1} \right| = \lim_{p \to \infty} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k(x) - a_k(x_1)}{x - x_1} \right| \\ &\leqslant \sup_p \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k(x) - a_k(x_1)}{x - x_1} \right| \leqslant \sup_{\substack{t \in I \\ p \in \mathbb{N}}} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a'_k(t) \right| = T_1. \end{aligned}$$

根据级数 $\sum a'_n(x)$ 的一致收敛性, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 量 T_1 只要 $n > n_1(\varepsilon)$ 足够大就小于 ε. 因此对这样的 n 有 $|R_n| < \varepsilon$. 置 $D(x) = \sum a'_n(x)$ 以及 $d_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a'_k(x) = D(x) - A'_n(x)$. 对于同样的 n 和一切 $x \in I$, 显然有估计式

$$|d_n(x)| \leqslant T_1 < \varepsilon.$$

再者, 函数 $A_n(x)$ 在任何 x 处皆可微, 因此

$$D_n = \frac{\Delta A_n(x)}{\Delta x} = A'_n(x_1) + \gamma_n(x),$$

其中对于任意固定的 n, 当 $x \to x_1$ 时 $\gamma_n(x) \to 0$. 现固定某 $n > n_0(\varepsilon)$, 譬如说 $n = n_0(\varepsilon) + 1$, 并选择数 $\delta(\varepsilon) > 0$ 使当 $0 < |x - x_1| < \delta(\varepsilon)$ 时, 成立不等式 $|\gamma_n(x)| < \varepsilon$. 那么对于所有的这样的 x, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} - D(x_1) \right| &= |D_n + R_n - D(x_1)| = |A'_n(x_1) + \gamma_n(x) + R_n - D(x_1)| \\ &= |\gamma_n(x) - d_n(x_1) + R_n| < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

而这表明, 当 $\Delta x \to 0$ 时 $\dfrac{\Delta A(x)}{\Delta x} \to D(x_1)$, 或者 $A'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$. ◀

第十一讲

§7. 沿集合基的二重极限与累次极限

各种不同类型的累次极限相等的例子清楚地启示我们提出对此问题的可能更一般的观点是合理的. 这里我们来考察此问题与另一概念, 即沿着两个基的总体的极限概念的联系. 我们需要一系列新的定义.

定义 12 设函数 $f(x,y)$ 定义在两个集合 X 和 Y 的笛卡儿乘积 $X\times Y$ 上. 设在集合 X 给定了某个基 B. 我们说函数 $f(x,y)$ 沿着基 B 在集合 Y 上一致收敛到函数 $g(y)$, 如果对于任何 $\varepsilon>0$ 都找得到终端 $b(\varepsilon)\in B$ 使得对于一切 $x\in b(\varepsilon)$ 与 $y\in Y$ 无关地成立着不等式 $|f(x,y)-g(y)|<\varepsilon$. 此时记:

$$f(x,y)\underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}}g(y).$$

现考虑给定在集合 Y 上的基 $D=\{d\}$.

定义 13 若 $f(x,y)$ 沿基 B 收敛于 $g(y)$, 而函数 $g(y)$ 沿基 D 收敛到 l_1, 那么数 l_1 叫作函数 $f(x,y)$ 沿基 B 和基 D 的累次极限. 此极限以符号记作 $\lim\limits_{D}\lim\limits_{B}f(x,y)=l_1$.

改变完成极限过程的次序还可观察另一累次极限,$\lim\limits_{B}\lim\limits_{D}f(x,y)=l_2$. 下面我们引入沿基 B 和 D 的二重极限的概念.

定义 14 把笛卡儿乘积 $X\times Y$ 看作基本集, 它由一切可能的元素对 (x,y) 组成, 其中 $x\in X,y\in Y$. 把由一切可能的形如 $h=b\times d$ 的组合所成的集 H 看作是定义在 $X\times Y$ 上的基, 其中 $b\in B$ 且 $d\in D$. 这个基叫作基 B 和基 D 的笛卡儿乘积, 记作 $H=B\times D$.

容易确认, 集合 H 的确构成一个集合基. 事实上:1) 它的每个元 $h=b\times d$ 显然不空, 且 2) 它的任意两个元的交 $h_1\cap h_2=(b_1\times d_1)\cap(b_2\times d_2)$ 包含有某第三个元 $h_3=b_3\times d_3$, 其中终端 $b_3\in B$, 终端 $d_3\in D$ 满足条件 $b_3\subset b_1\cap b_2, d_3\subset d_1\cap d_2$.

定理 14 (关于沿集合基的二重极限和累次极限的定理) 设 $f(x,y)\underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}}F_1(y)$ 且 $f(x,y)\overset{D}{\to}F_2(x)$. 那么两个累次极限都存在:

$$\lim_{D}\lim_{B}f(x,y)=l_1,\quad \lim_{B}\lim_{D}f(x,y)=l_2,$$

而且沿基 $H=B\times D$ 的二重极限也存在:

$$\lim_{H}f(x,y)=l_3,$$

同时 $l_1 = l_2 = l_3$.

▶ 设 $\varepsilon > 0$ 是任意的. 由于 $f(x,y) \overset{B}{\underset{Y}{\rightrightarrows}} F(y)$, 故存在终端 $b = b(\varepsilon) \in B$ 使对于一切 $x \in b(\varepsilon)$ 和一切 $y \in Y$ 成立条件 $|f(x,y) - F_1(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. 固定某 $x = x_0 \in b(\varepsilon)$. 根据条件 $f(x_0,y) \overset{D}{\to} F_2(x_0)$, 找得到终端 $d = d(\varepsilon) \in D$, 使对于一切 $y_1 \in d, y_2 \in D$ 有 $|f(x_0,y_1) - f(x_0,y_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. 那么对于这些 y_1 和 y_2 成立不等式

$$\begin{aligned}|F_1(y_1) - F_1(y_2)| &= |F_1(y_1) - f(x_0,y_1) + f(x_0,y_1) - f(x_0,y_2) + f(x_0,y_2) - F_1(y_2)| \\ &\leqslant |F_1(y_1) - f(x_0,y_1)| + |f(x_0,y_1) - f(x_0,y_2)| + |f(x_0,y_2) - F_1(y_2)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

根据柯西准则, 由此推出, 对于某 l 有 $F_1(y) \overset{D}{\to} l$, 即 $\lim\limits_{D}\lim\limits_{B} f(x,y) = l$. 现在来证 $f(x,y) \overset{H}{\to} l$, 其中 $H = B \times D$. 由于 $F_1(y) \overset{D}{\to} l$, 故对于任意的 $\varepsilon > 0$ 都找得到终端 $d = d(\varepsilon) \in D$ 使得对于一切 $y \in d(\varepsilon)$ 有 $|F_1(y) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. 接着, 根据 $f(x,y) \overset{B}{\underset{Y}{\rightrightarrows}} F_1(y)$, 找得到终端 $b(\varepsilon)$ 使得当 $x \in b(\varepsilon)$ 和 $y \in Y$ 时有 $|f(x,y) - F_1(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 现取终端 $h(\varepsilon) = b(\varepsilon) \times d(\varepsilon) \in H$. 那么对于 $h(\varepsilon)$ 的一切元 (x,y) 都成立不等式

$$|f(x,y) - l| \leqslant |f(x,y) - F_1(y)| + |F_1(y) - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这表明 $f(x,y) \overset{H}{\to} l$.

剩下的是证 $F_2(x) \overset{B}{\to} l$. 为此, 在对于一切 $(x,y) \in h(\varepsilon) = b(\varepsilon) \times d(\varepsilon)$ 成立的不等式

$$|f(x,y) - F_1(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

中, 对于每个固定的 x 考虑沿基 D 的极限. 得到

$$|F_2(x) - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad x \in b(\varepsilon).$$

这表明 $F_2(x) \overset{B}{\to} l$. ◀

T. П. 鲁卡申柯注意到沿两个集 B 和 D 的总体的累次极限元存在且相等的准则. 此准则由 R.A. 戈登 [32] 于 1995 年证明. 这个命题推广了 A.A. 马尔可夫关于累次级数的相应的准则.

定理 15 (沿集合基的累次极限存在的准则) *设在集 X 上给定了基 B 而在集 Y 上给定了基 D. 考虑定义在 $X \times Y$ 上满足下述条件的函数 $f(x,y)$:*

$$f(x,y) \overset{B}{\to} g(y), \quad f(x,y) \overset{D}{\to} h(x).$$

那么, 两累次极限 $\lim\limits_{D}\lim\limits_{B} f(x,y) = \lim\limits_{D} g(y)$ 和 $\lim\limits_{B}\lim\limits_{D} f(x,y) = \lim\limits_{B} h(x)$ 都存在且相等的必要且充分的条件是: 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 都存在终端 $b(\varepsilon) \in B$ 使得对于每

点 $x \in b(\varepsilon)$ 存在自己的一个终端 $d = d_x(\varepsilon) \in D, d_x(\varepsilon)$ 中的每点 y 都满足不等式 $|f(x,y) - g(y)| < \varepsilon$.

▶ *必要性* 设两个累次极限都存在且都等于 l. 那么

$$\begin{aligned}|f(x,y) - g(y)| &= |f(x,y) - h(x) + h(x) - l + l - g(y)| \\ &\leqslant |f(x,y) - h(x)| + |h(x) - l| + |l - g(y)|.\end{aligned}$$

由于两个累次极限都等于 l, 所以对于任何 $\varepsilon > 0$ 都找得到终端 $b \in B$ 和终端 $d \in D$ 使得对于一切 $x \in b$ 和一切 $y \in d$ 有 $|h(x) - l| < \frac{\varepsilon}{3}$ 和 $|g(y) - l| < \frac{\varepsilon}{3}$. 此外, 对于固定的 $x \in b$, 根据条件 $f(x,y) \xrightarrow{D} h(x)$, 存在终端 $d_1 \in D$, 使得对于一切 $y \in d_1$ 有 $|f(x,y) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. 现取 b 为 $b(\varepsilon)$, 取属于 d 和 d_1 的交的某元素 $d_0 \in D$ 为 $d_x(\varepsilon)$. 则对于一切点 $x \in b(\varepsilon)$ 和一切点 $y \in d_x(\varepsilon)$, 成立全部三个不等式, 从而 $|f(x,y) - g(y)| < \varepsilon$. 必要性获证.

充分性 任取 $\varepsilon > 0$, 考察定理条件中的 $b(\varepsilon) \in B$. 我们来验证关于 $g(y)$ 沿着基 D 收敛的柯西准则成立. 为此考虑固定的辅助的点 $x \in b(\varepsilon)$ 和对应于它的终端 $d_x(\varepsilon) \in D$. 根据收敛性 $f(x,y) \xrightarrow{D} h(x)$, 由柯西准则推出, 对于该点 x 存在终端 $d \in D$ 使得对于一切 $y_1, y_2 \in d$ 成立不等式 $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon$. 现取一终端 $d_0 \subset d \cap d_x(\varepsilon)$. 对于任意的属于终端 $d_0 \in D$ 的点 y_1 和 y_2, 量 $\Delta = |g(y_1) - g(y_2)|$ 如下估计:

$$\Delta \leqslant |g(y_1) - f(x,y_1)| + |f(x,y_1) - f(x,y_2)| + |f(x,y_2) - g(y_2)| < 3\varepsilon.$$

这就表明, 对于某 l 成立收敛性:

$$g(y) \xrightarrow{D} l.$$

剩下的是证明 $h(x) \xrightarrow{B} l$. 为此重新任取 $\varepsilon > 0$ 及相应的终端 $b(\varepsilon) \in B$, 而对于每个固定的点 $x \in b(\varepsilon)$ 来估计量 $\Delta_1 = |h(x) - l|$. 从条件 $f(x,y) \xrightarrow{D} h(x)$ 和 $g(y) \xrightarrow{D} l$ 推出, 存在终端 $d \in D$, 使得对于一切 $y \in d$ 成立不等式

$$|f(x,y) - h(x)| < \varepsilon \quad 和 \quad |g(y) - l| < \varepsilon.$$

取辅助点 $y \in d \cap d_x(\varepsilon)$. 那么成立估计式

$$\Delta_1 = |h(x) - l| \leqslant |h(x) - f(x,y)| + |f(x,y) - g(y)| + |g(y) - l| < 3\varepsilon.$$

这就证明了 $h(x) \xrightarrow{B} l$. ◀

注 若在定理 15 的叙述中假设 $d_x(\varepsilon) = Y$, 则得到沿基 B 关于 Y 一致收敛的条件. 此时定理的结论是定理 14 的推论. 于是, 定理 15 使得可以在较弱的限制之下交换极限过程. 不过这时二重极限在一般情况下已不存在, 所以两个定理各有自己的应用范围. 然而, 如果在定理 15 的条件中认为, 作为 $d_x(\varepsilon)$ 可以取同一个与点 $x \in b(\varepsilon)$ 无关的终端 $d(\varepsilon)$, 那么二重极限存在且等于累次极限.

我们还指出, 定理 15 的结论作为累次极限存在且相等的准则, 关于所考虑的两个基是对称的, 但是, 两个基在定理的条件中是不平等的. 这给出了在应用定理时的一定的选择自由.

第十二讲

§8. 幂级数

我们记得, 幂级数乃是形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = A(x)$ 的级数, 其中 x_0 是固定的实数. 幂级数的基本性质实际上与 x_0 无关, 因此常常认为 $x_0 = 0$.

前面见到的泰勒级数都是幂级数的例子. 其实, 任何幂级数都是自己的和的泰勒级数. 我们来考虑与确定幂级数的收敛域相关的问题.

定义 15 *数 ρ 叫作幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径, 如果此级数对于一切满足条件 $|x-x_0|<\rho$ 的 x 收敛而当 $|x-x_0|>\rho$ 时发散.*

下述定理保证了此定义是得体的.

定理 16 (柯西–阿达马定理) *设给定幂级数 $\sum f_n(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$. 我们来考察数列 $\{b_n = |a_n|^{\frac{1}{n}}\}$. 那么:*

1) 若 $\{b_n\}$ 是无界数列, 则此级数对于一切 $x \neq x_0$ 发散;

2) 若 $\{b_n\}$ 有界且 $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n \neq 0$, 则 $\rho = \dfrac{1}{l}$;

3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 则所给的级数对于一切 $x \in \mathbb{R}$ 都收敛.

我们记得, 任何有界数列皆有上极限和下极限.

► 为简化记号, 认为 $x_0 = 0$. 对于级数的通项有等式

$$|f_n(x)| = |a_n x^n| = b_n^n |x|^n = (b_n|x|)^n.$$

在情形 1), 通项 $f_n(x)$ 不趋于零, 所以级数发散 $(x \neq 0)$. 在情形 2) 对于固定的 $|x| < \dfrac{1}{l}$, 使用极限形式的柯西收敛判别法于级数 $\sum |f_n(x)|$, 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x)|^{\frac{1}{n}} = |x| \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n < \frac{l}{l} = 1.$$

这表明, 一切使 $|x| < \dfrac{1}{l}$ 的 x 皆属于级数的收敛域. 而若 $|x| > \dfrac{1}{l}$, 则级数的通项如在情形 1) 一样, 不收敛于零, 从而级数发散.

在情形 3), 还是根据柯西判别法, 对于一切 x 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x)|^{\frac{1}{n}} = |x| \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = 0 < 1.$$

所以级数收敛. ◀

注 若 $|x|=\rho$, 则所证定理中的级数 $\sum f_n(x)$ 既可以是收敛的也可以是发散的. 例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\ln\frac{1}{1-x},$$

其收敛半径 $\rho=1$, 且对于 $x=-1$ 级数收敛, 而对于 $x=1$ 级数发散.

定理 17 设 $\rho>0$ 是幂级数 $\sum a_nx^n$ 的收敛半径且 $0<r<\rho$. 那么在闭区间 $[-r,r]$ 上此级数绝对且一致收敛, 从而其和 $A(x)$ 在此区间上连续.

► 点 $r_1=\dfrac{\rho+r}{2}<\rho$ 属于级数的收敛区域, 因此对于 $x=r_1$, 级数的通项 $a_nr_1^n$ 有界, 即对于某 $c>0$ 和一切 $n|a_n|r_1^n<c$. 根据 $r<r_1$, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r_1^n\left(\frac{r}{r_1}\right)^n\leqslant c\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n=\frac{c}{1-\frac{r}{r_1}}.$$

于是, 收敛级数 $\sum|a_n|r^n<\infty$ 是级数 $\sum a_nx^n$ 在闭区间 $[-r,r]$ 上的优控. 因此, 在此闭区间上级数绝对且一致收敛.

在同样的条件下, 级数 $\sum a_nx^n$ 的和 $A(x)$ 是闭区间 $[-r,r]$ 上的连续函数, 由于级数在此区间上一致收敛而它的项皆连续. ◀

定理 18 若 $\rho>0$ 是幂级数 $\sum a_nx^n$ 的收敛半径, 则在任意的闭区间 $[-r,r]\subset(-\rho,\rho)$ 上, 此级数可以逐项微分和逐项积分.

► 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的形式逐项微分给出级数

$$x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n,$$

而其形式逐项积分得到级数

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n=x\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n.$$

对于柯西–阿达马定理中的量 $|b_n|^{\frac{1}{n}}$ 和 $|c_n|^{\frac{1}{n}}$ 有等式

$$|b_n|^{\frac{1}{n}}=n^{\frac{1}{n}}|a_n|^{\frac{1}{n}},|c_n|^{\frac{1}{n}}=(n+1)^{-\frac{1}{n}}|a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

而由于当 $n\to\infty$ 时 $(n+1)^{-\frac{1}{n}}\to1$, 所以根据此定理, 全部三个级数的收敛半径都相等, 从而这些级数都在任意的形如 $[-r,r],0<r<\rho$ 的闭区间上一致收敛. 于是可以对它们在此收敛开区间上逐项微分和逐项积分. ◀

定理 19 (阿贝尔定理) 设级数 $\sum a_nx^n$ 在点 $x=c>0$ 处收敛. 那么它的和 $A(x)$ 在闭区间 $I=[0,c]$ 上连续. 而若 $c<0$ 则函数 $A(x)$ 在闭区间 $[c,0]$ 上连续.

► 先考虑 $c>0$ 的情形. 将此级数的通项 a_nx^n 写成 $\alpha_n(x)\beta_n(x)$, 其中 $\alpha_n(x)=a_nc^n$ 而 $\beta_n(x)=\dfrac{x^n}{c^n}$. 那么对此级数在区间 $I=[0,c]$ 上可使用阿贝尔的一致收敛判别法, 这是因为:

1) 级数 $\sum a_nc^n$ 与 x 无关, 从而在 I 上一致收敛;

2) 序列 $\{\beta_n(x)\}$ 单调且在 I 上一致有界, 由于对于一切 $x\in I\left|\dfrac{x^n}{c^n}\right|\leqslant 1$.

于是, 此级数的和 $A(x)$ 在 I 上连续. 情形 $c<0$ 借助于替换 $y=-x$ 归结为已考虑过的情形. ◄

定理 20 (幂级数的系数通过它们和在展开的点的导数的表示) 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=A(x)$$

有正的收敛半径 ρ. 那么 $a_0=A(x_0)$, 且对于一切 $n\geqslant 1$ 有等式 $a_n=\dfrac{A^{(n)}(x_0)}{n!}$.

► 根据定理 18, 可对等式 $A(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 逐项微分. 因此在 $x=x_0$ 时有

$$\begin{aligned}
A(x_0)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x_0-x_0)^n=a_0,\\
A'(x_0)&=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn(x_0-x_0)^{n-1}=a_1\cdot 1!,\\
A''(x_0)&=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)(x_0-x_0)^{n-2}=a_2\cdot 2!,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A^{(k)}(x_0)&=\sum_{n=k}^{\infty}a_nn(n-1)\cdots(n-k+1)(x_0-x_0)^{n-k}=a_k\cdot k!.
\end{aligned}$$

由此就推出所要的结论. ◄

于是, 具有非零收敛半径的幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 永远是自己的和 $A(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数展开. 函数 $A(x)$ 取在不同的点 x_0 和 x_1 处的两个泰勒展开式的收敛半径之间有怎样的联系呢? 这个问题是有意思的. 这里作为例子给出下述定理.

定理 21 设 $R_0>0$ 是幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n=A(x)$ 的收敛半径. 考虑函数 $A(x)$ 在点 x_1 处的另一泰勒级数展开式, 其中 $|x_0-x_1|=r<R_0$. 那么, 若 $b_0,b_1,\cdots$ 是此展开式的系数而 R_1 是它的收敛半径, 则 $R_1\geqslant R_0-r$ 且

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_1)^n,\quad 当\quad |x-x_1|<R_1时.$$

► 为简单起见, 认为 $x_0=0$, 且令 $x-x_1=y$. 那么 $x-x_0=x=y+x_1,|x_1|=|x_1-x_0|=r$. 若 $|y|<R_0-r$, 则 $|y|+|x_1|<R_0-r+r=R_0$. 因此, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|(|y|+$

$|x_1|)^n$ 收敛. 于是累次级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x_1^{n-k}$ 绝对收敛, 从而它的项可以任意重排. 据此, 得

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x_1^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x_1^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k,
\end{aligned}
$$

其中

$$
b_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x_1^{n-k} = \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x_1^{n-k}.
$$

于是, 我们查明了函数 $A(x)$ 在点 $x_1(|x_1-x_0|=r<R_0)$ 处的泰勒级数展开式 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k$ 当 $|y|<R_0-r$ 时绝对收敛到和 $A(x)$. ◀

定义 16 函数 $A(x)$ 叫作是在点 $x=x_0$ 处解析的, 如果在此点的某邻域内它可以表示成幂级数, 即它的泰勒级数.

定理 21 表明, 幂级数的和在收敛域内部的每点处都解析. 我们还注意到, 收敛域的内部总是开区间, 可以是无穷区间, 因此也谈论幂级数的收敛开区间.

可能有这样的情形, 那就是当把幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 的和 $A(x)$ 在其收敛域内的某点 $x_1 \neq x_0$ 展开时, 新的幂级数 $\sum b_n(x-x_1)^n = A(x)$ 的收敛开区间超出了先前的收敛开区间的界限. 例如考察展开式

$$
\begin{aligned}
A(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots &= \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{x-1}{2\cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2} - \cdots.
\end{aligned}
$$

这里, 依 x 的幂展开的级数的收敛半径 $R_0=1$, 收敛开区间为 $(-1,1)$; 而依 $(x-1)$ 的幂展开的级数的收敛半径 $R_1=2$, 收敛开区间为 $(-1,3)$.

定义 17 通过把解析函数在与其初始定义域的中心不同的点处展开成幂级数的途径来扩展其定义域的方法叫作函数的解析延拓原理.

在研究复变数的幂级数时, 此原理具有独特的意义问题在于, 在幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 中形式上用复数 $z=a+bi$ 代替实数 x, 可以自然地把和函数 $A(x)$ 的定义域扩展到复平面上去. 为此只需引入由复数组成的级数的收敛概念就可以了. 最简单的方法是认为 $\sum(a_n+ib_n)$ 收敛到复数 $A+Bi$, 如果 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 同时分别收敛

到 A 和 B 的话. 可以很简单地证明, 对于复数项级数的收敛性, 魏尔斯特拉斯的控制判别法依然成立. 但若级数 $\sum a_n x^n$ 在某点 $x = x_0 \neq 0$ 处收敛, 则对于一切正数 $r < |x_0|$, 级数 $\sum |a_n| r^n$ 也收敛. 而若 $z = a + bi$ 且 $|z| = r$, 则级数 $\sum a_n z^n$ 也收敛. 这表明, 级数 $\sum a_n z^n$ 的收敛域在复平面 $\mathbb{C}$ 上包含以原点为中心, 以 $R = |x_0|$ 为半径的圆盘. 使用解析延拓原理, 可以定义解析函数在复平面的其他点处的值. 重要的是, 所说的程序实质上给出了一定意义上的单值延拓. 这样的方法可以把一切初等函数单值地延拓到复平面上. 例如, 对于实数 a 和 b, 有

$$e^{a+ib} = e^a(\cos\ b + i \sin\ b).$$

复平面上的解析函数在数学中起着很重要的作用. 与其相关的问题构成了数学的一个广阔的领域 —— 复变函数论的内容. 复变函数论是另外的一门课程.

问题 设 $f(x)$ 是在开区间 (a, b) 上无穷可微的函数. 用k_n来代表方程$f^{(n)}(x) = 0$ 的解的个数. 设对于某个 C 和一切 $n \in \mathbb{N} k_n < C$. 证明函数是在开区间 (a, b) 上解析的.

第十三讲

§9. 无穷乘积

定义 18 *考虑正数序列 $\{b_n\}$. 它的一切项的形式无穷乘积*

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots$$

叫作无穷数值乘积, 或无穷乘积, 或简称为乘积.

无穷乘积常记作:

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot = \prod_{n=1}^{\infty} b_n = \prod b_n.$$

定义 19 *形如 $\prod_n = b_1 \cdot \cdots \cdot b_n$ 的有限乘积 $\prod_n$ 叫作无穷乘积 $\prod\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 的第 n 部分积.*

定义 20 *如果数列 $\{\prod_n\}$ 收敛到数 $\prod \neq 0$(即 $\prod > 0$), 则无穷乘积叫作是收敛的 (收敛到数 $\prod$). 若 $\prod = 0$, 则说此无穷乘积发散到零, 而若 $\prod_n \to +\infty$, 则说无穷乘积发散到无穷. 若极限不存在, 则无穷乘积简单地叫作是发散的.*

命题 5 (无穷乘积收敛的必要条件) *若 $\prod b_n$ 收敛, 则当 $n \to \infty$ 时 $b_n \to 1$.*

► 若 $\prod_n \to \prod \neq 0$, 则当 $n \to \infty$ 时

$$b_n = \frac{\prod_n}{\prod_{n-1}} \to \frac{\prod}{\prod} = 1. \quad ◄$$

命题 6 无穷乘积 $\prod b_n$ 收敛等价于级数 $\sum \ln b_n$ 收敛, 而且

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln b_n.$$

► 我们有 $\ln \prod_n = \sum_{k=1}^{n} \ln b_k$. 函数 $y = \ln x$ 建立了射线 $(0, +\infty)$ 与全实轴 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 之间的连续的双方单值对应. 因此, 由于对于一切 $n \in \mathbb{N}, b_n$ 都是正的, 可以在等式的一边取极限, 只要它的另一边收敛, 而此时 $\ln \prod = \sum_{n=1}^{\infty} \ln b_n$. 无穷乘积 $\prod$ 发散到零等价于上式右边发散到 $-\infty$.[①] ◄

注 显然, 删除或添加任意有限个非零因子不影响无穷乘积的收敛性. 所以, 可以允许无穷乘积的有限多项取负值.

定义 21 无穷乘积 $\prod_{k=1}^{\infty} b_k$ 叫作是绝对收敛的, 如果级数 $\sum \ln b_k$ 绝对收敛. 这说的是级数 $\sum |\ln b_n|$ 收敛. 收敛的无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ 如果不是绝对收敛的, 就叫作是条件收敛的.

从上面的命题和关于绝对收敛的级数必收敛的定理直接推出下述定理.

定理 22 绝对收敛的乘积必是收敛的.

由于我们认为对于一切 $n, b_n > 0$, 所以常把数 b_n 写成 $b_n = 1 + a_n$, 其中 $a_n > -1$. 那么

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

定理 23 (无穷乘积绝对收敛的准则) 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 绝对收敛, 当且仅当级数 $\sum |a_n|$ 收敛.

► 由于当 $n \to \infty$ 时 $1 + a_n \to 1$, 所以 $a_n \to 0$. 然而当 $x \to 0$ 时

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1,$$

所以当 $n \to \infty$ 时有

$$\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1, \quad \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} \to 1.$$

①此句原文为"等式左边发散到零等价于它的右边发散到 $-\infty$"—— 译者注.

因此, 对于足够大的 $n > n_0$ 成立不等式

$$\frac{1}{2} < \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} < \frac{3}{2}.$$

若级数 $\sum|\ln(1+a_n)|$ 收敛, 则它是级数 $\sum\frac{|a_n|}{2}$ 的优控, 而若级数 $\sum|a_n|$ 收敛, 则它是级数 $\sum\frac{2}{3}|\ln(1+a_n)|$ 的优控. 这就表明, 级数 $\sum|a_n|$ 和 $\sum|\ln(1+a_n)|$ 同收敛和同发散. ◄

下述命题是此定理的推论.

命题 7 如果对于足够大的 $n > n_0$, 所有的数 a_n 都同号, 那么乘积 $\prod(1+a_n)$ 的收敛性与级数 $\sum a_n$ 的收敛性等价.

► 无论是级数收敛还是乘积收敛, 都蕴含关系式

$$a_n \to 0, \ln(1+a_n) \to 0, \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

由此推出, 对于足够大的 $n > n_0, \ln(1+a_n)$ 保持与 a_n 同号. 这表明, 级数 $\sum a_n$ 和 $\sum \ln(1+a_n)$ 以及乘积的收敛性与它们的绝对收敛性等价. 现使用定理 23 就得所要的结论. ◄

我们来看几个无穷乘积的例子.

例 1 欧拉的 Γ 函数. 依定义有

$$\Gamma(s) = \frac{1}{se^{\gamma s}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}e^{\frac{s}{n}},$$

其中 $s \neq 0, -1, -2, \cdots$ 是任意的实数 (甚至是复数, 只要把定义 20 扩展到复数), γ 是欧拉常数,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln\ n\right) = 0.577\cdots.$$

定义 Γ 函数的无穷乘积对于任何 $s \neq 0, -1, -2, \cdots$ 绝对收敛, 因为对于足够大的 $n > n_0$ 根据带拉格朗日型余项的泰勒公式, 成立估计式

$$|\ln\ b_n| = \left|\ln\left(\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}e^{\frac{s}{n}}\right)\right| = \left|\frac{s}{n}-\ln\left(1+\frac{s}{n}\right)\right| < \frac{s^2}{n^2},$$

从而收敛级数 $\sum\frac{s^2}{n^2}$ 是级数 $\sum|\ln\ b_n|$ 的优控.

命题 8 (欧拉公式) 下述公式成立:

$$\Gamma(s) = s^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}.$$

► 已经证明, 定义 Γ 函数的无穷乘积在自己的定义域的任意点处都绝对收敛. 因此由 Γ 函数的定义得到

$$\Gamma(s)=s^{-1}\lim_{m\to\infty}e^{-s\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln\ m\right)}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}e^{\frac{s}{n}}$$
$$=s^{-1}\lim_{m\to\infty}m^{s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}=s^{-1}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}$$
$$=s^{-1}\lim_{m\to\infty}\left(\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-s}$$
$$=s^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}.$$ ◄

命题 9 (关于欧拉的 Γ 函数 Γ(s) 的函数方程) 下述公式成立:

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad \Gamma(1)=1.$$

► 按欧拉公式,$\Gamma(1)=1$, 而且

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)}=\frac{s}{s+1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}}\cdot\frac{1+\dfrac{s}{n}}{1+\dfrac{s+1}{n}}$$
$$=\frac{s}{s+1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\frac{n+s}{n+s+1}$$
$$=\frac{s}{s+1}\lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(m+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m}\frac{(1+s)\cdot\cdots\cdot(m+s)}{(2+s)\cdot\cdots\cdot(m+1+s)}$$
$$=\frac{s}{s+1}\lim_{m\to\infty}(s+1)\frac{m+1}{m+1+s}=s.$$

由此推出 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$. ◄

从命题 9 直接得到下面的推论.

推论 对于自然数 $n,\Gamma(n+1)=n!$.

后面还要证明, 当 $s>0$ 时 $\Gamma(s)$ 有积分表示

$$\Gamma(s)=\int_{0}^{\infty}x^{s-1}e^{-x}dx.$$

例 2 对于一切实数 x, 下述无穷乘积收敛:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^{2}}{\prod^{2}n^{2}}\right)=\frac{\sin\ x}{x}.$$

此等式将在下面证明, 而收敛性从命题 3 推出.

例 3 对于黎曼 ζ 函数的无穷乘积. 当 $s>1$ 时, 函数 $\zeta(s)$ 由收敛级数 $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 定义. 设 $p_1=2, p_2=3, p_3=5, \cdots$ 是依自然数顺序编号的素数序列.

命题 10 (黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$ 的无穷乘积的欧拉公式) 当 $s>1$ 时成立下述公式:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}.$$

► 我们有

$$\prod\nolimits_k=\prod_{m=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_m^s}\right)^{-1}=\prod_{m=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_m^s}+\frac{1}{p_m^{2s}}+\cdots\right).$$

由于不等式 $p_k>k$ 对于一切 $k\in\mathbb{N}$ 成立, 那么打开括号就得到

$$\prod\nolimits_k>\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^s}.$$

另一方面, 显然有 $\prod_k=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{a_m^s}$, 其中 $\{a_m\}$ 是自然数的某个子数列, 它不含重复的元, 这是由于自然数的素因子展开具有单值性. 由此得到不等式

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{a_m^s}=\prod\nolimits_k>\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^s}.$$

于此令 $h\to\infty$ 过渡到极限就得到所要的结果. ◄

对于 $s=1$, 成立估计式

$$\prod\nolimits_k=\sum_{m=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_m}+\frac{1}{p_m^2}+\cdots\right)>1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}.$$

因此, 乘积 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}$ 发散到 $+\infty$, 从而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}$ 也同它一道发散.

第十四讲

§10. 无穷行列式

无穷阶行列式的概念的产生, 联系于对于无穷多个自变数的无穷多个线性方程的方程组的研究. 在研究确定月球轨道的近日点的运动的问题时, 首次产生了对于考

察此种方程组和此种行列式的要求. 此项研究是 G. 希尔于 1886 年引入的.H. 庞加莱给出了希尔方法的严格的数学根据. 无穷行列式方法还有一个应用采纳在 E. 弗雷德霍姆 (1903) 研究线性积分方程的工作中.

设 $\{b_{mn}\}$ 是二重实数序列. 用 $D_m = \|B_m\|$ 表示方阵 $B_m = (b_{kl})$ 的行列式, 其中脚标 k 和 l 跑遍从 1 到 m 的值. 在此矩阵中, 数 b_{kl} 位于第 k 行和第 l 列相交之处, 此矩阵的主对角线由数 b_{kk} 组成,$k = 1, \cdots, m$. 我们用 B 代表无穷矩阵 (b_{mn}), 其中 $m, n = 1, 2, \cdots$.

定义 22 若行列式序列 $\{D_m\}$ 当 $m \to \infty$ 时收敛到数 D, 则说矩阵 B 的无穷行列式$D = \|B\|$ 收敛到数 D, 或说它等于 D. 若数列 $\{D_m\}$ 发散, 则说此行列式发散.

称行列式 D_m 为无穷行列式 D 的部分行列式. 我们引入一些新的记号. 对于矩阵 B 的对角线元素置 $b_{nn} = 1 + a_{nn}$. 而若 $m \neq n$, 则认为 $a_{mn} = b_{mn}$.

定义 23 在一切级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ 都收敛且乘积

$$P = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|\right)$$

也收敛的前提下, 称无穷乘积 P 为无穷行列式 D 的庞加莱优控.

定义 24 有限乘积

$$P_m = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \sum_{l=1}^{m} |a_{kl}|\right)$$

叫作是行列式 D_m 的庞加莱优控.

定理 24 (庞加莱引理) 对于一切 $m \in \mathbb{N}$ 成立下列估计:

1) $|D_m| \leqslant P_m$;

2) $|D_{m+1} - D_m| \leqslant P_{m+1} - P_m$.

► 1. 行列式 D_m 由 $m!$ 个形如 $(-1)^{c(\sigma)} b_{1l_1} \cdot \cdots \cdot b_{ml_m}$ 的被加数组成. 这里 $c(\sigma)$ 是排列 $\sigma = (l_1, \cdots, l_m)$ 的偶性函数, 当 σ 为偶排列时 $c(\sigma) = 0$, 而对于奇排列 $\sigma, c(\sigma) = 1$. 因此,

$$|D_m| \leqslant \sum_{\sigma} |b_{1l_1} \cdots b_{ml_m}| \leqslant \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{m} |b_{kl}|\right) \leqslant \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \sum_{l=1}^{m} |b_{kl}|\right) = P_m.$$

结论 1) 获证.

2. 按最后一行展开行列式 D_{m+1}. 得

$$D_{m+1} = a_{m+1,1} A_{m+1,1} + \cdots + a_{m+1,m} A_{m+1,m} + (1 + a_{m+1,m+1}) D_m.$$

这里 $A_{m+1,l}$ 是矩阵 B_{m+1} 中元素 $a_{m+1,l}$ 的代数余子式

$$A_{m+1,l}=(-1)^{m+1+l}\begin{vmatrix}1+a_{11} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,m+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{m,l-1} & a_{m,l+1} & \cdots & a_{m,m+1}\end{vmatrix}.$$

像上面 (第 4) 款的证明) 一样, 有

$$|A_{m+1,l}|\leqslant\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\neq l}}^{m+1}|b_{kn}|\right)\leqslant\prod_{k=1}^{m}\left(1+\sum_{n=1}^{m+1}|a_{kn}|\right)=Q_m.$$

我们指出,$Q_m\geqslant P_m>0$ 且 $P_{m+1}=Q_m\left(1+\sum\limits_{l=1}^{m+1}|a_{ml}|\right)$. 因此

$$\begin{aligned}|D_{m+1}-D_m|&\leqslant|a_{m+1,1}||A_{m+1,1}|+\cdots+|a_{m+1,m}||A_{m+1,m}|+|a_{m+1,m+1}||D_m|\\&\leqslant Q_m(|a_{m+1,1}|+\cdots+|a_{m+1,m}|+|a_{m+1,m+1}|)\\&=P_{m+1}-Q_m\leqslant P_{m+1}-P_m.\quad◄\end{aligned}$$

定理 25 (庞加莱定理) *无穷行列式收敛, 如果它的对角线元的无穷乘积绝对收敛且由非对角线元组成的二重级数绝对收敛.*

► 由于 $b_{mm}=1+a_{mm}$, 所以对角线元素的乘积 $\prod\limits_{m=1}^{\infty}b_{mm}$ 的绝对收敛等价于级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|a_{mm}|$ 的收敛. 此外, 根据条件, 还有二重级数 $\sum\limits_{m\neq n}|a_{mn}|$ 收敛. 于是就有无穷乘积 P 收敛, 其中

$$P=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}|a_{mn}|\right),$$

因为它的收敛性由二重级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{mn}|$ 的收敛性所保证. 把矩阵 B 的行列式 D 的值表示成级数和的形式

$$D=D_1+(D_2-D_1)+(D_3-D_2)+\cdots=d_1+d_2+d_3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}d_n.$$

根据定理 24, 对于一切 $n\in\mathbb{N}$ 成立估计式

$$|d_{n+1}|=|D_{n+1}-D_n|\leqslant P_{n+1}-P_n=p_{n+1},$$

其中 P_n 是行列式 D_n 的庞加莱优控且 $P_n\leqslant P$. 由此推出, 收敛的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{n+1}=P-P_1$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_{n+1}$ 的优控. 于是后者收敛, 也就是说它的部分和 D_n 的序列收敛. 而这就表明无穷行列式 D 收敛. ◄

注 类似的定理对于形如 $B=(b_{mn}), -\infty<m,n<\infty$, 的矩阵 B 的无穷行列式 D 成立. 这里部分行列式 D_m 和部分矩阵 B_m 的形状是

$$D_m=\|B_m\|,\quad B_m=(b_{kl}), -m<k,l<m.$$

问题 证明科赫 (Kox) 定理: 形如

$$D=\lim_{m\to\infty}\begin{vmatrix}1 & \alpha_1 & \cdots & 0 & 0\\ \beta_1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_m\\ 0 & 0 & \cdots & \beta_m & 1\end{vmatrix}$$

的无穷行列式 D 绝对收敛的充分必要条件是级数 $\sum\alpha_n\beta_n$ 绝对收敛. 此处行列式 D 绝对收敛指的是级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|D_{m+1}-D_m|$ 收敛.

最后, 我们再给出一个定义, 它推广了庞加莱优控的概念.

定义 25 设 $\{A_n(x)\}$ 是一个函数序列, 而 $\{B_n\}$ 是一个数列, 并且当 $n\to\infty$ 时 $B_n\to B$. 还设对于一切 $n\in\mathbb{N}$ 和每个 $x\in D$ 都成立不等式 $|A_{n+1}(x)-A_n(x)|\leqslant B_{n+1}-B_n$. 那么数列 $\{B_n\}$ 叫作是函数列 $\{A_n(x)\}$ 在集合 D 上的优控.

§11. 等度连续及阿尔泽拉定理

我们来证明阿尔泽拉 (Arzelà) 定理. 此定理主要是对于超出数学分析课程基本内容的应用是重要的.

定义 26 函数的集合 M 叫作是在闭区间 $I=[a,b]$ 上等度连续的, 如果对于任何 $\varepsilon>0$ 都找得到数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对于任意的函数 $f(x)\in M$ 和任意的满足条件 $|x_1-x_2|<\delta$ 的 $x_1\in I$ 和 $x_2\in I$, 都成立不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

定理 26 (阿尔泽拉定理) 若函数的无穷集 M 在闭区间 I 上一致有界且等度连续, 则从任何函数序列 $\{f_n(x)\}\subset M$ 中都可以选出一个子列 $\{f_{n_x}(x)\}$, 它在 I 上一致收敛到某个在 I 上连续的函数 $f_0(x), f_0(x)$ 不必属于 M.

► 为简单起见, 认为 $I=[0,1]$. 证明的思想是, 在使用柯西准则时, 以允许的误差代替一个任意的点以与它接近的分母尽可能小的二进有理点.

把 I 中的全体二进有理数, 即形如 $\dfrac{a}{2^k}$ 的既约分数, 其中 a 为整数, k 为自然数, 排成一列 $\{x_n\}$, 对于分母的不同幂次 k 按增序排, 而对于同一个分母 2^k, 则按分子 a 的增序排. 于是 $x_1=0, x_2=1, x_3=\dfrac{1}{2}, x_4=\dfrac{1}{4}, x_5=\dfrac{3}{4},\cdots,x_{2^k+1}=\dfrac{2^k-1}{2^k}, x_{2^k+2}=\dfrac{1}{2^{k+1}}, x_{2^k+3}=\dfrac{3}{2^{k+1}},\cdots,k\in\mathbb{N}$. 现考虑数集 $B_1=\{f_x(x_1)\}$, 其中 $\{f_n(x)\}$ 是原始的

函数列,$f_n(x) \in M$. 根据加于 M 的条件, 集合 B_1 是有界的. 于是根据波尔查诺–魏尔斯特拉斯定理, 从序列 B_1 中可选出收敛的子列 $\{f_{n_m}(x_1)\}$.

令 $g_{1,m}(x) = f_{n_m}(x), m \in \mathbb{N}$. 得函数列 $G_1 = \{g_{1,m}(x)\}$, 它是原始函数列 $\{f_n(x)\}$ 的一个子列, 它的性质是 $\{g_{1,m}(x_1)\}$ 收敛到某数 y_1.

用同样的原则, 从 G_1 出发, 选出它的一个子列记为 $G_2 = \{g_{2,m}(x)\}$, 满足 $\lim\limits_{m\to\infty} g_{2,m}(x_2) = y_2$.

无限地继续这个手续, 就得到一列函数列 $G_k = \{g_{k,m}(x)\}_{m=1}^{\infty}, k = 1, 2 \cdots$, 它具有这样的性质:$G_{k+1}$ 是 G_k 的子序列,G_1 是原始序列 $\{f_n(x)\}$ 的子序列,G_k 在点 x_k 处收敛到一个数 y_k, 即 $\lim\limits_{m\to\infty} g_{k,m}(x_k) = y_k$.

现考虑"对角线"函数列 $\{h_n(x)\}$, 其中 $h_n(x) = g_{n,n}(x)$. 由于当 $n \geqslant k$ 时

$$h_n(x) = g_{n,n}(x) \in G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_k$$

所以 $\{h_n(x)\}_{n=k}^{\infty}$ 是 G_k 的子列. 从而 $\{h_n(x_k)\}_{n=k}^{\infty}$ 是 $\{g_{k,n}(x_k)\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x_k) = y_k, k \in \mathbb{N}$.

最后我们来证明函数列 $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足一致收敛的柯西准则. 考虑任意的数 $\varepsilon > 0$ 并证明存在号码 $n_0 = n_0(\varepsilon)$, 使得对于一切 m 和 $n > n_0$, 对于一切 $\infty \in I$ 一致地成立 $|h_m(x) - h_n(x)| < \varepsilon$. 为此, 使用函数集 M 的等度连续性, 找到数 $\delta = \delta\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, 使得对于一切 y_1 和 $y_2 \in I$, 只要 $|y_1 - y_2| < \delta$, 就对于一切 $f(x) \in M$ 都有 $|f(y_2) - f(y_1)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. 选取数 k 满足条件 $\dfrac{\delta}{2} \leqslant 2^{-k} < \delta$, 把全部分母不超过 2^k 的二进有理点 $x_1, \cdots, x_{2^k+1}$ 重新按它们的值的增序排列. 若 $z_1, \cdots, z_{2^k+1}$ 是它们的重排, 则对于一切 $s = 1, \cdots, 2^k$, $z_{s+1} - z_s = 2^{-k} < \delta$. 由于每个数列 $\{h_n(z_s)\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛, 所以存在号码 n_s 使得对于一切 n 和 $m > n_s$ 有

$$|h_m(z_s) - h_n(z_s)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

现在, 作为 $n_0(\varepsilon)$ 我们取号码 $n_0(\varepsilon) = \max\limits_{1\leqslant s\leqslant 2^k+1} n_s$ 并证明它满足所需的条件. 实际上, 设 $x \in [0, 1]$ 且 z_t 是 $z_1, \cdots, z_{2^k+1}$ 中与它最接近的数. 显然 $|x - z_t| < 2^{-k} < \delta$. 由此推出 $|h_m(x) - h_m(z_t)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ 对于一切 $m \in \mathbb{N}$ 成立.

最后, 对于一切 m 和 $n > n_0(\varepsilon) \geqslant n_t$, 有

$$\begin{aligned}|h_m(x) - h_n(x)| &\leqslant |h_m(x) - h_m(z_t)| + |h_m(z_t) - h_n(z_t)| + |h_n(z_t) - h_n(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

这表明, 根据柯西准则, 函数列 $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致收敛. ◄

注 定理 26 的论断可以看作是闭区间 $I = [0, 1]$ 上的全体连续函数所成的空间 $C[0, 1]$ 中的某子集的紧致性的充分条件. 可以证明, 这个条件对于闭的函数集也是必要的.

第十七章　依赖于参数的积分

第十五讲

§1. 正常参变积分及其连续性

对于依赖于参数的积分或者叫作参变积分的研究是一个大的课题，它囊括了正常积分和反常积分的初等理论. 我们先来研究依赖于一个参数的函数的正常积分.

设函数 $f(x,y)$ 给定在矩形 $\Pi = I_1 \times I_2$ 上，其中 I_1 和 I_2 是形如 $I_1 = [a,b], I_2 = [c,d]$ 的闭区间，换言之 Π 是坐标平面 xOy 上满足条件 $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$ 的点 (x,y) 的集合.

我们将认为，对于任意固定的 $y \in I_2$，函数 $g(x) = g_y(x) = f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

定义 1　*积分* $\int_a^b f(x,y)dx = \varphi(y)$ *叫作依赖于参数* y *的积分. 闭区间* $I_2 = [c,d]$ *在这种情况下叫作参数* y *的值的集合.*

当然，代替 I_2 可取实轴 Oy 的任何子集 M 作为参数 y 的值的集合. 除了闭区间 I_2，我们将最常取作这样的集的是开区间，开的或闭的射线，点的去心邻域或实直线 $\mathbb{R}$ 自己.

定理 1　*若* $f(x,y)$ *在矩形* $\Pi = I_1 \times I_2$ *上连续，其中* I_1 *和* I_2 *是闭区间,* $I_1 =$

$[a,b], I_2=[c,d]$, 则函数

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

在闭区间 I_2 上连续.

► 由于矩形 Π 是紧致的, 在 Π 上连续的函数 $f(x,y)$ 是一致连续的. 因此, 对于任意的 $\varepsilon>0$ 找得到 $\delta>0$, 使得只要 $(x_1,y_1)\in\Pi,(x_2,y_2)\in\Pi$ 且 $|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2<\delta^2$, 就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

任意固定某点 $y_0\in I_2$. 则对于轴 Oy 上 y_0 的 δ 邻域中的任何属于 I 的 y 以及任意的 $x\in I_1=[a,b]$, 对于差 $r(x)=r(x,y,y_0)=f(x,y)-f(x,y_0)$ 有估计式

$$|r(x)|=|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon,$$

这是因为点 $A(x,y)$ 和点 $B=(x,y_0)$ 之间的距离 $|y-y_0|<\delta$. 沿闭区间 I_1 积分 $r(x)$ 得

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|=\left|\int_a^b r(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|r(x)|dx\leqslant\varepsilon(b-a).$$

根据 $\varepsilon>0$ 的选取的任意性, 由此推出当 $y\to y_0$ 时 $\varphi(y)\to\varphi(y_0)$, 即函数 $\varphi(y)$ 在点 $y=y_0$ 处连续. 而点 y_0 是任取的, 所以 $\varphi(y)$ 在 I_2 上连续. ◄

所证的定理可作如下简单的推广.

定理 2 设函数 $\varphi_1(y)$ 和 $\varphi_2(y)$ 都在闭区间 $I_2=[c,d]$ 上连续且满足不等式 $a\leqslant\varphi_1(y)\leqslant\varphi_2(y)\leqslant b$. 那么在定理 1 的条件下, 函数

$$h(y)=\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$$

也在 I_2 上连续.

在证明此定理之前我们指出, 也可把函数看作参变积分, 因为

$$h(y)=\int_a^b f_1(x,y)dx,$$

其中, 当 $\varphi_1(y)\leqslant x\leqslant\varphi_2(y)$ 是 $f_1(x,y)=f(x,y)$, 而在其他情形 $f_1(x,y)=0$.

► 还是考虑闭区间 I_2 的任意的点 y_0. 对于函数 $h(y)$ 在此点的增量 $\Delta h(y_0)=h(y)-h(y_0)$ 有关系式

$$\begin{aligned}\Delta h(y_0)&=\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx-\int_{\varphi_1(y_0)}^{\varphi_2(y_0)} f(x,y_0)dx\\&=\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}(f(x,y)-f(x,y_0))dx+\left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y_0)dx-\int_{\varphi_1(y_0)}^{\varphi_2(y_0)} f(x,y_0)dx\right)\\&=r_1(y)+r_2(y).\end{aligned}$$

假定 $|y-y_0|<\delta(\varepsilon)=\delta, \varepsilon>0$ 和 δ 如定理 1 的证明. 我们来估计量 $r_1(y)$ 和 $r_2(y)$. 那么

$$|r_1(y)|\leqslant\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}|f(x,y)-f(x,y_0)|dx\leqslant\varepsilon|\varphi_2(y)-\varphi_1(y)|\leqslant\varepsilon(b-a).$$

还有, 若 $M=\sup\limits_{\Pi}|f(x,y)|$, 则对于量 $r_2(y)$ 得估计式

$$\begin{aligned}|r_2(y)|&\leqslant\left|\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_1(y_0)}f(x,y_0)dx+\int_{\varphi_2(y_0)}^{\varphi_2(y)}f(x,y_0)dx\right|\\&\leqslant M|\Delta\varphi_1(y_0)|+M|\Delta\varphi_2(y_0)|.\end{aligned}$$

由于函数 $\varphi_1(y)$ 和 $\varphi_2(y)$ 皆在 I_2 上连续, 对于足够小的 $|\Delta y_0|=|y-y_0|<\delta_1(\varepsilon)$ 成立不等式 $|\Delta\varphi_1(y_0)|<\varepsilon$ 和 $|\Delta\varphi_2(y_0)|<\varepsilon$. 令

$$\delta_0(\varepsilon)=\min(\delta_1(\varepsilon),\delta(\varepsilon)).$$

那么对于一切满足条件 $|y-y_0|<\delta_0(\varepsilon)$ 的 $y\in I_2$ 有

$$|\Delta h(y_0)|\leqslant|r_1(y)|+|r_2(y)|\leqslant\varepsilon(b-a)+2\varepsilon M=\varepsilon(b-a+2M).$$

但由于 $\varepsilon>0$ 是任意的, 所以由此推出, 函数 $h(y)$ 在点 $y=y_0\in I_2$ 处连续, 从而在整个闭区间 I_2 上连续. ◀

应该指出, 上面引入的定理 1 的证明, 事实上由下面两个命题的论断组成.

命题 1　*若函数 $f(x,y)$ 在 $\Pi=I_1\times I_2$ 上连续, 其中 I_1 和 I_2 是闭区间, $I_1=[a,b], I_2=[c,d]$, 并设函数 $g(x)=g_y(x)=f(x,y)$, 则对于任意的 $y_0\in I_2$, 当 $y\to y_0$ 时*

$$g_y(x)\underset{I_1}{\rightrightarrows}g_{y_0}(x).$$

命题 2　*设对于某 $y_0\in[c,d]$, 当 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}f(x,y_0)$. 此外, 还设在点 y_0 的某邻域中存在参变积分 $\int_a^b f(x,y)dx$. 那么当 $y\to y_0$ 时存在极限*

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b f(x,y_0)dx.$$

§2. 正常参变积分的微分和积分

定理 3 (莱布尼茨法则)　*设函数 $f(x,y)$ 在 $\Pi=I_1\times I_2$ 上连续, 其中 I_1 和 I_2 是闭区间, $I_1=[a,b], I_2=[c,d]$. 设偏导函数 $f'_y(x,y)$ 在 Π 上连续. 那么函数*

$$g(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

在 I_2 上可微且

$$g'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

► 任意固定点 $y\in I_2$. 对于任意的 $h\neq 0$ 使 $y+h\in I_2$ 者,

$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h}=\int_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}dx.$$

此等式右端的被积函数关于 x 连续, 从而黎曼可积. 对其使用拉格朗日有限增量公式, 得

$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h}=\int_a^b f'_y(x,y+\theta h)dx,\quad 0<\theta<1.$$

根据 $f'_y(x,y)$ 在 Π 上的连续性以及 §1 的命题 1, 当 $h\to 0$ 时

$$f'_y(x,y+\theta h)\underset{I_1}{\rightrightarrows} f'_y(x,y).$$

最后使用 §1 的命题 2, 就得到等式

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(y+h)-g(y)}{h}=g'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx. \quad ◄$$

定理 4 (推广的莱布尼茨法则) 保持定理 3 的条件, 并设 $\alpha(y)$ 和 $\beta(y)$ 在 I_2 上可微而且 $a\leqslant \alpha(y),\beta(y)\leqslant b$. 那么成立公式

$$g'(y)=\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right)'_y=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx+f(\beta(y),y)\beta'(y)-$$
$$f(\alpha(y),y)\alpha'(y).$$

► 和上面一样设 $h\neq 0$ 且点 $y,y+h\in I_2$. 考虑表达式 $d(h)$, 其中

$$d(h)=\frac{g(y+h)-g(y)}{h}=\frac{1}{h}\left(\int_{\alpha(y+h)}^{\beta(y+h)} f(x,y+h)dx-\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right).$$

使用标准符号 $\Delta\alpha=\alpha(y+h)-\alpha(y),\Delta\beta=\beta(y+h)-\beta(y),\Delta f=f(x,y+h)-f(x,y)$, 可将 $d(h)$ 写成

$$\begin{aligned} d(h)=h^{-1}\int_\alpha^\beta (f(x,y+h)-f(x,y))dx+&\\ h^{-1}\int_{\alpha+\Delta\alpha}^{\alpha} f(x,y+h)dx+h^{-1}\int_\beta^{\beta+\Delta\beta} f(x,y+h)dx&\\ =A_1+A_2+A_3.& \end{aligned}$$

对于积分 A_1 逐字重复定理 3 的论述知, 当 $h\to 0$ 时

$$A_1\to\int_\alpha^\beta f'_y(x,y)dx.$$

其次, 对于积分 A_2 和 A_3, 应用中值定理并使用函数 $f(x,y)$ 的连续性, 得

$$A_2 = -\frac{\Delta\alpha}{h}f(\alpha+\theta_1\Delta\alpha, y+h), A_3 = \frac{\Delta\beta}{h}f(\beta+\theta_2\Delta\beta, y+h).$$

由此, 当 $h \to 0$ 时有

$$A_2 \to -\alpha'(y)f(\alpha(y),y), A_3 \to \beta'(y)f(\beta(y),y). \quad ◀$$

对定理 3 的证明的解释 我们更详细地解释一下可以凭借一致收敛条件

$$f'_y(x,y+\theta h) \underset{I_1}{\rightrightarrows} f'_y(x,y) \quad (h\to 0, I_1=[a,b]),$$

来取极限

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b f'_y(x,y+\theta h)dx = \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

的理由.

如所周知, 函数 $F(x,h) = f'_y(x,y+\theta h)$ 沿闭区间 I_1 的积分是积分和

$$\sigma(T) = \sigma_F(T) = \sum_{k=1}^n F(\xi_k,h)\Delta x_k$$

的极限. 这里极限是沿着基 $\Delta_T \to 0$ 来取的. 这里基 Δ_T 是这样定义的: 把闭区间 $I_1=[a,b]$ 的一切标码分法 T 所组成的集合 A 作为基本集, 标码分法 $T=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b;\xi_1,\cdots,\xi_n\}, \xi_k\in[x_{k-1},x_k], \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k=1,\cdots,n$. 函数 $\sigma_F(T)$ 定义在集合 A 上, 而量 $\Delta_T = \max\limits_k \Delta x_k$. 最后, 基 $\Delta_T\to 0$ 的终端 $b_\delta, \delta>0$, 由一切满足 $\Delta_T<\delta$ 的标码分法 T 组成.

重要的是指出, 如果对于某 $\varepsilon>0$ 和一切 $x\in I_1$, 有

$$|F(x,h)-F(x,0)| = |f'_y(x,y+\theta h) - f'_y(x,y)| < \varepsilon,$$

则 $|\sigma_{F(\cdot,h)}(T) - \sigma_{F(\cdot,0)}(T)| < \varepsilon(b-a)$. 由此推出, 若当 $h\to 0$ 时成立条件

$$f'_y(x,y+\theta h) \underset{I_1}{\rightrightarrows} f'_y(x,y),$$

则当 $h\to 0$ 时同样有

$$\sigma_{F(\cdot,h)}(T) \underset{A}{\rightrightarrows} \sigma_{F(\cdot,0)}(T).$$

那时, 两个累次极限都存在且彼此相等, 即存在极限

$$l = \lim_{h\to 0}\lim_{\Delta T\to 0}\sigma_{F(x,h)}(T) = \lim_{\Delta_T\to 0}\lim_{h\to 0}\sigma_{F(\cdot,h)}(T).$$

此时有

$$\lim_{\Delta_T\to 0}\sigma_{F(\cdot,h)}(T)=\int_a^b f'_y(x,y+\theta h)dx,$$
$$\lim_{h\to 0}f'_y(x,y+\theta h)=f'_y(x,y).$$

由此推出

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b f'_y(x,y+\theta h)dx=\int_a^b f'_y(x,y)dx,$$

这就是上面所断言的.

另一方面, 类似的结论在定理 1 中基于使用被积函数的一致连续性而直接被证明. 对此可以进行和这里所做的完全一样的讨论.

定理 5 *若函数 $f(x,y)$ 在矩形 $\Pi=I_1\times I_2$ 上连续, 其中 $I_1=[a,b], I_2=[c,d]$, 则两累次积分*

$$H=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy \quad 和 \quad G=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

皆存在且彼此相等.

► 考虑辅助函数

$$g(t,y)=\int_a^t f(x,y)dx, \quad t\in[a,b], \quad y\in[c,d].$$

我们来证明此函数在 Π 上连续. 实际上,

$$\begin{aligned}|\Delta g|&=|g(t+\Delta t,y+\Delta y)-g(t,y)|\\&=\left|\int_a^{t+\Delta t}f(x,y+\Delta y)dx-\int_a^t f(x,y)dx\right|\\&\leqslant\left|\int_a^t(f(x,y+\Delta y)-f(x,y))dx\right|\\&\quad+\left|\int_t^{t+\Delta t}f(x,y+\Delta y)dx\right|\\&\leqslant(b-a)\max_{x\in I_1}|\Delta_y f(x,y)|+c\,|\Delta t|,\end{aligned}$$

其中 $c=\max\limits_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y)|$.

由于函数 $f(x,y)$ 连续, 当 $\Delta y\to 0$ 时 $\max\limits_{x\in I_1}\Delta_y f(x,y)\to 0$. 因此, 当 $(\Delta y,\Delta t)\to(0,0)$ 时 $\Delta g\to 0$, 即 $g(x,t)$ 在 Π 上连续.

还有,$g'_t(t,y)=f(x,y)$. 因此根据定理 3, 对于函数

$$G(t)=\int_c^d g(t,y)dy=\int_c^d dy\int_a^t f(x,y)dx$$

有

$$G'(t) = \frac{d}{dt}\int_c^d g(t,y)dy = \int_c^d g'_t(t,y)dy = \int_c^d f(t,y)dy = h(t).$$

另一方面, 函数 $h(t) = \int_c^d f(t,y)dy$ 也是连续的, 所以根据牛顿-莱布尼茨公式

$$h(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t h(x)dx = H'(t),$$

其中 $H(t) = \int_a^t h(x)dx = \int_a^t dx \int_c^d f(x,y)dy$.

因此,$h(t) = H'(t) = G'(t)$. 此外显然有 $G(0) = H(0) = 0$. 所以对于一切 $t \in I_2$ 成立等式 $G(t) = H(t)$. 特别地, 对于 $t = b$ 有 $G = G(b) = H(b) = H$. ◄

第十六讲

§3. 拉格朗日定理

我们给出推广的莱布尼茨法则 (定理 4) 对于推导带有积分形式余项的拉格朗日公式的应用. 有两篇发表在 Memoires de l' Academie de Berlin (1768) 和 Note (1798, XI) 上的著名的论文是讨论拉格朗日的这个公式的. 我们引入 E. И. 佐罗塔列夫对此公式提供的证明.

定理 6 (拉格朗日公式) 设函数 $f(x)$ 对于一切 $x \in \mathbb{R}$ 都有 n 阶导数且 n 阶导函数在 $\mathbb{R}$ 上连续. 还设某函数 $x = x(u,t)$ 是方程

$$u - x + tf(x) = 0$$

的解. 那么对于任意的具有 n 阶连续导函数的函数 $F(y)$ 成立公式

$$F(x(u,t)) = F(u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}}(F'(u)f^k(u)) + R_n,$$

其中

$$R_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{du^n}\left(\int_u^{x(u)} F'(x)(u - x + tf(x))^n dx\right).$$

► 考虑函数 $S_k = S_k(u) = \int_u^{x(u)} F'(x)(u - x + tf(x))^k dx$. 关于参数 u 对它求微分. 根据定理 2 得

$$\frac{dS_k}{du} = kS_{k-1} - t^k F'(u) f^k(u),$$

即

$$S_{k-1} = \frac{t^k}{k} F'(u) f^k(u) + \frac{1}{k}\frac{dS_k}{du}.$$

微分此式 $k-1$ 次, 得

$$\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}} S_{k-1} = \frac{t^k}{k}\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}}\left(F'(u)f^k(u)\right) + \frac{1}{k}\frac{d^k S_k}{du^k}.$$

对于 $k=1,\cdots,n$ 写出此式, 得

$$S_0 = tF'(u)f(u) + \frac{dS_1}{du},$$

$$\frac{dS_1}{du} = \frac{t^2}{2}\frac{d}{du}\left(F'(u)f^2(u)\right) + \frac{1}{2}\frac{d^2 S_2}{du^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} S_{n-1} = \frac{t^n}{n}\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}(F'(u)f^n(u)) + \frac{1}{n}\frac{d^n S_n}{du^n}.$$

从后到前, 逐次将后一式代入前一式, 就得到

$$S_0 = tF'(u)f(u) + \frac{t^2}{2!}\frac{d}{du}(F'(u)f^2(u)) + \cdots + \frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}(F'(u)f^n(u)) + \frac{1}{n!}\frac{d^n S_n}{du^n}.$$

此外, 对于 S_0 成立等式

$$S_0 = \int_u^{x(u)} F'(x)dx = F(x(u)) - F(u).$$

将此式代入最后的表达式中就得到定理的结论. ◄

我们引入拉格朗日公式的两个特殊情形.

1. 成立恒等式 $f(x) \equiv 1$ 的情形. 此时拉格朗日公式转化为带有积分形式余项的泰勒公式:

$$F(u+t) = F(u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{F^{(k)}(u)}{k!} t^k + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_0^t F^{(n+1)}(u+s)(t-s)^n ds.$$

2. 设 $f(x) = \sin\ x$. 那么函数 $x = x(u,t)$ 是开普勒方程 $x - t\sin\ x = u$ 的解, 其中 t 是二体问题中椭圆形轨道的离心率.

对于函数 $R(x) = 1 - t\cos\ x$, 拉普拉斯得到了拉格朗日级数展开式

$$R(x(u)) = 1 - t\cos\ u + t\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\frac{d^{k-1}(\sin\ u)^{k+1}}{du^{k-1}},$$

且本质上确定了它当 $t < 0.662\cdots$ 时收敛.

最后指出, 由于拉格朗日级数概念的内容之丰富, 对此级数的研究一直很热, 欧拉, 兰伯特, 拉普拉斯, 彪尔曼, 普法夫, 施勒米希, 海涅, 柯西, 雅可比, 杜 · 布阿 · 雷蒙, 儒歇, 切比雪夫, 佐罗塔列夫, 索霍茨基, 涅克拉索夫等都研究过拉格朗日级数. 对于推广的拉格朗日级数的收敛问题的研究仍是当今现实的课题.

第十七讲

§4. 按海涅意义的一致收敛

函数的沿集合基一致收敛的概念是经典的一致收敛概念的推广, 并且是以柯西的函数极限概念为基础的. 在数学分析中还用到另一种类型的极限定义, 即按海涅意义的极限, 无论是通常的还是一致的. 按柯西意义的以及按海涅意义的两个一致收敛的定义是等价的. 各有各自便于应用的场合. 由于两个定义分别便于应用于不同的情况, 所以我们要在沿集合基收敛的一般情况下, 证明一个关于按柯西意义和按海涅意义收敛的概念的等价性的定理.

需要一些新定义.

定义 2 设 B 是定义在基本集 X 上的一个基, 并且对于它的任何终端 b_1 和 b_2 都或有 $b_1 \subset b_2$ 或有 $b_2 \subset b_1$ 成立. 称 X 中的序列 $\{x_n\}$ 是沿着基 B 的基本列, 如果在任何终端之外仅存在此序列的有限多项.

定义 3 基本列 $\{x_n\}$ 叫作是关于基 B 单调的, 如果对于任何终端 b, 条件 $x_n \in b$ 蕴含 $x_{n+1} \in B$.

下面我们认为, 所考虑的集合基至少具有一个基本的单调序列. 此外我们还假定基 B 的一切终端的交是空集.

定义 4 数 l 称作是函数 $f(x)$ 按海涅意义沿基 B 的极限, 如果对于任何沿着基 B 单调的序列 $\{x_n\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$

在这种情况下记: $Hm\text{-}\lim\limits_{B} f(x) = l$.

关于按海涅意义的极限定义与通常意义即按柯西意义的极限定义彼此等价的定理成立 (见第一部分第 30 讲). 我们将其叙述如下.

定理 7 极限 $Hm\text{-}\lim\limits_{B} f(x)$ 存在的充分必要条件是按柯西意义 $\lim\limits_{B} f(x)$ 存在时 $Hm\text{-}\lim\limits_{B} f(x) = \lim\limits_{B} f(x)$.

为了强调 $\lim\limits_{B} f(x)$ 是柯西意义的极限的推广，也写作

$$\lim_{B} f(x) = C\text{-}\lim_{B} f(x).$$

此定理的证明依靠下面两个引理. 这两个引理也自有其独立的意义.

引理 1 设 $\{x_n\}$ 是沿着基 B 的单调序列. 那么存在它的子列 $\{y_k\}(y_k = x_{n_k})$ 及与之对应的终端序列 $\{b_k\}$，使得对于一切 $k \in \mathbb{N}$，有 $b_{k+1} \subset b_k, y_k \in b_k$ 但 $y_k \notin b_{k+1}$.

定义 5 引理 1 中的终端序列 $\{b_k\}$ 叫作是基本的终端序列.

把基本的终端序列 $\{b_k\}$ 的项写成 $\bar{b}_k$.

引理 2 给定基本终端序列 $\{\bar{b}_k\}$. 对于任何终端 $b \in B$，都存在某 $\bar{b}_k \subset b$.

上面引入的概念使得可以按新的方式作出一致收敛的一般定义. 为此，我们在集合 X 和集合 Y 的笛卡儿乘积 $X \times Y$ 上定义函数 $f(x,y)$ 并认为在集合 X 上给定了集 B.

定义 6 函数 $f(x,y)$ 沿着基 B 在集合 Y 上一致收敛到函数 $g(y)$，如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在终端 $b(\varepsilon) \in B$，使得对于一切 $x \in b(\varepsilon)$ 与 $y \in Y$ 无关地成立不等式 $|f(x,y) - g(y)| < \varepsilon$.

在这种情况下写 $f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$.

定义 7 说函数 $f(x,y)$ 按海涅意义在 Y 上一致收敛到 $g(y)$，如果对于任意的沿着基 B 单调的序列 $\{x_n\}$，函数序列 $\{f(x_n,y)\}$ 都在集合 Y 上一致收敛到 $g(y)$. 这时记 $f(x,y) \xrightarrow[Y]{(B)_{Hm}} g(y)$.

§5. 一致收敛的两个定义的等价性

现在可以转向关于按柯西意义和按海涅意义的一致收敛定义的等价性的定理.

定理 8 1. 若函数按海涅意义沿着基 B 在集合 Y 上一致收敛到 $g(y)$，则 $f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$.

2. 若 $f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$，则 $f(x,y) \xrightarrow[Y]{(B)_{Hm}} g(y)$.

► 考察结论 1. 从反面来讨论. 设 $f(x,y) \xrightarrow[Y]{(B)_{Hm}} g(y)$，但是 $f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$ 不成立. 那么，存在 $\varepsilon > 0$，使得对于任何终端 $b \in B$，都找得到点 $x_b \in b$ 和 $y_b \in Y$，满足 $|f(x_b, y_b) - g(y_b)| \geqslant \varepsilon$. 先从基本的终端序列中取一个终端 $\bar{b}_1$. 把与其相应的 $x_{\bar{b}_1}$ 和 $y_{\bar{b}_1}$ 分别记作 x_1, y_1，那么 $|f(x_1,y_1) - g(y_1)| \geqslant \varepsilon$. 由于全部终端的交是空集，所以

存在终端 $b \in B$ 使 $x_1 \notin b$. 根据引理 2, 存在数 k_1 使得 $\bar{b}_{k_1} \subset b$, 当然 $x_1 \notin \bar{b}_{k_1}$. 取 $x_2 = x_{\bar{b}_{k_1}} \in \bar{b}_{k_1}$ 和 $y_2 = y_{\bar{b}_{k_1}} \in Y$, 那么 $|f(x_2, y_2) - g(y_2)| \geqslant \varepsilon$. 无休止地重复这一步骤. 那么得到点列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使对于一切 $n \in \mathbb{N}, |f(x_n, y_n) - g(y_n)| \geqslant \varepsilon$.

我们来证明点列 $\{x_n\}$ 沿着基 B 单调. 首先证明它是基本的. 我们指出, 自然数序列 $\{k_n\}$ 是单调增的. 但任何终端 $b_0 \in B$, 根据引理 2 都含有某个 $\bar{b}_{k_0}$, 而当 $k_n > k_0$ 时有 $x_{n+1} \in \bar{b}_{k_0} \subset \bar{b}_0 \subset b_0$. 这表明, 在 b_0 之外所含的序列 $\{x_n\}$ 的点不多于 k_0 个. 所以 $\{x_n\}$ 是基本的.

为证 $\{x_n\}$ 的单调性, 我们指出 $x_n \notin \bar{b}_{k_n}$ 而 $x_{n+1} \in \bar{b}_{k_n}$. 然而如果对于某 $b_0 \neq \bar{b}_{k_n}$ 有 $x_n \in b_0$ 的话, 则从两个可能发生的包含关系 $b_0 \subset \bar{b}_{k_n}$ 和 $b_0 \supset \bar{b}_{k_n}$ 中只能有第二个成立, 否则的话 $x_n \in b_0 \subset \bar{b}_{k_n}$ 而这是不可能的. 于是 $x_{n+1} \in \bar{b}_{k_n} \subset b_0$. 这证明 $\{x_n\}$ 是单调的.

于是, 我们构作了一个单调点列 $\{x_n\}, x_n \in X$, 使得对于相应的 $y_n \in Y$ 成立不等式 $|f(x_n, y_n) - g(y_n)| \geqslant \varepsilon$ 对于一切 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 这表明函数列 $\{f(x_n, y)\}$ 当 $n \to \infty$ 时不是一致收敛到 $g(y)$ 的. 这与所作的假定矛盾. 于是, 定理的结论 1 获得证实.

考察结论 2. 由于 $f(x, y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$, 所以对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在终端 $b(\varepsilon) \in B$, 使得对于一切 $y \in Y$ 和一切 $x \in b(\varepsilon)$ 有 $|f(x, y) - g(y)| < \varepsilon$. 现设 $\{x_n\}$ 是 X 中的任意一个沿着基 B 的单调序列. 那么在 $b(\varepsilon)$ 之外顶多只有 $\{x_n\}$ 的有限个点. 于是对于足够大的 $n > n_0(\varepsilon)$, 总有 $x_n \in b(\varepsilon)$. 因此对于这些 n 有 $|f(x_n, y) - g(y)| < \varepsilon$ 对于一切 $y \in Y$ 成立. 这表明当 $n \to \infty$ 时 $f(x_n, y) \underset{Y}{\rightrightarrows} g(y)$. ◀

我们强调一下, 在定理 8 中对于基 B 加有下列限制:

1) 基 B 的每个终端不空但全体终端的交是空集;

2) 对于任意两个终端 b_1 和 $b_2, b_1 \subset b_2$ 和 $b_1 \supset b_2$ 必有一个成立;

3) 存在至少一个沿着基 B 单调的点列.

乍一看, 这些限制好像很厉害, 特别是条件 2), 比通常的条件, 存在 $b_3 \subset b_1 \cap b_2$ 要苛刻得多. 但并不完全如此. 实际处理问题时, 总可以代替基 B 而考虑一个与它等价的 B_0, 使 B_0 满足上面所述的全部三个条件. 所谓等价, 指的是沿基 B 收敛蕴含沿基 B_0 收敛且反之亦然. 例如, 在基的直积 $H = B \times D$ 的情形, 其中 B 和 D 分别是 $x \to +\infty$ 和 $y \to +\infty$ 的基, 作为等价的 H_0, 可以取由形如 $h = \{(x, y) | x > a, y > a\}$ 的终端组成的基.

为了叙述的完整, 我们引入函数沿集合基一致收敛的柯西准则的一般形式.

定理 9 (函数一致收敛的柯西准则) 定义在集合 $X \times Y$ 上的函数 $f(x, y)$ 沿着在集合 X 上给定的基 B 在 Y 上一致收敛到某函数的必要且充分的条件是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在终端 $b \in B$, 使得对于一切 $x_1 \in b, x_2 \in b$ 和一切 $y \in Y$, 成立不等式 $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon$.

► 必要性 若 $f(x,y) \overset{B}{\underset{Y}{\rightrightarrows}} g(y)$, 则对于任何 $\varepsilon > 0$ 都存在 $b \in B$, 使得对于一切 $x \in b$ 和一切 $y \in Y$, 成立 $|f(x,y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 那么, 对于一切 $x_1 \in b$ 和一切 $x_2 \in b$ 及一切 $y \in Y$ 有

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| \leqslant |f(x_1,y) - g(y)| + |g(y) - f(x_2,y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性 固定任意一点 $y \in Y$. 那么函数 $h_y(x) = f(x,y)$ 满足通常的沿基收敛的柯西准则. 因此存在数 $g = g(y)$, 使 $h_y(x) \xrightarrow{B} g(y)$. 于是 $g(y)$ 是集合 Y 上的函数. 我们来证明 $f(x,y) \xrightarrow{B} g(y)$ 在 Y 上是一致的. 实际上, 对于 $\varepsilon > 0$, 存在终端 $b \in B$, 使得对于一切 $x_1 \in b, x_2 \in B$ 和一切 $y \in Y$

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

在此不等式中固定 y 而过渡到沿着基 B 对变数 x_2 取的极限. 那么得到

$$|f(x_1,y) - g(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

此不等式对于一切 $x_1 \in b$ 和一切 $y \in Y$ 成立. 这表明

$$f(x,y) \overset{B}{\underset{Y}{\rightrightarrows}} g(y). \quad ◄$$

作为定理 9 的直接推论, 我们引入对于函数 $f(x,y)$ 沿着在集合 X 上给定的基 B 在集合 Y 上不一致收敛的柯西准则的直接叙述.

定理 10 (不一致收敛的准则) 设 $(x,y) \in X \times Y$. 函数 $f(x,y)$ 沿着在集合 X 上给定的基 B 在集合 Y 上不一致收敛的充分必要条件是, 存在某个 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意的终端 $b \in B$ 都存在一对点 $x_1 \in b$ 和 $x_2 \in b$ 以及一个点 $y \in Y$ 满足条件

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| \geqslant \varepsilon.$$

注 无论是在定理 9 中还是在定理 10 中, 都只考察了按柯西意义和按海涅意义两种可能的一致收敛定义中的第一种. 而若要描述与它等价的第二种定义, 则问题本质上归结为早先在第 16 章 §3 中已证明了的函数列的一致收敛的柯西准则.

第十八讲

§6. 反常参变积分之一致收敛

参变积分理论的进一步发展导致反常参变积分的研究, 而这正是这一理论的最本质的部分. 在两种类型的反常参变积分中, 我们把注意力主要集中在第一类上. 第二类积分只是顺带被提及, 因为理论上它们与第一类没有原则的不同.

考虑给定在集合 $I \times Y$ 上的函数 $f(x, y)$, 其中 I 是形如 $[a, +\infty)$ 的区间, 而 Y 是某个实数集, 即 $Y \subset \mathbb{R}$. 设对于任意固定的 $y \in Y$, 函数 $f(x, y)$ 在任何有限的闭区间 $[a, b]$ 上都黎曼可积并且存在此函数关于变元 $x \in I = [a, +\infty)$ 的第一类反常积分. 那么这个积分本身就是给定在 Y 上的 y 的某个函数 $g(y)$, 它由下式给出:

$$g(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)dx.$$

定义 8 上述函数 $g(y)$ 叫作依赖于参数 $y \in Y$ 的第一类反常积分.

注 代替沿区间 $[a, +\infty)$ 的反常积分, 当然可以考虑沿区间 $(-\infty, b]$ 或沿全实轴 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 的积分. 全部这些情形都可归结为所考虑的情形, 完全如同在研究通常的反常积分时所做的那样. 例如

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \int_0^{+\infty} f(x, y)dx + \int_0^{+\infty} f(-x, y)dx,$$

且此积分之收敛理解为两被加项皆收敛. 此外, 自然可以提出关于形式的反常参变积分的收敛域 Y 的问题. 类似的问题在考察函数级数时已弄清楚了, 因此我们将不再对此类问题花太多的精力, 不过将使用类似的术语.

例 1. 对于 $y > 1$ 成立等式

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^y} = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^y} = \lim_{t \to +\infty} \left. \frac{x^{1-y}}{1-y} \right|_1^t = \frac{1}{y-1}.$$

2. 当 $y > 0$ 时有

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\ xy}{\alpha} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin\ x}{x} dx.$$

定义 9 积分 $\int_a^{\infty} f(x, y)dx$ 叫作是关于参数 y 在集合 Y 上一致收敛的, 如果当 $t \to +\infty$ 时

$$\int_a^t f(x, y)dx = F(y, t) \underset{Y}{\rightrightarrows} g(y).$$

换言之, 这就是说, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $t_0 = t_0(\varepsilon)$, 使得对于一切 $t > t_0(\varepsilon)$ 和一切 $y \in Y$, 成立

$$\left|\int_a^t f(x,y)dx - g(y)\right| < \varepsilon,$$

其中 $g(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$.

从一般定理出发, 我们来叙述第一类反常积分一致收敛的柯西准则

定理 11 第一类反常积分 $\int_a^\infty f(x,y)dx$ 在集合 Y 上一致收敛的充分必要条件是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $T = T(\varepsilon)$, 使得对于一切 $t_2 > t_1 > T$ 和一切 $y \in Y$ 成立不等式

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

我们也引人反常参变积分不一致收敛的准则的直接叙述.

定理 11′[①] 反常积分 $\int_a^\infty f(x,y)dx$ 在集合 Y 上不一致收敛的充分必要条件是, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于任何 $T > a$ 都找得到数 $t_2 > t_1 > T$ 以及 $y \in Y$, 满足

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

定义 10 若对于一切 $x > a$ 和一切 $y \in Y$, $|f(x,y)| \leqslant g(x)$, 且积分 $\int_a^\infty g(x)dx$ 收敛, 则函数 $g(x)$ 叫作 $f(x,y)$ 在 $\Pi = I \times Y$ 上的优控.

定理 12 (第一类反常积分一致收敛的魏尔斯特拉斯判别法) 若函数 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty) \times Y$ 上有优控, 则积分 $J = \int_a^\infty f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛.

► 设 $g(x)$ 是 $f(x,y)$ 的优控. 使用柯西准则. 由于积分 $\int_a^\infty g(x)dx$ 收敛, 所以对于任意的 $\varepsilon > 0$, 找得到数 $T = T(\varepsilon)$ 使得当 $t_2 > t_1 > T$ 时 $\int_{t_1}^{t_2} g(x)dx < \varepsilon$. 于是对于一切 $y \in Y$,

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} |f(x,y)|dx \leqslant \int_{t_1}^{t_2} g(x)dx < \varepsilon.$$

由此根据柯西准则, 我们断定积分 J 在 Y 上一致收敛. ◄

例 积分 $\int_1^\infty x^{-s}dx$ 在集合 $[s_0,+\infty)$ 上一致收敛, 只要 $s_0 > 1$. 这是因为 $g(x) = x^{-s_0}$ 是被积函数 x^{-s} 的优控.

定理 13 (第一类反常参变积分一致收敛的阿贝尔判别法和狄利克雷判别法) 设函数 $f(x,y)$ 定义在集合 $\Pi = X \times Y$ 上, 其中 $X = [a,+\infty), Y = [c,d]$, 且 $f(x,y) = \alpha(x,y)\beta(x,y)$. 设 $\beta(x,y)$ 对于任意固定的 $y \in Y$, 关于 x 单调.

①原文定理 11′ 只叙述了条件的充分性而没有叙述其必要性 —— 译者注.

(A) **(阿贝尔判别法)**　还设:

1) 积分 $\int_a^\infty \alpha(x,y)dx$ 关于 y 在 Y 上一致收敛;

2) 函数 $\beta(x,y)$ 在 Π 上有界, $|\beta(x,y)| < c$ 对于一切 (x,y). 那么积分 $J = \int_a^\infty f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛.

(D) **(狄利克雷判别法)**　设:

1) 对于某 $c>0$ 和一切 $t>a$, 一切 $y\in Y$ 成立不等式

$$\left|\int_a^t \alpha(x,y)dx\right| < c;$$

2) 当 $x\to\infty$ 时 $\beta(x,y) \underset{Y}{\rightrightarrows} 0$.

那么积分 $J = \int_a^\infty f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛.

► 此定理, 无论是其表述还是其证明, 都与级数理论中的相应命题类似. 本质上全部的区别归结于代替使用阿贝尔变换而采用积分第二中值定理.

再次使用柯西准则来证明. 采用积分第二中值定理, 我们有

$$\int_{t_1}^{t_2} \alpha(x,y)\beta(x,y)dx = \beta(t_1,y)\int_{t_1}^{t_3} \alpha(x,y)dx + \beta(t_2,y)\int_{t_3}^{t_2} \alpha(x,y)dx,$$

其中 $t_3 \in [t_1,t_2]$.

在情形 (A), 根据积分 $\int_a^\infty \alpha(x,y)dx$ 的一致收敛性, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 以及一切足够大的 $t_2>t_1>t_0(\varepsilon)$ 以及一切 $y\in Y$, 有 $\left|\int_{t_1}^{t_3} \alpha(x,y)dx\right| < \varepsilon$ 和 $\left|\int_{t_3}^{t_2} \alpha(x,y)dx\right| < \varepsilon$. 由此

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_1}^{t_2} \alpha(x,y)\beta(x,y)dx\right| &\leqslant |\beta(t_1,y)|\left|\int_{t_1}^{t_3} \alpha(x,y)dx\right| + |\beta(t_2,y)|\left|\int_{t_3}^{t_2} \alpha(x,y)dx\right|\\ &\leqslant c\varepsilon + c\varepsilon = 2c\varepsilon,\end{aligned}$$

这是因为对于一切 x 和 y, $|\beta(x,y)|<c$. 根据数 $\varepsilon>0$ 的任意性, 这蕴含着积分 J 的一致收敛性, 于是结论 (A) 成立.

在情形 (D), 函数 $\alpha(x,y)$ 在 $[a,t]$ 上的积分对于一切 $t>a$ 和一切 $y\in Y$ 以数 c 为界, 且 $\beta(x,y)$ 当 $x\to\infty$ 时关于 y 一致趋于零. 因此, 对于任意的 $\varepsilon>0$ 和足够大的 $t_2>t_1>t_0(\varepsilon)$ 和一切 $y\in Y$, 成立不等式 $|\beta(t_1,y)|<\varepsilon|\beta(t_2,y)|<\varepsilon$. 因此

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_1}^{t_2} \alpha(x,y)\beta(x,y)dx\right| &\leqslant |\beta(t_1,y)|\left|\int_{t_1}^{t_3} \alpha(x,y)dx\right| + |\beta(t_2,y)|\left|\int_{t_3}^{t_2} \alpha(x,y)dx\right|\\ &\leqslant \varepsilon\cdot 2c + \varepsilon\cdot 2c = 4c\varepsilon.\end{aligned}$$

从而结论 (D) 成立. ◄

第十九讲

§7. 反常积分关于参数的连续性, 可微性和可积性

我们来证明一个关于在反常积分号下对于函数在一点处取极限的定理.

定理 14 设函数 $f(x,y)$ 给定在集合 $P = X \times Y$ 上, 其中 $X = [a,+\infty), Y = [c,d]$. 还设下述条件成立:

1) 对于某 $y_0 \in Y$ 并对于一切 $t \in X$, 在集合 $E_t = [a,t]$ 上 $f(x,y) \underset{E_t}{\rightrightarrows} g(x)$ 当 $y \to y_0$ 时;

2) 反常积分 $h(y) = \displaystyle\int_a^\infty f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛. 那么:

a) 函数 $g(x)$ 在任何闭区间 E_t 上黎曼可积;

b) 积分 $J = \int_a^\infty g(x)dx$ 收敛;

c) 存在极限 $l = \lim\limits_{y\to y_0} h(y)$;

d) 成立等式

$$l = \lim_{y\to y_0}\int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^\infty g(x)dx = J.$$

► 考虑 Y 中任意的单调收敛到 y_0 的数列 $\{y_n\}$. 那么根据条件 1), 当 $n\to\infty$ 时对于函数序列 $\{g_n(x) = f(x,y_n)\}$ 成立关系式 $g_n(x) \underset{E_t}{\rightrightarrows} g(x)$, 其中 $E_t = [a,t], t \geqslant a$ 是任意固定的数. 还有, 从第十六章 §6 关于函数列的极限的积分的定理 11 推出, 函数 $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ 在 E_t 上可积并且

$$\int_a^t f(x,y_n)dx = \int_a^t g_n(x)dx = Q_{tn} \to Q_t = \int_a^t g(x)dx,$$

其中量 Q_{tn} 和 Q_t 由含着它们的等式定义.

根据条件 2), 当 $t\to+\infty$ 时有 $Q_{tn} \underset{\mathbb{N}}{\rightrightarrows} h(y_0)$, 这是因为对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $t_0 = t(\varepsilon) \geqslant a$ 使得对于一切 $t > t_0$ 和一切自然数 n 成立不等式 $|Q_{tn} - h(y_n)| < \varepsilon$. 结果, 根据沿着基的二重极限和累次极限的定理 (第十六章 §6), 两个累次极限存在且相等, 即

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to+\infty} Q_{tn} = \lim_{t\to+\infty}\lim_{n\to\infty} Q_{tn}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to+\infty} Q_{tn} = \lim_{n\to\infty}\int_a^\infty f(x,y_n)dx = \lim_{n\to\infty} h(y_n) = l,$$

同时

$$\lim_{t\to+\infty}\lim_{n\to\infty} Q_{tn} = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t g(x)dx = J,$$

而且 $l = J$. 根据数列 $\{y_n\}$ 的选取的任意性, 由此推出定理的结论. ◀

由此定理推出反常参变积分的下述连续性.

定理 15 *设函数 $f(x,y)$ 在集合 $P = X\times Y$ 上连续, 其中 $X = [a,+\infty), Y = [b,c]$, 并设积分*

$$h(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx$$

在 Y 上一致收敛. 那么函数 $h(y)$ 在 Y 上连续.

► $h(y)$ 在固定点 $y_0\in Y$ 处连续指的是当 $y\to y_0$ 时 $h(y)\to h(y_0)$. 为证此事我们使用定理 14. 显然此定理的条件 2) 满足. 还有, 从 $f(x,y)$ 在 P 上连续推出, 它在 $P_t = [a,t]\times[b,c]$ 上一致连续, $t\geqslant a$ 是任意的. 于是当 $y\to y_0$ 时

$$f(x,y)\underset{[a,t]}{\rightrightarrows} f(x,y_0).$$

所以定理 14 的条件 1) 成立, 而这表明当 $y\to y_0$ 时

$$h(y)\to\int_a^{\infty} f(x,y_0)dx = h(y_0). \quad ◀$$

定理 16 (反常积分关于参数可积的条件) *设函数 $f(x,y)$ 在 $P = X\times Y$ 上连续, 其中 $X = [a,+\infty), Y = [b,c]$, 并设积分 $g(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛. 那么函数 $g(y)$ 在 Y 上可积, 函数 $h(x) = \int_b^c f(x,y)dy$ 在 $X = [a,+\infty)$ 上可积, 并且*

$$\int_b^c g(y)dy = \int_a^{\infty} h(x)dx,$$

也就是说

$$\int_b^c dy\int_a^{\infty} f(x,y)dx = \int_a^{\infty} dx\int_b^c f(x,y)dy.$$

► 考虑任意的单调趋于 $+\infty$ 的数列 $\{t_n\} t_n\geqslant a$. 那么函数列 $\{g_n(y)\}$ 在集合 Y 上一致收敛到函数 $g(y)$, 其中 $g_n(y) = \displaystyle\int_a^{t_n} f(x,y)dx$. 每个函数 $g_n(y)$ 都在 Y 上连续. 因此, 对于固定的 n, 根据正常积分关于参数的可积性的定理 (§2 定理 5), 有

$$\int_b^c dy\int_a^{t_n} f(x,y)dx = \int_b^c g_n(y)dy = \int_a^{t_n} dx\int_b^c f(x,y)dy. \qquad (*)$$

根据第十六章定理 11, 当 $n\to\infty$ 时可在积分号下取极限, 并且存在数 A 使

$$A = \lim_{n\to\infty}\int_b^c g_n(y)dy = \int_b^c \lim_{n\to\infty} g_n(y)dy = \int_b^c g(y)dy = \int_b^c dy\int_a^{\infty} f(x,y)dx.$$

在等式 (*) 中令 $n\to\infty$ 过渡到极限, 得知其右端存在极限且等于 A,

$$A=\lim_{n\to\infty}\int_a^{t_n}dx\int_b^c f(x,y)dy.$$

但由于数列 $\{t_n\}$ 是任意的, 最后的极限等于积分

$$\int_a^{\infty}dx\int_b^c f(x,y)dy. \quad ◄$$

现在来证明一个关于反常积分对参数的微分的定理.

定理 17 (莱布尼茨法则) 设

1) 函数 $f(x,y)$ 在 $P=X\times Y$ 上连续, 其中 $X=[a,+\infty), Y=[c,d]$;

2) 偏导函数 $f'_y(x,y)$ 在 P 上连续;

3) 积分 $g(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ 对于一切 $y\in Y$ 收敛;

4) 积分 $\int_a^\infty f'_y(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛.

那么函数 $g(y)$ 在 Y 上可微且成立等式

$$g'(y)=\int_a^{\infty}f'_y(x,y)dx.$$

► 根据函数 $f(x,y)$ 的连续性, 对于一切 $n\geqslant a$ 函数

$$g_n(y)=\int_a^n f(x,y)dx$$

在 Y 上连续, 使用对于正常积分的莱布尼茨法则, 得

$$g'_n(y)=\int_a^n f'_y(x,y)dx.$$

我们指出, 对于函数列 $\{g_n(y)\}$, 当 $n\to\infty$ 时成立关系式

$$g_n(y)\to g(y)=\int_a^{\infty}f(x,y)dx,$$

$$g'_n(y)\underset{Y}{\rightrightarrows}\int_a^{\infty}f'_y(x,y)dx.$$

因此, 根据关于函数列的极限的微分的法则, 有

$$\left(\lim_{n\to\infty}g_n(y)\right)'=\lim_{n\to\infty}g'_n(y),$$

即 $g'(y)=\int_a^\infty f'_y(x,y)dx$. ◄

我们还要证明两个以后用得着的关于反常累次积分的定理.

定理 18 设 $f(x,y)$ 在 $P=X\times Y$ 上连续, 其中 $X=[a,+\infty), Y=[b,+\infty)$ 且在 P 上 $f(x,y)\geqslant 0$. 设对于一切 $y\in Y$, 积分 $\int_a^\infty f(x,y)dx$ 收敛到 Y 上的连续函数 $g(y)$, 且对于一切 $x\in X$, 积分 $\int_b^\infty f(x,y)dy$ 收敛到 X 上的连续函数 $h(x)$. 那么积分 $J_1=\int_b^\infty g(y)dy$ 收敛等价于积分 $J_2=\int_a^\infty h(x)dx$ 收敛, 且 $J_1=J_2$, 即

$$\int_b^\infty dy\int_a^\infty f(x,y)dx=\int_a^\infty dx\int_b^\infty f(x,y)dy.$$

► 我们仅考虑积分 J_1 存在的情形, 因为第二种情形的考察是类似的. 考虑任意的满足 $t_m\geqslant a$ 且 $t_m\to+\infty$ 的单调数列 $\{t_m\}$, 以及自然数 $n\geqslant b$. 用符号 J_{mn} 表示累次积分

$$J_{mn}=\int_a^{t_m}dx\int_b^n f(x,y)dy.$$

还设

$$g_m(y)=\int_a^{t_m}f(x,y)dx, h_n(x)=\int_b^n f(x,y)dy.$$

根据关于正常参变积分的可积性的定理, 有

$$J_{mn}=\int_b^n dy\int_a^{t_m}f(x,y)dx=\int_b^n g_m(y)dy.$$

还有, 由于 $f(x,y)\geqslant 0$, 所以 $0\leqslant g_m(y)\leqslant g(y)$. 因此成立不等式

$$J_{mn}\leqslant\int_b^n g(y)dy\leqslant\int_b^\infty g(y)dy=J_1.$$

另一方面,

$$J_{mn}=\int_a^{t_m}dx\int_b^n f(x,y)dy=\int_a^{t_m}h_n(x)dx.$$

这里 $h_n(x)\geqslant 0$, 且对于每个固定的 x 数列 $\{h_n(x)\}$ 都是非减的; 此外, 每个 $h_n(x)$ 都连续, 而且 $\{h_n(x)\}$ 的极限即 $h(x)$ 也是连续的 (定理的条件). 因此, 根据迪尼定理, 当 $n\to\infty$ 时

$$h_n(x)\underset{[a,t_m]}{\rightrightarrows}h(x).$$

于是当 $n\to\infty$ 时成立等式

$$J(m)=\lim_{n\to\infty}J_{mn}=\lim_{n\to\infty}\int_a^{t_m}h_n(x)dx=\int_a^{t_m}h(x)dx.$$

因此, 在不等式 $J_{mn}\leqslant J_1$ 中令 $n\to\infty$ 过渡到极限就得关系式

$$J(m)=\int_a^{t_m}h(x)dx\leqslant J_1.$$

但由于 $h(x) \geqslant 0$, 所以随着 m 的增长, 数列 $\{J(m)\}$ 单调增且有界. 结果, 根据魏尔斯特拉斯定理, $\{J(m)\}$ 收敛到 l, 且 $l \leqslant J_1$. 根据数列 $\{t_m\}$ 的选取的任意性, 由此推出数 l 等于

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t h(x)dx = \int_a^{\infty} h(x)dx = J_2.$$

于是 $J_2 = l \leqslant J_1$. 然而, 在上面进行的论述中交换量 J_1 和 J_2 的位置就同时得到不等式 $J_1 \leqslant J_2$. 结果 $J_1 = J_2$. ◄

下面给出定理 18 的某种推广.

定理 19 设函数 $f(x,y)$ 满足定理 18 的条件, 只是除了条件 $f(x,y) \geqslant 0$ 之外; 但是函数 $F(x,y) \geqslant |f(x,y)|$ 满足定理 18 的全部条件. 那么, 定理 18 的结论不仅对于函数 $F(x,y)$ 成立, 而且对于函数 $f(x,y)$ 也成立.

◄ 我们看到, 函数

$$\varphi_1(x,y) = \frac{F(x,y)+f(x,y)}{2} \quad 和 \quad \varphi_2(x,y) = \frac{F(x,y)-f(x,y)}{2}$$

都满足定理 18 的条件, 从而定理 18 的结论对于这两个函数都成立, 当然对于 $\varphi_1(x,y) - \varphi_2(x,y) = f(x,y)$ 也成立. ◄

一般说来, 定理 18 和定理 19 的条件是过剩的. 以后将证明一个一般得多的命题.

最后我们引入柯西给出的一个例子. 在此例中, 当交换积分次序时得到不同的累次积分值. 这与被积函数

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

在点 (0,0) 处间断, 特别是当沿直线 $y = kx$ 趋于 (0,0) 时的间断情形有关. 当 $|k| > 1$ 时 $\lim\limits_{x \to 0} f(x,kx) = -\infty$, 而当 $|k| < 1$ 时 $\lim\limits_{x \to 0} f(x,kx) = +\infty$. 而对于此函数的两个累次积分成立等式

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4},$$
$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

我们注意到, 这个例子属于第二类反常积分. 下一节研究这类积分.

第二十讲

§8. 第二类反常积分

我们来叙述第二类反常参变积分的初等理论的基本概念并叙述某些与我们已证明的关于第一类积分的定理相对应的结论.

考虑集合 $P = X \times Y$, 其中 $X = (a, b], Y \subset \mathbb{R}$. 设函数 $f(x, y)$ 给定在 P 上并且至少对于一个固定的 $y \in Y$, 作为 x 的函数是无界的. 还有, 设对于任意的 $y \in Y$ 和 $\delta \in (0, b-a)$, 函数 $f(x, y)$ 作为 x 的函数在闭区间 $[a+\delta, b]$ 上黎曼可积.

定义 11 *形式表达式 $\int_a^b f(x, y)dx$ 叫作以 $x = a$ 为奇点的第二类反常积分.*

定义 12 *若对于任意的固定的值 $y \in Y$, 此积分都收敛, 则集合 Y 叫作积分的收敛域, 此积分的值 $g(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ 生成一个定义在集合 Y 上的函数.*

当奇点位于积分区间 $X = [a, b]$ 的右端点 b 时有类似的定义. 若奇点 $x = x_0$ 在闭区间 X 内部时, 可用它将 X 分成两个部分, 而分别考虑分成的两个闭区间.

类似地也可研究具有变化的奇点 $x_0 = x_0(y)$ 的反常积分, 但此处我们不做详细讨论.

例 积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x-y|}}$ 在 $Y = [0, 1]$ 上收敛且可算出其值.

实际上,

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) = \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{y-x}} + \int_y^1 \frac{dx}{\sqrt{x-y}} = 2\sqrt{y} + 2\sqrt{1-y}.$$

定义 13 *第二类反常积分*

$$g(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

叫做是关于 y 在 Y 上一致收敛的, 如果对于函数

$$g(\delta, y) = \int_{a+\delta}^b f(x, y)dx$$

当 $\delta \to 0+$ 时成立

$$g(\delta, y) \underset{Y}{\rightrightarrows} g(0, y) = g(y).$$

从柯西准则的一般叙述出发, 可以叙述第二类反常参变积分的一致收敛的柯西准则. 我们只限于叙述一个综合性的定理, 其中包含重要的实用的结论.

定理 20 设函数 $f(x,y)$ 在 $P=X\times Y$ 上连续, 其中 $X=(a,b], Y=[c,d]$. 还设 a 是反常参变积分

$$g(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

的奇点. 那么成立下述断言.

1) 若积分 $\int_a^b f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛, 则函数 $g(y)$ 在 Y 上连续.

2) 此时

$$\int_c^d g(y)dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

3) 若积分 $\int_a^b f(x,y)dx$ 收敛, 偏导函数 $f'_y(x,y)$ 在 P 上连续, 而积分 $\int_a^b f'_y(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛, 则 $g'(y)$ 存在且

$$g'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

如果奇点 x_0 是 $X=[a,b]$ 的内点, 则如前面指出的应该用此点把闭区间 X 分成两部分并分别考虑所得的两个区间. 这种方法也可以应用于无穷的积分区间 $X=[a,+\infty)$ 含有有限个奇点 $x_1,\cdots,x_n$ 的情形. 此时可用点 $t_1<t_2<\cdots<t_{2n}$ 将 X 分成 $2n$ 个闭区间 $[t_s,t_{s+1}], s=1,\cdots,2n-1$, 以及 $[t_{2n},+\infty)$, 使在每个 $[t_s,t_{s+1}]$ 中正好有一个奇点, 而在 $[t_{2n},+\infty)$ 中无奇点. 结果得到 $2n-1$ 个第二类反常积分和一个第一类反常积分①.

到此我们结束对反常参变积分理论的叙述, 而来考虑它的应用.

§9. 参变积分理论的应用

我们来计算狄利克雷积分 $D(\alpha)$, 它也叫作狄利克雷间断因子. 依定义

$$D(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\sin\ \alpha x}{x}dx.$$

首先指出, 点 $x=0$ 不是奇点, 因为被积函数有界. 虽然 $D(0)=0$. 还有, 若 $\alpha>0$, 则根据狄利克雷判别法, 积分收敛. 这是因为

$$\int_0^t \sin\ \alpha x dx=\left|\frac{1-\cos\ \alpha t}{\alpha}\right|\leqslant\frac{2}{\alpha}.$$

此时可使用积分变数的线性变换 $\alpha x=t$, 并得到

$$D(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\sin\ \alpha x}{\alpha x}d(\alpha x)=\int_0^\infty \frac{\sin\ t}{t}dt=D(1)=D.$$

①此事当 $n=2$ 时不成立. 此时只能得到两个所说的形状的第二类积分以及一个第一类积分 —— 译者注.

而若 $\alpha<0$, 则 $\alpha=-|\alpha|, \sin\ \alpha x=-\sin|\alpha|x$, 从而

$$D(\alpha)=-\int_0^{\infty}\frac{\sin|\alpha|x}{x}dx=-D.$$

于是

$$D(\alpha)=\begin{cases} D, & 当\ \alpha>0,\\ 0, & 当\ \alpha=0,\\ -D, & 当\ \alpha<0.\end{cases}$$

现在来计算 D 的值.

定理 21 $D=\frac{\pi}{2}$.

► 令

$$g(y)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-yx}\sin\ x}{x}dx,\qquad y\in Y=[0,N], N\in\mathbb{N}.$$

被积函数 $f(x,y)=e^{-yx}\frac{\sin x}{x}$ 在 $P=X\times Y$ 上连续, 其中 $X=[0,+\infty), Y=[0,N]$, 如果令 $f(0,y)=1$ 的话.

我们来验证, 积分 $g(y)$ 在 Y 上一致收敛. 为此使用阿贝尔判别法. 置 $\alpha(x,y)=\frac{\sin x}{x}, \beta(x,y)=e^{-xy}$. 那么函数 $\beta(x,y)$ 单调且 $0<\beta(x,y)\leqslant 1$, 而积分 $\int_0^{\infty}\alpha(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛, 因为 $\alpha(x,y)$ 与 y 无关.

积分 $g(y)$ 的一致收敛性也可以直接由定义借助分部积分法证明.

现于闭区间 Y 上任取其内点 y_0 及含 y_0 的一个闭区间 $Y_\delta=[y_0-\delta, y_0+\delta]\subset Y, 0<y_0-\delta<y_0$. 在这个闭区间上, 积分

$$\int_0^{\infty}f'_y(x,y)dx=-\int_0^{\infty}e^{-yx}\sin xdx$$

一致收敛. 这可从魏尔斯特拉斯判别法推出, 因为 $|e^{-xy}\sin x|<e^{-x(y_0-\delta)}$, 而积分 $\int_0^{\infty}e^{-x(y_0-\delta)}dx$ 收敛. 此外, 被积函数 $e^{-xy}\sin x$ 在 $P_\delta=X\times Y_\delta$ 上连续. 因此, 根据莱布尼茨法则,

$$g'(y)=-\int_0^{\infty}e^{-yx}\sin xdx.$$

此积分可分部积分算出. 此处, $g'(y)=1/(1+y^2)$. 于是我们证明了函数 $g(y)$ 在 Y 上连续, 且对于 $y\neq 0$ 其导数等于 $-1/(1+y^2)$, 由此根据牛顿–莱布尼茨公式, 对于一切 $y\in(0,N]$

$$g(y)=g(N)-\int_N^{y}\frac{\alpha t}{1+t^2}=g(N)+\arctan\ N-\arctan\ y.$$

使用函数 $g(y)$ 在点 $y=0$ 处的连续性, 得

$$g(0)=\lim_{y\to 0+} g(y)=(g(N)+\arctan\ N-\arctan\ y)$$
$$=g(N)+\arctan\ N.$$

令 $N\to+\infty$ 得 $\arctan\ N\to\frac{\pi}{2}$, 并且

$$|g(N)|\leqslant\int_0^\infty e^{-Nx}\frac{|\sin x|}{x}dx\leqslant\int_0^\infty e^{-Nx}dx=\frac{1}{N}\to 0.$$

由此推出

$$D=g(0)=\lim_{N\to\infty}(g(N)+\arctan\ N)=\frac{\pi}{2}. \quad ◀$$

直接从定理 21 推出, 下面的命题成立.

推论 对于一切 $\alpha\in\mathbb{R}$ 成立等式

$$D(\alpha)=\frac{\pi}{2}\text{sign}\ \alpha.$$

第二十一讲

§10. 第一类和第二类欧拉积分

先前定义的欧拉的 Γ 函数和将在下面定义的 β 函数分别叫作第二类和第一类欧拉积分.

我们来继续研究 Γ 函数的性质.

定理 22 (欧拉–高斯公式) 对于 $s\neq 0,-1,-2,\cdots$, 成立等式

$$\Gamma(s)=\lim_{m\to\infty}P_m(s),$$

其中

$$P_m(s)=\frac{(m-1)!m^s}{s(s+1)\cdots(s+m-1)}.$$

▶ 使用欧拉公式, 得 $\Gamma(s)$ 的表达式:

$$\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{s}(1+1)^s\cdots\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^s\left(1+\frac{s}{1}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{s}{m-1}\right)^{-1}$$
$$=\lim_{m\to\infty}P_m(s). \quad ◀$$

定理 23 (高斯公式) 对于 $s>0$, 定理 22 中的

$$P_{m+1}(s)=\left(1+\frac{1}{m}\right)^s\int_0^m\left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{s-1}dt.$$

► 借助于变量变换及分部积分, 得到

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^s\int_0^m\left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{s-1}dt=(m+1)^s\int_0^1(1-x)^m x^{s-1}dx$$

$$=(m+1)^s\frac{m}{s}\int_0^1(1-x)^{m-1}x^s dx$$

$$=(m+1)^s\frac{m!}{s(s+1)\cdots(s+m-1)}\int_0^1 x^{s+m-1}dx$$

$$=(m+1)^s\frac{m!}{s(s+1)\cdots(s+m)}=P_{m+1}(s).\quad ◄$$

Γ 函数有下述反常积分表示.

定理 24 (欧拉的 Γ 函数的积分表示) 当 $s>0$ 时成立等式

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx.$$

► 首先指出, 当 $s\geqslant 1$ 时, 所考察的参变积分是第一类反常积分, 而当 $0<s<1$ 时, 它有奇点 $x=0$. 但在两种情况下它都收敛, 这是因为, 在零的邻域内被积表达式以函数 x^{s-1} 为优控, 而在无穷远处则以函数 $e^{-\frac{x}{2}}$ 为优控.

考虑差 $R_m(s)$, 其中

$$R_m(s)=\int_0^m x^{s-1}e^{-x}dx-P_{m+1}(s)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-s}$$

$$=\int_0^m x^{s-1}\left(e^{-x}-\left(1-\frac{x}{m}\right)^m\right)dx.$$

根据函数 $g(y)=e^y-1-y$ 的图像的凸性, 对于一切 y 成立 $1+y\leqslant e^y$. 因此

$$1+\frac{x}{n}\leqslant e^{\frac{x}{n}},\quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqslant e^x$$

以及

$$1-\frac{x}{n}\leqslant e^{-\frac{x}{n}},\quad \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\leqslant e^{-x}$$

对于一切实数 x 和自然数 n 成立. 此外, 注意到从伯努利不等式对于 $0<y\leqslant 1$ 推出 $(1-y)^m>1-my$, 即 $1-(1-y)^m<my$. 由此对于 $0\leqslant x\leqslant m$ 和 $y=x^2/m^2$ 得

到估计式

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant e^{-x}-\left(1-\frac{x}{m}\right)^{m} &= e^{-x}\left(1-e^{x}\left(1-\frac{x}{m}\right)^{m}\right) \\
&\leqslant e^{-x}\left(1-\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}\left(1-\frac{x}{m}\right)^{m}\right) \\
&= e^{-x}\left(1-\left(1-\frac{x^{2}}{m^{2}}\right)^{m}\right) = e^{-x}\left(1-(1-y)^{m}\right) \\
&< e^{-x} m y = \frac{e^{-x}x^{2}}{m}.
\end{aligned}
$$

①

但在这种情况下, 量 $R_m(s)$ 有如下估计:

$$0 \leqslant R_m(s) < \int_0^m \frac{x^{s+1}e^{-x}}{m}dx < \frac{1}{m}\int_0^{\infty} x^{s+1}e^{-x}dx.$$

这里 $s+1>1$, 因此最后的积分收敛. 于是 $0<R_m(s)<\dfrac{A_s}{m}$, 其中 A_s 是只与 s 有关的一个数. 结果, 当 $m\to\infty$ 时 $R_m(s)\to 0$. 我们终于得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx &= \lim_{m\to\infty}\int_0^m x^{s-1}e^{-x}dx \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(R_m(s)+P_{m+1}(s)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-s}\right) = 0+\Gamma(s)=\Gamma(s).
\end{aligned}
$$

◄

注 1. 定理 24 的上述证明的思想由施勒米希给出 (1879).

2. 借助于分部积分, 从定理 24 导出下面的柯西公式, 它对于一切形如 $-(m+1)<s<-m$ 的值成立, $m\in\mathbb{N}$:

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} x^{s-1}(e^{-x}-\varphi_m(x))dx,$$

其中 $\varphi_m(x)=\sum\limits_{n=0}^{m}\dfrac{(-x)^n}{n!}$. 这里, 加于 s 的条件保证有两个奇点 $x=0$ 和 $x=+\infty$ 的反常积分收敛. 实际上, 在奇点 $x=0$ 的邻域中, 被积函数等价于量 $x^{s+m}\dfrac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}$, 而在点 $x=+\infty$ 的邻域中是阶为 $O(x^{s+m+1})$ 的量. 由此根据比较判别法推出积分的收敛性.

函数 $\sin\pi s$ 的无穷乘积表示以后有用. 我们引入此表示作为下述引理, 其证明留待研究傅里叶级数时给出.

引理 3 (欧拉引理) 对于一切实的非整数 s 成立公式

$$\sin\pi s=\pi s\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right).$$

①此式中 $x=0$给出 "$0<0$", 前面 $1-(1-y)^m<my$ 当 $m=1$ 时给出 "$y<y$", 诸如此类错误请读者留意—— 译者注.

定理 25 (欧拉的余元公式)　对于一切非整数 s 成立公式

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}.$$

特别地 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

► 从欧拉公式和引理 3 得

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s)=-s\Gamma(-s)\Gamma(s)=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)^{-1}=\frac{\pi}{\pi s\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)}=\frac{\pi}{\sin\pi s}.$$

第二个结论直接从第一个结论推出. ◄

定理 26 (勒让德倍元公式)　成立等式

$$\Gamma'(2s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right).$$

► 构作乘积

$$F_m(s)=\frac{2^{2s-1}P_m(s)P_m\left(s+\frac{1}{2}\right)}{P_{2m}(2s)P_m\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

写出 $F_m(s)$ 的显式表示, 有

$$F_m(s)=$$

$$\frac{2^{2s-1}(m-1)!m^s(m-1)!m^{s+\frac{1}{2}}\cdot 2s\cdot\cdots\cdot(2s+2m-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\left(m-\frac{1}{2}\right)}{(2m-1)!(2m)^{2s-1}(m-1)!m^{\frac{1}{2}}s\cdot\cdots\cdot(s+m-1)\left(s+\frac{1}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(s+m-\frac{1}{2}\right)}.$$①

令 $m\to\infty$ 就过渡到等式

$$\frac{2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=1.$$ ◄

现在来研究第一类欧拉积分, 即 β 函数.

定义 14　对于 $\alpha>0,\beta>0$, 欧拉的 β 函数 $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ 由等式

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

定义.

①此式中分母的因子 $(2m)^{2s-1}$ 应为 $(2m)^{2s}$, 且 $F_m(s)=1$ —— 译者注.

定理 27 当 $\alpha>1$ 和 $\beta>1$ 时成立公式①

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

► 在定义函数 $B(\alpha,\beta)$ 的积分中作变量变换 $x=\dfrac{y}{1+y}$. 那么得到

$$dx=\frac{dy}{(1+y)^2},\quad x^{\alpha-1}=\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha-1}},\quad (1-x)^{\beta-1}=\frac{1}{(1+y)^{\beta-1}},$$
$$B(\alpha,\beta)=\int_0^\infty\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy.$$

由此推出

$$H=B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)=\int_0^\infty\frac{y^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy.$$

接着, 若 $y>0$ 则

$$\Gamma(\alpha+\beta)=\int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}dx=(1+y)^{\alpha+\beta}\int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x(y+1)}dx.$$

因此,

$$H=\int_0^\infty\frac{y^{\alpha-1}(1+y)^{\alpha+\beta}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\left(\int_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x(y+1)}dx\right)dy$$
$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty(xy)^{\alpha-1}x^\beta e^{-x(y+1)}dx\right)dy.$$

在最后的积分中, 我们得到

$$H=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty x(xy)^{\alpha-1}e^{-xy}dy\right)x^{\beta-1}e^{-x}dx$$
$$=\Gamma(\alpha)\int_0^\infty x^{\beta-1}e^{-x}dx=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta).$$

剩下的只是指出交换积分次序的理由. 被积函数 $f(x,y)=y^{\alpha-1}x^{\alpha+\beta-1}e^{-x(y+1)}$ 处处非负且连续. 此外, 积分

$$g(y)=\int_0^\infty f(x,y)dx=\frac{y^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+y)^{\alpha+\beta}},h(x)=\int_0^\infty f(x,y)dy=\Gamma(\alpha)x^{\beta-1}e^{-x}$$

中的每个都在$[0,+\infty)\times[0,+\infty)$上连续且非负, 而反常积分$\int_0^\infty g(y)dy$和$\int_0^\infty h(x)dx$都收敛. 因此, 积分次序确实是可以交换的. ◄

注 由于 Γ 函数 $\Gamma(s)$ 对于一切 $s\neq 0,-1,-2,\cdots$ 有定义, 所以定理 6 的公式可用来拓广函数 $B(\alpha,\beta)$ 的定义到集合 $\{(\alpha,\beta):\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha\neq 0,-1,-2,\cdots;\beta\neq 0,-1,-2,\cdots\}$ 上.

① 只需在证明中把 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 换成 $(0,+\infty)^2$, 不必作其他改动就可把定理的条件 "$\alpha>1,\beta>1$" 放宽为 "$\alpha>0,\beta>0$" —— 译者注.

第二十二讲

§11. 斯特林公式

我们以证明一个有重要实用意义的斯特林公式来结束对于欧拉积分的研究. 此公式给出了 Γ 函数的近似值, 当然也给出了函数 $n!$ 的近似值.

定理 28 (斯特林公式) 当 $s \geqslant 2$ 时成立等式

$$\ln\Gamma(s) = \left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - \ln s + c_0 + R,$$

其中 $c_0 = \ln\sqrt{2\pi}$, 而对于余项 R 成立不等式

$$0 > R \geqslant -\frac{1}{8s+4},$$

► 使用等式

$$\lim_{n\to\infty} P_n(s) = \Gamma(s).$$

我们还有

$$\ln P_n(s) = s\ln n - \ln s + \sum_{k=1}^{n-1}(\ln k - \ln(k+s)).$$

使用欧拉求和公式得

$$\ln P_n(s) = A - B,$$

其中

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}(\ln x - \ln(x+s))dx + s\ln n - \ln s,$$

$$B = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\rho(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+s}\right)dx$$

(其中 $\rho(x) = \dfrac{1}{2} - \{x\}$, 见第八章 §2 定理 4—— 译者注).

先考虑 A, 有

$$\int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln x dx - \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln(x+s)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\ln x dx - \int_{s+\frac{1}{2}}^{n+s-\frac{1}{2}}\ln x dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}}\ln x dx - \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+s-\frac{1}{2}}\ln x dx = A_1 - A_2.$$

求积分得

$$A_1 = (x\ln x - x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} = \left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - s + \ln\sqrt{2}.$$

下面认为 $n > 2s$. 那么, 用公式 $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = O\left(\frac{x}{n}\right)$, 得

$$s\ln n - A_2 = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+s-\frac{1}{2}} (\ln n - \ln x)dx = -\int_{-\frac{1}{2}}^{s-\frac{1}{2}} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)dx$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{s-\frac{1}{2}} O\left(\frac{x}{n}\right)dx = O\left(\frac{s^2}{n}\right).$$

于是得到关系式

$$A = \left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - s - \ln s + c_1 + O\left(\frac{s^2}{n}\right),^{①}$$

其中 c_1 是常数.

现考察 B. 我们看到, 不等式

$$-\frac{1}{8} \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{t} \rho(x)dx \leqslant 0$$

对于一切 $t \geqslant \frac{1}{2}$ 成立. 因此根据狄利克雷判别法, 积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\rho(x)}{x}dx$ 收敛. 结果

$$B_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\rho(x)}{x}dx = c_2 + o(1).$$

使用第二中值定理来估计 $B_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\rho(x)}{x+s}dx$, 得

$$B_2 = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{t} \rho(x)dx.$$

由此可见 $-\frac{1}{8s+4} \leqslant B_2 \leqslant 0$. 但由定义 $B = B_1 - B_2$. 结果从等式 $\ln P_n(s) = A - B$ 推出关系式

$$\ln P_n(s) = \left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - \ln s + c_0 + B_2 + O\left(\frac{s^2}{n}\right),$$

其中 c_0 是一个绝对常数. 令 $n \to \infty$ 得等式

$$\ln\Gamma(s) = \left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - \ln s + c_0 - \frac{\theta}{8s+4},$$

①原文式中 "$-\ln s$" 作 "$+\ln s$"—— 译者注.

其中 $\theta=\theta(s)$ 满足条件 $0\leqslant\theta\leqslant 1$. 剩下的是算出常数 c_0 的值, 为此使用勒让德公式, 那么, 当 $s\to+\infty$ 时有

$$(2s-1)\ln 2+\ln\Gamma(s)+\ln\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)=\ln\Gamma(2s)+\ln\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right)-\left(s+\frac{1}{2}\right)-\ln s+c_0+(s+1)\ln(s+1)-(s+1)$$
$$-\ln\left(s+\frac{1}{2}\right)+c_0+O\left(\frac{1}{s}\right)+(2s-1)\ln 2=\left(2s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(2s+\frac{1}{2}\right)$$
$$-\left(2s+\frac{1}{2}\right)-\ln(2s)+c_0+\ln\sqrt{\pi}+O\left(\frac{1}{s}\right).$$

使用关系式

$$\ln(s+a)=\ln s+\frac{a}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

就得到

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)\ln s+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{s}\right)-\left(s+\frac{1}{2}\right)+c_0-\ln s+(s+1)\ln s+1+O\left(\frac{1}{s}\right)$$
$$-(s+1)+c_0-\ln s+(2s-1)\ln 2=\left(2s+\frac{1}{2}\right)\ln 2+\left(2s+\frac{1}{2}\right)\ln s+\frac{1}{2}$$
$$-\left(2s+\frac{1}{2}\right)-\ln 2-\ln s+c_0+\ln\sqrt{\pi}+O\left(\frac{1}{s}\right).$$ [①]

合并同类项, 得等式

$$c_0=\ln\sqrt{2\pi}+O\left(\frac{1}{s}\right),$$

从而 $c_0=\ln\sqrt{2\pi}$. ◀

我们发现, 若再用关系式

$$\ln(s+a)=\ln s+\frac{a}{s}+O\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

则从定理 28 可得斯特林公式的另一个形式

$$\ln\Gamma(s)=\left(s-\frac{1}{2}\right)\ln s-s+\ln\sqrt{2\pi}+O\left(\frac{1}{s}\right).$$

特别地对于 $s=n+1$ 由此得到

$$\ln\Gamma(n+1)=\ln n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n+1-(n+1)+\ln\sqrt{2\pi}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$=n\ln n-n+\ln\sqrt{2\pi n}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

①原式中倒数第二项不是 "$\ln\sqrt{\pi}$" 而是 $\sqrt{\pi}$—— 译者注.

结果, 成立渐近公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}e^{O\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

此式也叫作斯特林公式.

经更精细的计算可以对于定理 28 的渐近公式中的余项 R 得到估计式 $0 > R \geqslant -\frac{1}{24s+12}$. 此结果由高斯给出, 他还证明了在对于 $n!$ 的渐近公式中的量 $e^{O\left(\frac{1}{n}\right)}$ 可写成 e^{θ_n}, 其中 $0 < \theta_n \leqslant \frac{1}{12n}$.

当然, 欧拉积分的理论并不局限于此处所证的命题, 不过本课程的大纲限制我们只考虑这些问题.

第十八章　傅里叶级数和傅里叶积分

第二十三讲

§1. 用三角级数表示实数的小数部分. 泊松求和公式. 高斯和

本章基本上研究三角傅里叶级数, 此课题之重要性在于, 它的应用不仅在数学中, 而且在力学、物理以及自然科学的其他领域中都起着巨大的作用. 在多数情形下, 三角傅里叶级数的作用之发挥, 是靠把自身为三角级数的特点与作为一般傅里叶级数的特点联合起来作成的. 我们指出, 在逐次了解每个命题时, 弄明白该命题主要反映了上述两个理论侧面的哪一方面是有益处的.

此课题内容之广泛, 使得即使是它的经典内容也无法完全纳入本讲义的范畴之中, 所以我们只限于讨论反映一般情形的最简单的定理. 在本章末尾要涉及傅里叶积分的初等理论的一些问题. 先给出一些基本的定义.

定义 1 形如

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

的函数 $P_n(x)$ 叫作 n 阶或 n 次三角多项式.

我们来解释, 为什么在 "零阶" 单项式 $\frac{a_0}{2}$ 中, 系数 a_0 要带上一个数值因子 $\frac{1}{2}$. 这是因为, 这种写法使得能够统一地把系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_1, \cdots, b_n$ 表示成如下

形式:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(x)\cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(x)\sin kx dx,$$

其中 $k = 0, 1, \cdots, n$.

定义 2 形如

$$\Sigma f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

的函数级数叫作三角级数, 或更确切地叫作形式三角级数.

注 在定义 1 和定义 2 中, 自变量 x 可以取任意的值. 因此, 代替自变量 x, 也可以考虑任意的函数 $x = \varphi(t)$. 这样得到的形式函数级数, 仍然叫作三角级数.

定义 3 若存在函数 $g(x)$, 使得三角级数 $\sum f_n(x)$ 的一切系数 a_k 和 b_k 都可由形如

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos kx dx, b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin kx dx, k = 0, 1, 2, \cdots$$

的欧拉-傅里叶公式表出, 则此级数叫作函数 $g(x)$ 的三角傅里叶级数. 此处全部公式中的积分也可以是反常积分.

在研究三角级数时, 基本上也发生与任意的函数级数一样的问题. 例如, 对于具体的级数可以问, 收敛域如何, 和函数的性质如何, 还可以提出关于给定的函数用三角级数表示的问题: 表示的唯一性, 级数在一点处收敛的专门的判别法, 级数在某个集合上收敛的专门的判别法, 级数的逐项积分和逐项微分的法则, 等等.

另一方面, 要证明贝塞尔不等式, 帕塞瓦尔等式及其他反映一般傅里叶级数的命题. 应该指出, 一个具体的函数傅里叶级数的系数, 给出了关于该函数的有用的信息, 即使级数发散时也是如此. 那时有各种不同的方式来借助发散的级数表示所给的函数. 特别地, 发散级数的求和法在这里起着巨大的作用. 关于级数的求和法先前曾经提到过.

首先, 我们举一个例子. 它有重要的进一步的应用. 考虑三角级数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{\pi k}.$$

用 $s_n(x)$ 表示它的第 n 部分和. 定义函数 $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ 以及

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho(x), & 若\ x\ 不是整数, \\ 0, & 若\ x\ 是整数. \end{cases}$$

函数 $\rho_0(x)$ 叫作伯努利函数.

定理 1 对于自然数 n 成立公式

$$\rho(x) = s_n(x) + \sigma_n(x), \quad \rho_0(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

并且

$$|\sigma_n(x)| \leqslant R_n(x), \quad |r_n(x)| \leqslant R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2 \pi x}}$.

定理的证明依靠下面两个引理, 并在后面给出.

再引入一个记号. 令

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \cos 2\pi kx = 1 + 2\cos 2\pi x + \cdots + 2\cos 2\pi nx.$$

引理 1 成立关系式

$$\text{a)}\, s_n'(x) = T_n(x) - 1; \quad \text{b)} \int_0^1 T_n(x)dx = 1;$$
$$\text{c)}\, |T_n(x)| \leqslant 2n + 1; \quad \text{d)}\, T_n(x) = \frac{\sin \pi(2n+1)x}{\sin \pi x}.$$

► 结论 a), b), c) 是明显的. 看 d), 由于 $2\cos dx \ \sin \beta x = \sin(\alpha + \beta)x - \sin(\alpha - \beta)x$, 所以

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2\sin \pi x} \sum_{k=-n}^{n} 2\cos 2\pi kx \ \sin \pi x \\ &= \frac{1}{2\sin \pi x} \sum_{k=-n}^{n} (\sin \pi(2k+1)x - \sin \pi(2k-1)x) \\ &= \frac{\sin(2n+1)\pi x - \sin(-2n-1)\pi x}{2\sin \pi x} \\ &= \frac{\sin \pi(2n+1)x}{\sin \pi x}. \end{aligned}$$ ◄

引理 2 当 $0 < \delta \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时成立估计式

$$\left| \int_\delta^{\frac{1}{2}} T_n(x)dx \right| = \left| \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} T_n(x)dx \right| \leqslant \frac{4}{\sqrt{1 + (2n+1)^2 \sin^2 \pi\delta}}.$$

► 函数 $T_n(x)$ 以 1 为周期并且是偶函数, 所以

$$\int_\delta^{\frac{1}{2}} T_n(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta} T_n(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta} T_n(x)dx = A.$$

令 $a=\pi(2n+1)$. 那么

$$A=\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\frac{\sin ax}{\sin\pi x}dx=-\frac{1}{a}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\frac{d\cos ax}{\sin\pi x}$$
$$=-\frac{1}{a}\left(\left.\frac{\cos ax}{\sin\pi x}\right|_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}-\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\cos ax\ d\left(\frac{1}{\sin\pi x}\right)\right).$$

函数 $\sin\pi x$ 在积分区间上单调减, 故函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x}$ 单调增. 所以 $\varphi'(x)>0$. 此外, $|\cos ax|\leqslant 1$ 且当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时 $\cos ax=\cos\dfrac{\pi}{2}(2n+1)=0$. 结果

$$\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\cos ax\ d\left(\frac{1}{\sin\pi x}\right)\right|=\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\cos ax\ \varphi'(x)dx\right|\leqslant\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\varphi'(x)dx$$
$$=\frac{1}{\sin\pi\delta}-1.$$

由此, 顾及 $\left|\left.\dfrac{\cos ax}{\sin\pi x}\right|_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}\right|\leqslant\dfrac{1}{\sin\pi\delta}$, 得

$$|A|\leqslant\frac{2}{a\sin\pi\delta}.$$

还有, 由于函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在区间 $(0,\pi/2)$ 上减且 $\pi\delta<\pi/2$, 所以

$$\frac{\sin\pi\delta}{\pi\delta}\geqslant\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi},\frac{\pi\delta}{\sin\pi\delta}\leqslant\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sin\pi\delta}\leqslant\frac{1}{2\delta}.$$

因此,

$$|A|\leqslant\frac{2}{a2\delta}=\frac{1}{a\delta}=\frac{1}{\pi(2n+1)\delta}.$$

现若 $\dfrac{1}{(2n+1)\pi}\leqslant\delta\leqslant\dfrac{1}{2}$, 则 $|A|\leqslant 1$, 而若 $0<\delta<\dfrac{1}{(2n+1)\pi}$ 则根据估计式 $|T_n(x)|\leqslant 2n+1$ 有

$$|A|=\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta}T_n(x)dx\right|=\left|\frac{1}{2}-\int_0^{\delta}T_n(x)dx\right|\leqslant\frac{1}{2}+\delta(2n+1)<\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}<1.$$

于是成立估计式

$$|A|<\min\left(1,\frac{2}{a\sin\pi\delta}\right)\leqslant\frac{4}{\sqrt{1+a^2\sin^2\pi\delta}},$$

这是因为对于任意的 $x>0$ 和 $y>0$ 成立明显的不等式

$$\min\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)<\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}.\quad ◀$$

► 现证定理 1. 函数 $\rho(x)$ 和 $\rho_0(x)$ 的值仅当 $x=z, z$ 为整数时不同. 先验证定理的结论在这些点成立. 实际上

$$\sigma_n(z)=\sigma_n(0)=\rho(0)-s_n(0)=\frac{1}{2}<4=R_n(0),$$
$$r_n(z)=r_n(0)=\rho_0(0)-s_n(0)=0<4=R_n(0).$$

而若 x 不是整数, 则 $\sigma_n(x)=r_n(x)$. 于是只要考虑函数 $\sigma_n(x)$ 就够了. 由于两个函数 $|\sigma_n(x)|$ 和 $R_n(x)$ 都是偶函数且以 1 为周期, 故可认为 $0<x<\frac{1}{2}$. 此时

$$\int_0^x T_n(y)dy=\int_0^x\left(1+2\sum_{k=1}^n\cos 2\pi ky\right)dy=x+\sum_{k=1}^n\frac{\sin 2\pi kx}{\pi k}=x+s_n(x).$$

但因 $0<x<1/2$, 故 $\{x\}=x$ 而 $\rho(x)=1/2-\{x\}=1/2-x, x=\frac{1}{2}-\rho(x)$. 所以

$$\int_0^x T_n(y)dy=\frac{1}{2}-\rho(x)+s_n(x)=\frac{1}{2}-\sigma_n(x).$$

由此推出

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2}-\int_0^x T_n(y)dy=\frac{1}{2}-\int_0^{\frac{1}{2}}T_n(y)dy+\int_x^{\frac{1}{2}}T_n(y)dy$$
$$=\int_x^{\frac{1}{2}}T_n(y)dy.$$

现使用引理 2 估计 $\sigma_n(x)$. 得

$$|\sigma_n(x)|=\left|\int_x^{\frac{1}{2}}T_n(y)dy\right|\leqslant\frac{4}{\sqrt{1+(2n+1)^2\sin^2\pi x}}=R_n(x).$$

定理 1 证毕. ◄

作为定理 1 的简单推论, 我们再证一个定理.

定理 2 当 $n\to\infty$ 时

a) $s_n(x)\to\rho_0(x)$;

b) 若 $0<\delta<1, I=[\delta,1-\delta]$, 则 $s_n(x)\underset{I}{\rightrightarrows}\rho(x)=\rho_0(x)$.

► 结论 a) 等价于当 $n\to\infty$ 时 $r_n(x)\to 0$. 这确实成立, 因为对于一切 $n, r_n(0)=0$, 而若 x 不是整数则 $|r_n(x)|\leqslant R_n(x)\to 0$. 结论 b) 从魏尔斯特拉斯判别法推出, 因为量 $|s_n(x)|$ 在 I 上被无穷小数列 $R_n(\delta)=\dfrac{4}{\sqrt{1+n^2\sin^2\pi\delta}}$ 控制. ◄

定理 3 (泊松求和公式) 设 $a<b$ 都是半整数, 即形如 $z+\frac{1}{2}$ 的数, 其中 z 是整数. 设函数 $f(x)$ 在 $X=[a,b]$ 上有连续的导函数 $f'(x), |f'(x)|\leqslant M$. 那么对于任意

的自然数 N 成立公式

$$S=\sum_{a<n\leqslant b} f(n)=\sum_{n=-N}^{N}\int_a^b f(x)\cos 2\pi nx dx+R_N,$$

其中

$$|R_N|\leqslant \frac{8M(b-a)\ln N}{N}.$$

特别地, 当 $N\to\infty$ 时

$$S=\sum_{a<n\leqslant b} f(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\int_a^b f(x)\cos 2\pi nx dx.$$

这里记号 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}'$ 表示级数的和是按柯西主值意义的.

► 对于和 S 使用欧拉求和公式, 得

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b \rho(x)f'(x)dx.$$

根据定理 1 有 $\rho(x)=s_N(x)+\sigma_N(x)$. 因此

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b s_N(x)f'(x)dx+R_N,$$

其中 $R_N=-\int_a^b\sigma_N(x)f'(x)dx$. 分部积分并顾及 $s_N(a)=s_N(b)=0$, 得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx-\int_a^b s_N(x)f'(x)dx&=\int_a^b f(x)dx-f(x)s_N(x)\Big|_a^b+\int_a^b s_N'(x)f(x)dx\\&=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b f(x)\left(\sum_{k=-N}^{N}\cos 2\pi kx-1\right)dx\\&=\sum_{k=-N}^{N}\int_a^b f(x)\cos 2\pi kx dx.\end{aligned}$$

剩下的是估计余项 R_N. 使用定理 1 并顾及 $|f'(x)|\leqslant M$, 得估计式

$$|R_N|=\left|\int_a^b\sigma_N(x)f'(x)dx\right|\leqslant 4M\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{1+N^2\sin^2\pi x}}.$$

在最后的积分中的被积函数以 1 为周期并且是偶的, 所以

$$|R_N|\leqslant 8M(b-a)\int_0^{\frac12}\frac{dx}{\sqrt{1+N^2\sin^2\pi x}}\leqslant 8M(b-a)\left(\int_0^{\frac1N}dx+\int_{\frac1N}^{\frac12}\frac{dx}{2Nx}\right)$$

$$= 8M(b-a)\left(\frac{1}{N}+\frac{\ln\frac{N}{2}}{2N}\right) < \frac{8M(b-a)\ln N}{N}.^{①} \quad ◀$$

狄利克雷给出了泊松求和公式的精美的应用. 他找到了形如 $\sum\limits_{n=1}^{N}\cos\frac{2\pi n^2}{N}$ 以及 $\sum\limits_{n=1}^{N}\sin\frac{\pi n^2}{N}$ 的高斯和的精确值. 我们还要提及一个由沃罗诺伊于 1903 年给出的泊松公式对于寻求双曲线下整点数的渐近表示的问题的漂亮的应用 (此问题称为狄利克雷除数问题). 我们来计算高斯和的值. 高斯在自己的《算术研究》中用几个不同的方法算出了它们的值, 但我们将以狄利克雷的方法为基础.

定理 4 对于自然数 N 成立下述公式:

$$G(N)=\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i\frac{n^2}{N}}=\frac{1+i^{-N}}{1+i^{-1}}\sqrt{N}.$$

► 我们记得欧拉公式

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

其中 φ 是实数. 将泊松求和公式写成复形式, 当 $k\to\infty$ 时得

$$G(N)=\sum_{m=-2k}^{2k}I(m)+R,$$

其中

$$I(m)=\int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}}e^{2\pi i\left(\frac{x^2}{N}+mx\right)}dx,\quad R=O\left(\frac{N\ln k}{k}\right).$$

对积分 $I(m)$ 进行变换, 得

$$\begin{aligned}I(m)&=\int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}}e^{2\pi i\left(\frac{1}{N}\left(x+\frac{1}{2}mN\right)^2-\frac{1}{4}m^2N\right)}dx\\&=e^{-2\pi i\frac{m^2N}{4}}\int_{\frac{1}{2}mN+\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}m+1)N+\frac{1}{2}}e^{2\pi i\frac{y^2}{N}}dy.\end{aligned}$$

把量 $I(m)$ 分别关于偶数 $m=2l$ 和奇数 $m=2l-1$ 求和, 得

$$\begin{aligned}G(N)&=\sum_{l=-k}^{k}\int_{lN+\frac{1}{2}}^{(l+1)N+\frac{1}{2}}e^{2\pi i\frac{y^2}{N}}dy+\sum_{l=-k}^{k}e^{-\frac{\pi i N}{2}}\int_{(l-\frac{1}{2})N+\frac{1}{2}}^{(l+\frac{1}{2})N+\frac{1}{2}}e^{2\pi i\frac{y^2}{N}}dy+R\\&=\int_{-kN+\frac{1}{2}}^{(k+1)N+\frac{1}{2}}e^{2\pi i\frac{y^2}{N}}dy+i^{-N}\int_{-(k+\frac{1}{2})N+\frac{1}{2}}^{(k+\frac{1}{2})N+\frac{1}{2}}e^{2\pi i\frac{y^2}{N}}dy+R\end{aligned}$$

①由证明可见, 定理 3 的结论需当 $N\geqslant 4$ 时成立 —— 译者注.

$$= \sqrt{N}(1+i^{-N})\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i z^2}dz + O(k^{-1}) + R,①$$

这是因为对于 $|d| \leqslant \sqrt{N}$ 有不等式

$$\left|\int_{k\sqrt{N}+\alpha}^{+\infty} e^{2\pi i z^2}dz\right| \leqslant k^{-1}N^{-\frac{1}{2}}② \qquad (k>2).$$

令 $k\to\infty$ 过渡到极限, 得

$$G(N) = \sqrt{N}(1+i^{-N})\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i z^2}dz.$$

因此,

$$G(N) = \frac{1+i^{-N}}{1+i^{-1}}\sqrt{N}. \quad ◀$$

后面会用得着区间 $I=[a,b]$ 的特征函数 $\varphi(x)=\varphi_I(x)$ 通过函数 $\rho_0(x)$ 的表达式, 其中 $0\leqslant a<b<1$.

定义 4 给定在闭区间 $[0,1]$ 上的函数 $\varphi(x)=\varphi_I(x)$:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & 若\ a<x<b,\\ \dfrac{1}{2}, & 若\ x=a\ 或\ x=b,\\ 0, & 若\ x<a\ 或\ x>b,\end{cases}$$

叫作区间 I 的特征函数.

引理 3 对于 $x\in[0,1]$ 成立等式

$$\varphi_I(x) = b-a+\rho_0(x-a)+\rho_0(x-b).$$

► 用 $f(x)$ 表示欲证的等式的右边, 显然, 对于一切 $x\neq a, x\neq b$, 有

$$f'(x) = \rho_0'(x-a)-\rho_0'(x-b) = -1+1=0.$$

因此, $f'(x)$ 与 $\varphi_I(x)$ 一样是逐段取常值的函数. 而且它们的间断点重合. 此外

$$\begin{aligned} f(a) &= b-a+\rho_0(0)+\rho_0(a-b) = b-a+\rho_0(b-a)\\ &= b-a+\frac{1}{2}-(b-a)=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

可类似地验证等式 $f(b)=1/2$. 同时还有

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= b-a+\rho_0\left(\frac{b-a}{2}\right)-\rho_0\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ &= b-a+2\rho_0\left(\frac{b-a}{2}\right) = b-a+1-2\frac{b-a}{2} = 1 = \varphi_I\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

---

①式中 “$O(k^{-1})$” 原文作 $O(N^{-\frac{1}{4}}k^{-\frac{1}{2}})$——译者注.

②原文此处不是 “$k^{-1}N^{-\frac{1}{2}}$”, 而是 “$k^{-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{4}}$”——译者注.

在点 $x=a$ 处, 两函数皆有跳跃等于 1, 而在点 b 处之跳跃皆为 -1. 这表明两函数在整个闭区间 $[0,1]$ 上重合. ◄

从引理 3 和定理 1 直接推出下述引理.

引理 4 对于一切 $n \geqslant 1$ 成立公式

$$\varphi_I(x) = b - a + s_n(x-a) - s_n(x-b) + E_n(x),$$

其中

$$|E_n(x)| \leqslant \frac{4}{\sqrt{1+n^2\sin^2\pi(x-a)}} + \frac{4}{\sqrt{1+n^2\sin^2\pi(x-b)}}.$$

类似的结论对于逐段为常数的周期为 1 的函数, 在间断点处等于其左、右极限之和的一半的函数也成立.

第二十四讲

§2. 贝塞尔不等式. 正交函数系的封闭性与完全性

我们从考虑下述为勒贝格提出的定义开始.

定义 5 点 x_0 叫作函数 $f(x)$ 的正则点, 如果函数在此点的值 $f(x_0)$ 等于它在此点的左极限与右极限的和的一半. 此时说函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处正则.

显然, 给定函数的每个连续点都是它的正则点.

定义 6 在区间 I 的每点处都正则的函数 $f(x)$ 叫作是在此区间上正则的函数.

定义 7 在实轴的每个闭区间内都只有有限个间断点, 且在这些点处都正则的周期函数叫作严格正则函数.

定义 8 若周期函数 $g(x)$ 可表示成

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt + g(a),$$

其中 $f(t)$ 是严格正则函数, 那么函数 $g(x)$ 叫作严格逐段光滑函数.

我们将使用这些定义来研究三角傅里叶级数.

全体具有同一周期 $l>0$ 的严格正则函数的集合 $W=W_l$ 构成一个线性空间. 此断言易于验证.

对于此集合 W 中的每一对函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 用公式

$$T(f,g)=\kappa\int_0^l f(x)g(x)dx^{①}$$

定义一个泛函. 这里 $\kappa>0$ 是任意的固定的数, 叫作权系数.

我们叙述泛函 $T(f,g)$ 的一系列性质.

1° 对称性, 即 $T(f,g)=T(g,f)$.

2° 双线性, 即对于任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 和 $f,g,h\in W$

$$T(f,\alpha g+\beta h)=\alpha T(f,g)+\beta T(f,h).$$

3° 正定性, 即

a) $T(f,f)\geqslant 0$, 对于一切 $f\in W$;

b) 只要 $f\in W$ 且在一个点上 $f(x)$ 异于零, 则 $T(f,f)>0$.

最后的不等式这样推出: 如果 $f(x_0)=y_0\neq 0$, 那么此函数在点 x_0 处或左极限 $l_1\neq 0$ 或右极限 $l_2\neq 0$. 于是对于某 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$. 在点 x_0 的左 δ 邻域或右 δ 邻域中成立 $|f(x)|\geqslant\varepsilon$. 从而

$$T(f,f)=\kappa\int_0^l f^2(x)dx\geqslant\kappa\delta\varepsilon^2>0,$$

这表明结论 3°b) 成立.

于是, 定义在笛卡儿乘积 $H=W\times W$ 上的双线性泛函 $T=T_{l,\kappa}$ 可以看作是定义在空间 W 上的标量积 (或叫内积). 因此, 代替符号 $T(f,g)$ 可简单地写 (f,g).

定义 9 *W 中的函数列 $\{f_n(x)\}$ 叫作正交函数系, 如果对于一切 $m\neq n$ 都有 $(f_m,f_n)=0$, 即 f_m 和 f_n 相互正交.*

若同时对于一切 $n\in\mathbb{N}$ 成立 $\sqrt{(f_n,f_n)}=1$, 则此序列叫作规范正交函数系.

我们记得, 数 $\sqrt{(f,f)}=\|f\|$ 叫作函数关于我们所引入的内积的范数. 我们指出, 同时此数也是函数 $f(x)$ 在空间 L_2 中的范数, 其中 L_2 是在区间 $[0,l]$ 上依勒贝格意义平方可积的函数的全体所成的线性空间. 已知的是, 函数空间 L_2 满足希尔伯特空间的公理. 不过由于勒贝格积分理论的系统研究不在本课程范围之内, 我们不再涉及这个问题.

于是, 规范正交函数系是这样的函数列 $\{f_n(x)\}\subset W$, 它所有的项都彼此正交且每一项的范数都等于 1.

定义 10 *设 $F=\{f_n\}$ 是 W 的一个规范正交函数系. 对于 $g\in W$, 数 $c_n=c_n(g)=(f_n,g)$ 叫作函数 g 关于 F 的傅里叶系数. 函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nf_n(x)$ 叫作函数 g 关于 F 的傅里叶级数.*

①原文的积分为 $\int_0^1$, 下同. 译者认为应是 $\int_0^l$ —— 译者注.

所引入的概念就是一般的关于规范正交函数系的傅里叶级数的定义.

傅里叶系数 c_n 也可以对于不属于 W 的函数来计算, 例如, 对于在 $I=[0,l]$ 上常义可积甚或反常意义可积的函数 $g(x)$, 只要一切积分 $\int_0^l f_n(x)g(x)dx$ 都存在就行. 此时, 级数 $\sum c_n f_n(x)$ 可以叫作函数 $g(x)$ 关于函数系 F 的傅里叶级数. 不过, 我们只对于函数 $g(x)$ 属于我们前面引入的内积的定义域的情形进行完整的讨论. 这时, 对于函数 g, 存在其标量平方 $(g,g)=\kappa\int_0^l g^2(x)dx$. 恰是这个条件, 将成为关于规范正交函数系 F 的傅里叶级数的一般概念的定义的基础.

定义 11　设函数 g 满足条件

$$(g,g)=\kappa\int_0^l g^2(x)dx<+\infty.$$

那么函数级数 $\sum c_n f_n(x)$, 其中 $c_n=(g,f_n),\{f_n\}=F$, 叫作关于规范正交系 F 的 "标准的" 傅里叶级数. 当标量平方 (g,g) 发散而全部系数 $c_n=(g,f_n)$ 存在时, 级数 $\sum c_n f_n(x)$ 叫作是关于函数系 F 的 "非标准的" 傅里叶级数.

函数系

$$F_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\}$$

是在区间 $[0,2\pi]$ 上关于权系数 $\kappa=1$ 的内积的规范正交系的重要的例子. 若令 $\kappa=1/\pi$, 则

$$F_2=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos x,\sin x,\cdots\cos nx,\sin nx,\cdots\right\}$$

是规范正交系. 此时傅里叶级数可写成

$$\sum c_n f_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

实质上, 我们得到了早先定义的三角傅里叶级数. 容易确认, 前面考察过的三角级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{\pi n}$ 是函数 $\rho_0(x)$ 关于区间 $[0,1]$ 上, 权系数 $\kappa=1$ 的规范正交函数系

$$F_3=\left\{1,\sqrt{2}\cos 2\pi x,\sqrt{2}\sin 2\pi x,\cdots,\sqrt{2}\cos 2\pi nx,\sqrt{2}\sin 2\pi nx,\cdots\right\}$$

的傅里叶级数.

类似地, 在区间 $[0,l]$ 上对于 $\kappa=1$,

$$F_4=\left\{\frac{1}{\sqrt{l}},\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{2\pi}{l}x,\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi}{l}x,\cdots,\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{2\pi}{l}nx,\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi}{l}nx,\cdots\right\}$$

是规范正交函数系. 关于函数系 F_4 的傅里叶级数叫作关于区间 $[0,l]$ 的三角傅里叶级数.

对于函数 $g(x)$ 的傅里叶系数 c_n 成立下述定理.

定理 5 (贝塞尔不等式) 对于任意的规范正交系 $F=\{f_n\}$ 和任意的满足条件 $(g,g)<+\infty$ 的函数 $g(x)$, 以及任意的 $m\in\mathbb{N}$ 成立不等式

$$\sum_{k=1}^{m} c_k^2 \leqslant (g,g), \text{其中} c_k=(g,f_k), k=1,\cdots,m.$$

► 考虑函数

$$g_m=g_m(x)=\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(x).$$

令 $h=h_m(x)=g(x)-g_m(x)$. 那么

$$(g_m,f_n)=\sum_{k=1}^{m} c_k(f_k,f_n)=\begin{cases} c_n & \text{当} n\leqslant m, \\ 0 & \text{当} n>m; \end{cases}$$

$$(h_m,f_n)=c_n-(g_m,f_n)=\begin{cases} c_n & \text{当} n>m, \\ 0 & \text{当} n\leqslant m. \end{cases}$$

由此得到

$$(g_m,g_m)=\left(\sum_{k=1}^{m} c_k f_k, \sum_{k=1}^{m} c_k f_k\right)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} c_k c_n (f_k,f_n)=\sum_{k=1}^{m} c_k^2.$$

因此,

$$(g_m,h)=(h,g_m)=\sum_{k=1}^{m} c_k(h,f_k)=0.$$

所以

$$\begin{aligned}(g,g)&=(g_m+h,g_m+h)=(g_m,g_m)+2(g_m,h)+(h,h)\\ &=(g_m,g_m)+(h,h)\geqslant(g_m,g_m)=\sum_{k=1}^{m} c_k^2.\end{aligned}$$ ◄

我们发现, 顺便证明了等式

$$(g,g)=\sum_{k=1}^{m} c_k^2+(h,h).$$

定义 12 定理 5 证明中的函数 $g_m(x)$ 叫作函数 g 关于规范正交系 F 的第 m 傅里叶多项式.

从定理 5 直接推出两个结论, 我们把它们合起来叙述为一个定理.

定理 6 在定理 5 的条件下:

a) 成立不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|g\|^2=(g,g);$$

b) 当 $n\to\infty$ 时 $c_n=c_n(g)\to 0$.

定义 13 1. 线性空间 V 中的规范正交系 $F=\{f_n\}$ 叫作是封闭的, 如果对于一切 $g\in V$ 都成立

$$\|g\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2.$$

此等式叫作帕塞瓦尔等式.

2. 线性空间 V 中的规范正交系 $F=\{f_n\}$ 叫作是完全的, 如果对于任何 $g\in V$, 只要对于一切 $k\in\mathbb{N}, (g,f_k)=0$, 就必成立 $(g,g)=0$.

命题 1 任何封闭的规范正交函数系都是完全的.

► 如果对于一切 $k\in\mathbb{N}$ 有 $c_k=c_k(g)=0$, 那么由封闭性

$$(g,g)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=0. \quad ◄$$

定理 7 (傅里叶系数的极值性质) 对于任何实数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 都成立不等式

$$\|g-\sum_{k=1}^{m}c_kf_k\|\leqslant\|g-\sum_{k=1}^{m}\alpha_kf_k\|,$$

其中 $c_1,\cdots,c_m$ 是函数 g 关于函数系 $F=\{f_k\}$ 的傅里叶系数.

► 再次使用对于一切 $k\leqslant m$ 成立的等式 $(h_m,f_k)=(g-g_m,f_k)=0$. 得到

$$\begin{aligned}\|g-\sum_{k=1}^{m}\alpha_kf_k\|^2&=\|g-g_m+\sum_{k=1}^{m}(c_k-\alpha_k)f_k\|^2\\&=\|g-g_m\|^2+\|\sum_{k=1}^{m}(c_k-\alpha_k)f_k\|^2\\&\geqslant\|g-g_m\|^2=\|g-\sum_{k=1}^{m}c_kf_k\|^2.\end{aligned} \quad ◄$$

第二十五讲

§3. 三角函数系的封闭性

我们的目的是证明关于正交三角函数系

$$F_0=\{f_k(x)\}=\left\{\frac{1}{2},\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\right\}$$

的帕塞瓦尔等式.

定理 8 (李雅普诺夫定理) 三角系 F_0 在空间 $W_{2\pi}$ 中是封闭的. 换言之, 对于任意的严格正则的 2π 周期函数 $g(x)$ 成立帕塞瓦尔等式

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2),$$

其中系数 a_k 和 b_k 由 $g(x)$ 按欧拉–傅里叶公式定义.

在证明这个定理之前, 先指出, 若把 F_0 中的函数 $f_1(x) = 1/2$ 换为 $h_1(x) = 1/\sqrt{2}$, 就把 F_0 变成了 F_2. F_2 是权系数 $\kappa = 1/\pi$ 的规范正交系. 确切地说, 我们得到函数系 $F_2 = \{h_k(x)\}$, 其中若 $k=1$ 则 $h_1(x) = 1/\sqrt{2}$, 若 $k = 2n$ 则 $h_k(x) = h_{2n}(x) = \cos nx$, 而若 $k = 2n+1$, 则 $h_k(x) = h_{2n+1}(x) = \sin nx$. 函数 $g(x)$ 关于 F_2 的傅里叶系数 c_k 与 a_k, b_k 以下面的等式相联系:

$$a_0 = c_1\sqrt{2}, a_k = c_2k, b_k = c_{2k+1}, k = 1, 2, \cdots,$$

此时帕塞瓦尔等式可写成

$$(g,g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_k^2,$$

它与前面给出的规范正交系的封闭性的定义相吻合.

定理 8 的证明倚仗下述两个引理.

引理 5 对于每个周期 2π 的严格正则函数 $g(x)$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 都找得到三角多项式 $P_m(x)$ 满足条件

$$\|g(x) - P_m(x)\| < \varepsilon.$$

用希尔伯特空间的术语来说, 这表明三角多项式的全体依希尔伯特空间 L_2 的范数在线性空间 $W = W_{2\pi}$ 中是稠密的.

► 考虑函数 $g_1(x) = g(2\pi x)$. 它们是严格正则的, 而周期为 1. 此函数的间断点 $x_1, \cdots, x_n$ 把闭区间 $[0,1]$ 划分为开区间 $I_1, \cdots, I_n$. 在这些区间中的每个区间上 $g_1(x)$ 是连续的并且在左端点有右极限, 而在右端点处有左极限. 因此在每个开区间 I_k 上, 函数 $g_1(x)$ 是一致连续的. 这表明, 对于任给的 $\varepsilon_1 > 0$, 开区间 I_k 可被分成有限个两两不重叠的小区间使得函数 $g_1(x)$ 在每个这样的小区间上的振幅都不超过 ε_1. 作函数 $g_2(x)$, 使它在每个这样的小区间上取常数值等于 $g_1(x)$ 在此小区间的中点上的值. 并让 $g_2(x)$ 在这些小区间的交点 (公共端点) 处取其左右极限之半和 (即和之半). 那么 $g_2(x)$ 是一个逐段取常值的严格正则函数, 而且对于一切 x 成立

$$|g_1(x) - g_2(x)| \leqslant \varepsilon_1.$$

由此得到

$$\|g_1 - g_2\| = \sqrt{\int_0^1 (g_1(x) - g_2(x))^2 dx} \leqslant \sqrt{\int_0^1 \varepsilon_1^2 dx} = \epsilon_1.$$

现设 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < 1$ 是函数 $g_2(x)$ 在区间 $[0,1)$ 上的全部可能的间断点. 对于 $n = 1, \cdots, k$ 定义函数 $\varphi_n(x)$ 使它以 1 为周期, 且在闭区间 $[0,1]$ 上定义

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{当} t_{n-1} < x < t_n, \\ 1/2, & \text{当} x = t_{n-1}, x = t_n, \\ 0, & \text{在其他情形}. \end{cases}$$

那么, 显然对于某些常数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 有等式

$$g_2(x) = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \varphi_n(x),$$

然而前面曾证明

$$\varphi_n(x) = t_n - t_{n-1} + \rho_0(x - t_{n-1}) - \rho_0(x - t_n).$$

所以, 对于某些 $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_k$, 有

$$g_2(x) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{k} \beta_n \rho_0(x - t_n),$$

此外, 前面曾证明

$$|\rho_0(x - t_n) - s_m(x - t_n)| \leqslant R_m(x - t_n),$$

其中 $m \geqslant 4$ 且

$$s_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin 2\pi kx}{\pi k}, \quad R_m(x) = \frac{4}{\sqrt{1 + m^2 \sin^2 \pi x}}.$$

因此, 成立估计式

$$|g_2(x) - Q_m(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{k} |\beta_n| R_m(x - t_n),$$

其中 $Q_m(x) = \beta_0 + \sum\limits_{n=1}^{k} \sin(x - t_n)$. 使用柯西不等式, 由此得到

$$|g_2(x) - Q_m(x)|^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{k} |\beta_n| R_m(x - t_n) \right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} R_m^2(x - t_n).$$

沿闭区间 $[0,1]$ 积分此不等式, 根据函数 $R_m(x)$ 的周期性, 得

$$\begin{aligned} \|g_2 - Q_m\|^2 &= \int_0^1 (g_2(x) - Q_m(x))^2 dx \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \cdot \sum_{n=1}^{k} \int_0^1 R_m^2(x - t_n) dx = 8k \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \int_0^1 \frac{dx}{1 + m^2 \sin^2 \pi x} \\ &\leqslant 8k \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \cdot \frac{1}{m} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{m dx}{1 + m^2 x^2} \leqslant \frac{8k}{m} \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} \leqslant \frac{A}{m}, \end{aligned}$$

其中 A 是某个与 m 无关的常数.

还有, 使用三角形不等式得

$$\left(\int_0^1 (g_1(x)-Q_m(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|g_1-Q_m\| = \delta_m$$
$$\leqslant \|g_1-g_2\|+\|g_2-Q_m\| \leqslant \varepsilon_1+\left(\frac{A}{m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是, 进行积分的变量变换 $x=\dfrac{t}{2\pi}$ 并令 $P_m(t)=Q_m\left(\dfrac{t}{2\pi}\right)$, 得

$$\delta_m^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(g_1\left(\frac{t}{2\pi}\right)-Q_m\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right)^2dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(g(t)-P_m(t))^2dt\right) = \frac{1}{2}\|g-P_m\|^2.$$

结果

$$\|g-P_m\| \leqslant \sqrt{2}\left(\varepsilon_1+\left(\frac{A}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

显然, 函数 $P_m(t)$ 是 m 阶三角多项式. 此外, 当 $\varepsilon_1=\varepsilon/4$ 且 $m>\delta A/\varepsilon^2$ 时, 成立不等式

$$\sqrt{2}\left(\varepsilon_1+\left(\frac{A}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant \varepsilon,$$

由此终于得到 $\|g-P_m\|\leqslant\varepsilon$. ◀

引理 6 *在定理 8 的条件下, 对于函数 $g(x)$ 的第 m 傅里叶多项式 $g_m(x)$ 成立关系式*

$$\lim_{m\to\infty}\|g-g_m\|=0.$$

▶ 根据傅里叶系数的极值性质, 对于任意的 n 阶三角多项式 $P_n(x)$ 成立不等式

$$\|g-g_n\|\leqslant\|g-P_n\|.$$

根据同一性质, 对于一切自然数 k

$$\|g-g_{k+1}\|\leqslant\|g-g_k\|,$$

因为对于 $n=k+1$, 傅里叶多项式 $g_k(x)$ 可以看作是三角多项式 $P_n(x)$.

现在对于任意的 $\varepsilon>0$, 考察引理 5 中的多项式 $P_m(x)$, 那么, 令 $n_0(\varepsilon)=m$, 对于一切 $n>m$ 得不等式

$$\|g-g_n\|\leqslant\|g-g_{n-1}\|\leqslant\|g-g_m\|\leqslant\|g-P_m\|<\varepsilon.$$

这表明

$$\lim_{n\to\infty}\|g-g_n\|=0. \quad ◀$$

现在来证定理 8. 如前所说, 只需证

$$(g,g)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2,$$

其中 $c_k=(g,f_k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(x)f_k(x)dx$, $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$,而当$k\geqslant 1$时$f_{2k}(x)=\cos kx$, $f_{2k+1}(x)=\sin kx$.

此外, 在证引理 5 时还得到: 对于一切 $n\in\boldsymbol{N}$ 成立等式

$$\|g\|^2-\|g_n\|^2=\|g-g_n\|^2.$$

根据引理 6, 当 $n\to\infty$ 时 $\|g-g_n\|\to 0$. 所以

$$\|g\|^2=\lim_{n\to\infty}\|g_n\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2.$$

定理 8 证毕.

最后指出, 为使在具有内积的线性空间 V 中任何完全的规范正交函数系都是封闭的, 必要且充分的条件是空间 V 关于由内积定义的范数是完备的 (即基本列总收敛 —— 译注). 换言之, V 应该是希尔伯特空间. 此结论之证明并不很复杂, 但已超出了本课程的范围.

§4. 三角傅里叶级数的最简单的性质

已经说过, 并非任何三角级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

都是某个函数的傅里叶级数. 甚至在级数于一切实数值 x 处都收敛的情况下也是如此. 作为例子可以举出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln ne}.$$

根据狄利克雷判别法, 它在实轴的一切点处都收敛. 但可证明它不是任何函数的傅里叶级数.

另一方面, 黎斯-费舍定理断言, 如果数值级数

$$S=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

收敛, 那么存在函数 $g(x)$, 其傅里叶系数恰是诸 a_n 和 b_n. 此外, 根据卡里森 (Carleson) 定理, 此级数的和 "几乎处处" 等于 $g(x)$. 我们来证明下述命题.

定理 9 若严格正则函数 $f \in W_{2\pi}$ 和 $g \in W_{2\pi}$ 具有全部相同的傅里叶系数 $c_n(f) = c_n(g)$, 则对于一切实数 $x, f(x) = g(x)$.

▶ 此两函数的差 $h(x) = f(x) - g(x) \in W_{2\pi}$, 其傅里叶系数全为零, $c_k(h) = c_k(f) - c_k(g) = 0$. 因此, 根据帕塞瓦尔等式, 成立等式

$$(h, h) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(h) = 0.$$

而由此推出 $h(x) = 0$ 或 $f(x) = g(x)$ 对于一切 x 成立. ◀

定理 10 若三角级数

$$\sum c_k f_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

在闭区间 $I = [0, 2\pi]$ 上一致收敛, 则其和 $g(x)$ 是 I 上的连续函数, 且所给的级数是 $g(x)$ 的傅里叶级数, 而且级数可逐项积分.

▶ 一切函数 $\sin nx$ 和 $\cos nx$ 皆在 I 上连续, 于是根据级数 $\sum c_k f_k(x)$ 的一致收敛性, 其和 $g(x)$ 是连续函数. 由此推出等式

$$f_k(x)g(x) = f_k(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

可沿闭区间 I 积分, 这时, 根据级数在 I 上的一致收敛性, 等式右端可以逐项积分, 结果得到等式

$$c_k(g) = (f_k, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (f_k, f_n) = c_k,$$

因为当 $n \neq k$ 时 $(f_k, f_n) = 0$, 而 $(f_k, f_k) = 1$.

于是断定诸数 c_k 恰全是函数 $g(x)$ 的傅里叶系数. ◀

定理 11 严格光滑的 2π 周期函数 $g(x)$ 的三角傅里叶级数 $\sum c_n f_n(x)$ 在闭区间 $I = [0, 2\pi]$ 上一致收敛到它自己.

▶ 我们来证明三角级数

$$\sum c_k f_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

在 I 上一致收敛. 为此只需证明数值级数 $\sum(|a_k| + |b_k|)$ 收敛, 此级数是级数 $\sum c_k f_k(x)$ 的优控.

首先指出, 函数 $g'(x) \in W_{2\pi}$, 故 $(g', g') < +\infty$. 于是对于函数 g' 成立帕塞瓦尔等式

$$(g', g') = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2),$$

其中

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g'(x)\cos kx dx,$$
$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g'(x)\sin kx dx.$$

接下来, 由于 $g'(x)$ 是严格正则函数, 所以对于一切 $k \in \mathbb{N}$ 在上面这些积分中都可以分部积分, 于是得

$$\alpha_k = -\frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin kx dx = -kb_k,$$
$$\beta_k = \frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos kx dx = ka_k.$$

那么

$$|a_k| = \frac{1}{k}|\beta_k| \leqslant \beta_k^2 + \frac{1}{k^2}, |b_k| = \frac{1}{k}|\alpha_k| \leqslant \alpha_k^2 + \frac{1}{k^2}.$$

由此推出

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$
$$\leqslant (g', g') + 3 < +\infty.$$

于是我们证明了级数 $\sum c_k f_k(x)$ 在 I 上一致收敛到某函数 $\varphi(x)$. 但根据定理 9 和定理 10, 函数 $\varphi(x)$ 应该是连续的并且与 $g(x)$ 相同. ◀

定理 12 若 2π 周期函数 $g(x)$ n 次可微, $n \geqslant 1$, 且其 n 阶导函数是严格逐段光滑函数, 那么

1) 级数 $\sum k^n(|a_k| + |b_k|)$ 收敛;

2) 函数 $g(x)$ 的傅里叶级数可以逐项求导 n 次. 这里数 a_k, b_k 是函数 $g(x)$ 的欧拉–傅里叶系数.

► 基于定理 11 我们断定, 函数 $\varphi_n(x) = g^{(n)}(x)$ 等于自己的傅里叶级数的和, 此级数在闭区间 $I = [0, 2\pi]$ 上一致收敛. 此外, 若 α_k 和 β_k 是它的欧拉–傅里叶系数, 则级数 $\sum(|\alpha_k| + |\beta_k|)$ 收敛. 由此, 像在证明定理 11 时那样, 经逐次分部积分, 过渡到等式

$$|\alpha_k| = k^n|a_k|, \quad |\beta_k| = k^n|b_k|, \quad \text{若 } n \text{ 是偶数},$$
$$|\alpha_k| = k^n|b_k|, \quad |\beta_k| = k^n|a_k|, \quad \text{若 } n \text{ 是奇数}.$$

于是结论 1 获得证实.

结论 2 的真确性现从关于函数级数逐项求导的一般定理推出, 因为那时每个数值级数 $\sum k^m(|a_k|+|b_k|)$ 对于 $m=1,\cdots,n-1$ 都收敛, 从而都是三角傅里叶级数的顺次逐项求导所得级数的优控. ◀

我们看到, 与定理 11 和定理 12 一道, 顺便证明了下述定理.

定理 13 1. 若数值级数 $\sum(|a_n|+|b_n|)$ 收敛, 则三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 一致收敛到一个连续函数 $g(x)$ 并且是 $g(x)$ 的傅里叶级数.

2. 若同时级数 $\sum n^k(|a_n|+|b_n|)$ 收敛, $k\geqslant 1$, 则函数 $g(x)$ 的傅里叶级数可逐项求导 k 次.

第二十六讲

§5. 傅里叶级数部分和的积分表示黎曼局部化原理

三角傅里叶级数理论的重要问题之一是寻求保证所给级数在一个固定点收敛到产生此级数的函数的值的条件. 这里情况非常复杂. 其实, 在给定点处连续的函数的傅里叶级数可以在此点处发散. 同时, 函数 $\rho_0(x)$ 的例子表明, 函数的间断, 一般说来并不妨碍其傅里叶级数在实轴的每点处都收敛到此函数自己. 下面我们考虑三角傅里叶级数的一个最简单的点态收敛判别法. 为此需要引入其部分和的积分表达式.

引用下面的记号, 写

$$g(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx,$$

如果一切 a_k,b_k 皆由 $g(x)$ 按欧拉–傅里叶公式给出. 换句话说, 式子右边的三角级数是函数 $g(x)$ 的傅里叶级数. 若此级数在点 x_0 收敛到值 $g(x_0)$, 则可写出等式

$$g(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0.$$

我们借助欧拉公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

来对函数 $g(x)$ 的傅里叶级数进行变换, 其中 i 是虚单位, $i^2=-1$. 为简单起见, 可以将此公式看作函数 e^x 对于虚自变量值的定义. 那么容易证明在这种情况下, 指

数的基本函数性质保持到了整个复平面上, 即若 $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$, 而我们认为 $e^z = e^{a+ib} = ae^a \cdot e^{ib}$, 则

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

其中 z_1 和 z_2 是复数. 还有, 由于

$$\cos kx = \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right), \sin kx = \frac{1}{2i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right),$$

所以成立等式

$$\sum_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{ikx},$$

其中

$$d_0 = \frac{a_0}{2}, d_k = \frac{1}{2}\left(a_{|k|} - i\frac{k}{|k|}b_{|k|}\right) = \frac{1}{2}\left(a_{|k|} - ib_{|k|}\mathrm{sign}k\right), k \neq 0.$$

我们发现, 当 k 为整数时对于量 d_k 成立关系式

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)(\cos kx - i\sin kx)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos kxdx - \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin kxdx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{|k|} - ib_{|k|}\mathrm{sign}k\right). \end{aligned}$$

现在对于复值 2π 周期函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 按下面公式引入内积 (标量积)

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

与通常一样, 函数符号上面的横线表示复共轭运算. 那么有 $(f, g) = \overline{(g, f)}, e^{ix} = \overline{e^{-ix}}$. 由此推出, $d_k = \left(g(x), e^{ikx}\right)$ 和 $\left(e^{ikx}, e^{ikx}\right) = 1$.

于是函数集 $\{e^{ikx}\}$, 其中 k 取遍一切整数, 关于上面引入的内积构成一个规范正交函数系. 我们还发现此处权系数 $\kappa = 1/(2\pi)$.

我们利用傅里叶级数的写法的这种复形式来引入对于函数的傅里叶级数的部分和的便于应用的公式. 那么

$$\begin{aligned} \sum_n &= \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}dt = \int_0^{2\pi} g(t)D_n(x-t)dt, \end{aligned}$$

其中函数 $D_n(y)$ 由下面的等式定义:

$$D_n(y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{iky}.$$

定义 14 函数 $D_n(y)$ 叫作 n 阶狄利克雷核.

我们来建立前面引入的函数 $T_n(y)$ 和狄利克雷核 $D_n(y)$ 之间的联系. 有

$$T_n(y)=\frac{\sin\pi(2n+1)y}{\sin\pi y}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2\pi ky$$
$$=\sum_{k=-n}^{n}\cos 2\pi ky=\sum_{k=-n}^{n}(\cos 2\pi ky+i\sin 2\pi ky)$$
$$=\sum_{k=-n}^{n}e^{2\pi iky}=2\pi D_n(2\pi y).$$

令 $y=x/2\pi$, 由此得等式

$$D_n(x)=\frac{1}{2\pi}T_n\left(\frac{x}{2\pi}\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

函数 $D_n(x)$ 的性质.

1° $\int_0^{2\pi}D_n(x)dx=1.$

2° $D_n(x)=D_n(-x).$

3° $D_n(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\pi}\left(\cot\frac{x}{2}\sin nx+\cos nx\right).$

由于函数 $g(x)$ 和 $D_n(x)$ 皆以 2π 为周期, 且 $D_n(x)$ 是偶的, 借变量变换 $t=x+y$, 部分和 $\sum_n$ 就变成下面的表达式:

$$\sum_n=\sum_n(g(x))=\int_0^{2\pi}g(t)D_n(x-t)dt=\int_0^{2\pi}g(t)D_n(t-x)dt$$
$$=\int_x^{x+2\pi}g(x+y)D_n(y)dy=\int_{-\pi}^{\pi}g(t+y)D_n(y)dy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x+y)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}dy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x+y)\cot\frac{y}{2}\sin nydy+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x+y)\cos nydy.$$

定义 15 把这串等式都叫作傅里叶级数的部分和 $\sum_n$ 的积分表示.

下述命题成立.

引理 7 (黎曼引理) 设 $g(x)\in W_{2\pi}$, 且对于某 $\delta>0$, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时 $g(x)=0$. 那么函数 $g(x)$ 的傅里叶级数在点 x_0 处收敛到零.

► 设函数 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$ 由等式 $2f_1(y) = g(x_0+y)\cot\frac{y}{2}$ 和 $f_2(y) = \frac{1}{2}g(x_0+y)$ 定义. 那么 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$ 都属于 $W_{2\pi}$. 这是因为函数 $\cot\frac{y}{2}$ 在任何形如 $y = 2k\pi$(k 为整数) 的点的 δ 邻域之外连续, 而函数 $g(x_0+y)$ 在此邻域内为零. 因此

$$\begin{aligned}\sum_n &= \sum_n (g(x_0))^{①} = \int_{-\pi}^{\pi} g(x_0+y)D_n(y)dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}g(x_0+y)\cot\frac{y}{2}\sin ny dy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}g_0(x+y)\cos ny dy \\ &= b_n(f_1) + a_n(f_2),\end{aligned}$$

其中 $b_n(f_1)$ 和 $a_n(f_2)$ 分别是函数 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$ 的欧拉–傅里叶系数. 由于对于这两个函数成立帕塞瓦尔等式, 所以当 $n\to\infty$ 时 $b_n(f_1)\to 0, a_n(f_2)\to 0$, 由此推出 $\sum_n \to 0$. ◄

从黎曼引理推出下述结论.

定理 14 (黎曼局部化原理) *函数 $g(x)\in W_{2\pi}$ 的傅里叶级数在点 $x = x_0$ 处的性状完全决定于函数 $g(x)$ 在此点的任意选择的 δ 邻域中的取值.*

► 实质上要证的是, 若函数 $g(x)$ 在点 x_0 的任一固定的 δ 邻域外随意改变其值, 傅里叶级数在此点的收敛性及其和都不受影响. 换言之, 若函数 $g\in W_{2\pi}$ 的傅里叶级数的部分和在点 x_0 处的值 $\sum_n(g)(x_0)$ 收敛到数 α, 而函数 $h\in W_{2\pi}$ 与 g 在点 x_0 的某 δ 邻域中重合, 则当 $n\to\infty$ 亦有 $\sum_n(h)(x_0)\to\alpha$.

考虑差 $r(x) = g(x) - h(x)\in W_{2\pi}$. 函数 $r(x)$ 在点 x_0 处满足黎曼引理的条件, 因为对于一切 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 有 $r(x) = 0$. 所以当 $n\to\infty$ 时

$$\sum_n (r)(x_0) = \sum_n (g)(x_0) - \sum_n (h)(x_0) \to 0.$$

而由于当 $n\to\infty$ 时 $\sum_n(g)(x_0)\to\alpha$, 所以当 $n\to\infty$ 时 $\sum_n(h)(x_0)\to\alpha$. ◄

函数 g 属于类 $W_{2\pi}$ 的要求可以大大减弱. 实际上, 分析黎曼引理的证明和定理 14 的证明就能看到, 为使它们成立, 本质上只要差 $r(x) = g(x) - h(x)$, 以及函数 $\varphi(x) = r(x)\cot\frac{x}{2}$ 的欧拉–傅里叶系数随着号码增至无穷而趋于零就够了. 为此, 一般说来只要这些函数的绝对值在 $[0, 2\pi]$ 上的黎曼第二类反常积分收敛就够了. 最后一断言的证明与已考虑过的情形并无大区别.

在引理 7 中使用的方法可用来再证明一个引理, 此引理在引入傅里叶级数点态收敛的判别法时用得着.

①这种写法似不是很妥当 —— 译者注.

引理 8 设 $f(x) \in W_{2\pi}$. 置

$$\alpha_n = \int_a^b f(y)\cos ny dy, \beta_n = \int_a^b f(y)\cot\frac{y}{2}\sin ny dy,$$

$$\gamma_n = \int_a^b f(y)D_n(y)dy.$$

那么, 如果 $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2\pi$, 则当 $n \to \infty$ 时 $\alpha_n \to 0$. 而若成立更严格的条件 $0 < a \leqslant b < 2\pi$, 则当 $n \to \infty$ 时 $\beta_n \to 0$ 且 $\gamma_n \to 0$.

► 可把 α_n 看作函数 $g(x) \in W_{2\pi}$ 的傅里叶系数, $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上与 $f(x)$ 重合而在闭区间 $[0,2\pi]$ 的不属于 $[a,b]$ 的点处等于零, 即对于集合 $E = [0,2\pi]\backslash[a,b]$ 的点 $x, g(x) = 0$. 由此根据傅里叶系数的性质, 当 $n \to \infty$ 时有 $\alpha_n \to 0$. 类似地, 可把 β_n 看作是另一函数 $h(x) \in W_{2\pi}$ 的傅里叶系数, $h(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上与函数 $f(y)\cot\frac{y}{2}$ 重合, 而对于 E 的点取值零. 因此当 $n \to \infty$ 时 $\beta_n \to 0$. 而由于 $\gamma_n = (\alpha_n + \beta_n)/2\pi$, 所以当 $n \to \infty$ 时亦有 $\gamma_n \to 0$. ◄

§6. 傅里叶级数的点态收敛判别法

还是考虑类 $W_{2\pi}$ 中的函数 $g(x)$. 使用傅里叶级数的部分和的积分表示, 我们来求函数 $g(x)$ 在点 x_0 处的值 $g(x_0)$ 与其傅里叶级数的部分和在此点的值 $\sum_n$ 的差 r_n 的表达式. 那么有

$$\begin{aligned} r_n = \sum_n - g(x_0) &= \int_{-\pi}^{\pi}(g(x_0+y) - g(x_0))D_n(y)dy \\ &= 2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(g(x_0+y) + g(x_0-y) - 2g(x_0))D_n(y)dy \\ &= 2\int_0^{\pi}\varphi(y)D_n(y)dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(y)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(y)\left(\cot\frac{y}{2}\sin ny + \cos ny\right)dy, \end{aligned}$$

其中

$$\varphi(y) = \frac{1}{2}(g(x_0+y) + g(x_0-y) - 2g(x_0)).$$

这里, 作为 y 的函数, $\varphi(y) \in W_{2\pi}, \varphi(0) = 0$ 且函数 $\varphi(y)$ 在点 $y = 0$ 处连续.

定理 15 (迪尼判别法) 设对于某 $\delta > 0$, 存在下述第二类反常积分:

$$B_\delta = \int_0^\delta \frac{|\varphi(y)|}{y}dy.$$

那么函数 g 的傅里叶级数 $\sum$ 在点 $x=x_0$ 处收敛到值 $g(x_0)$.

► 可以认为 $0<\delta<\pi$. 由于积分

$$B_\delta=\int_0^\delta \frac{|\varphi(y)|}{y}dy$$

收敛, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 找得到数 $h=h(\varepsilon)>0$ 使得

$$B_h=\int_0^h \frac{|\varphi(y)|}{y}dy<\varepsilon.$$

往下, 从对于差 $r_n=\sum_n -g(x_0)$ 的积分表示中得等式 $r_n=r_{n1}+r_{n2}+r_{n3}$, 其中

$$\begin{aligned}
r_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(y)(\cot\frac{y}{2}\sin ny+\cos ny)dy,\\
r_{n1}&=\frac{1}{\pi}\int_0^h \varphi(y)\cot\frac{y}{2}\sin nydy,\\
r_{n2}&=\frac{1}{\pi}\int_h^\pi \varphi(y)\cot\frac{y}{2}\sin nydy,\\
r_{n3}&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(y)\cos nydy.
\end{aligned}$$

根据引理 8, 当 $n\to\infty$ 时有 $r_{n2}\to 0$ 和 $r_{n3}\to 0$. 那么对于一切足够大的 n 有 $|r_{n2}|<\varepsilon$ 和 $|r_{n3}|<\varepsilon$. 至于 r_{n1}, 我们注意到若 $0<y<h<\pi$ 则因 $\sin\frac{y}{2}\geqslant\frac{y}{\pi}$, 故

$$|\varphi(y)|\frac{\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\leqslant\frac{\pi|\varphi(y)|}{y}.$$

由此推出

$$|r_{n1}|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^h \varphi(y)\cot\frac{y}{2}\sin nydy\right|\leqslant\int_0^h \frac{|\varphi(y)|}{y}dy<\varepsilon.$$

因此, 对于一切 $n>n_0(\varepsilon)$ 有估计式 $|r_n|<3\varepsilon$. 根据数 $\varepsilon>0$ 的选取的任意性, 这表明当 $n\to\infty$ 时 $r_n\to 0$, 即在点 x_0 处傅里叶级数 $\sum$ 收敛到值 $g(x_0)$. ◄

定义 16 说函数 $g(x)$ 在点 x_0 处满足 α 阶李普希兹条件, $0<\alpha\leqslant 1$, 如果在点 x_0 的某 δ 邻域中成立条件

$$|g(x)-g(x_0)|\leqslant L|x-x_0|^\alpha,$$

其中 $L>0$ 是某个常数.

当此条件在闭区间 $[x_0,x_1]$ 的一切点处都成立时, 就说函数 $g(x)$ 属于 "李普希兹 α 类". 数 L 叫作**李普希兹常数**. 当 $\alpha=1$ 时简单地说 $g(x)$ 满足李普希兹条件.

定理 16 若函数 $g(x)$ 在点 x_0 处满足 α 阶李普希兹条件, 则它的傅里叶级数在此点收敛到 $g(x_0)$.

► 我们来证明在所述情况下, 对函数 $g(x)$ 可使用迪尼判别法. 实际上, 当 $|y| < \delta$ 时有

$$|\varphi(y)| \leqslant \frac{1}{2}(|g(x_0+y)-g(x_0)|+|g(x_0-y)-g(x_0)|) \leqslant L|y|^\alpha.$$

由此得到

$$B_\delta = \int_0^\delta \frac{|\varphi(y)|}{y}dy \leqslant L\int_0^\delta y^{\alpha-1}dy = \frac{L}{\alpha}\delta^\alpha < +\infty.$$

这表明迪尼判别法的条件成立, 从而函数 $g(x)$ 的傅里叶级数在点 x_0 处收敛到 $g(x_0)$. ◄

我们再证明两个傅里叶级数收敛的判别法.

定理 17 (狄利克雷判别法) 若 2π 周期的严格正则的函数 $g(x)$ 是在闭区间 $[0,2\pi]$ 上逐段单调的, 则它的傅里叶级数处处收敛到 $g(x)$.

注 函数 $g(x)$ 的逐段单调性指的是, 整个闭区间 $[0,2\pi]$ 可以分成有限个小区间, 函数在每个这样的小区间内部是单调的. 特别地, 逐段单调的有界函数是有界变差函数.

定理 17 的结论是包含在下述定理中的另一个判别法的简单推论.

定理 18 (若尔当判别法) 设函数 $g(x) \in W_{2\pi}$ 且 $0 < \delta < \pi$. 还设在点 x_0 的 δ 邻域内函数 $g(x)$ 有界变差. 那么 $g(x)$ 的傅里叶级数在点 x_0 处收敛到 $g(x_0)$.

► 由于 $\varphi(y)$ 是有界变差函数, 可将其表示成 $\varphi(y) = \varphi_1(y) - \varphi_2(y)$, 其中 $\varphi_1(y)$ 和 $\varphi_2(y)$ 都是不减的非负函数. 可以认为 $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ 且函数 $\varphi_1(y)$ 和 $\varphi_2(y)$ 皆在点 $y = 0$ 处连续, 这是因为函数 $\varphi(y)$ 具有这些性质. 实际上, 单调函数在每点处都有单边极限. 于是在点 $y = 0$ 处两个函数的右极限相同. 从每个函数都减掉这个公共的极限值, 就得到两个新的函数, 它们满足上述一切条件, 只要把它们在 $y = 0$ 处的值取成零就可以了. 因此, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $h = h(\varepsilon) > 0$, 使得 $0 \leqslant \varphi_1(h) < \varepsilon$ 且 $0 \leqslant \varphi_2(h) < \varepsilon$. 可以认为 $h < \delta$.

对于函数 $g(x)$ 的傅里叶级数在点 x_0 处的余项成立表达式

$$r_n = 2\int_0^\pi \varphi(y)D_n(y)dy = r_{n1} + r_{n2},$$

其中

$$r_{n1} = 2\int_0^h \varphi(y)D_n(y)dy, r_{n2} = 2\int_h^\pi \varphi(y)D_n(y)dy.$$

不失一般性, 我们认为 $\varphi(y) = \varphi_1(y)$, 也就是说 $\varphi(y)$ 是不减的非负函数. 根据 §5 引理 8, 当 $n \to \infty$ 时 $r_{n2} \to 0$. 因此只要证明 $|r_{n1}| < c\varepsilon$ 其中 $c > 0$ 是某个常数就可以

了. 我们看到 $0 \leqslant \varphi(h) < \varepsilon$. 对积分 r_{n1} 使用第二中值定理, 得

$$r_{n1} = 2\varphi(h)\int_{\xi}^{h} D_n(y)dy = 4\pi\varphi(h)\int_{\frac{\xi}{2\pi}}^{\frac{h}{2\pi}} T_n(x)dx,$$

其中函数 $T_n(x)$ 在 §1 中定义. 接着, 由于 $0 < \delta < \pi$, 所以 $0 < \dfrac{h}{2\pi} \leqslant \dfrac{\delta}{2\pi} < \dfrac{1}{2}$. 因此, 使用 §1 的引理 2 来估计最后一个积分, 得 $|r_{n1}| \leqslant 2\varphi(h) \cdot 4 < 8\varepsilon$. ◀

注 在定理的证明中之所以使用 §1 的引理 2, 是由于数 ξ 是与 n 有关的, 可以变化, 因此不可直接使用 §5 的引理 8.

第二十七讲

§7. 傅里叶系数的性状

我们引入一些关于某些函数类的函数的傅里叶系数的性状的命题.

1. 设 $g(x) \in W$ 是偶函数. 那么从欧拉–傅里叶公式得知全部傅里叶系数 $b_n = 0$, 即函数 $g(x)$ 的傅里叶级数是余弦三角级数.

现设 $g(x) \in W$ 是奇函数, 则对于一切自然数 n 有 $a_n = 0$ 而且 $a_0 = 0$, 即函数 $g(x)$ 展开成正弦傅里叶级数.

例 在 $(0, \pi)$ 上成立

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

这是伯努利函数 $\rho_0(x)$ 展开成傅里叶级数的简单推论.

若在开区间上给定函数 $g(x) \in W$, 而且 $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = g(0)$, $\lim\limits_{x\to\pi-} g(x) = g(\pi)$, 则它可以延拓成全实轴上的 2π 周期函数, 既可以作偶延拓也可以作奇延拓 (作奇延拓时要重新定义 $g(0) = 0$ —— 译注). 在偶函数的情形, 对应于它的傅里叶级数是余弦级数, 而在奇函数的情形则是正弦傅里叶级数.

2. 设 $g(x) \in W$. 则其傅里叶系数随着号码增加到无穷而趋于零. 实际上, 从贝塞尔不等式知级数 $\sum(a_n^2 + b_n^2)$ 收敛. 故由级数收敛的必要条件得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

傅里叶系数的这条性质我们已不止一次地使用过.

注 若 a_n 和 b_n 使得级数

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

收敛, 则

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

是 L_2 中的某个函数 $f(x)$ 的傅里叶级数, L_2 代表 2π 周期的在 $(0,2\pi]$ 上平方可积的函数的全体 (F. 黎斯–费舍定理). 这时说傅里叶级数**平方平均收敛**. 精确的表达式是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}(f(x)-s_n(x))^2dx=0,$$

其中

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

是三角级数的第 n 部分和.

我们来说明, F. 黎斯–费舍定理是怎样归结为函数空间 L_2 的完备性的. 这是由于级数 $\sum(a_n^2+b_n^2)$ 收敛使得 $\{s_n(x)\}$ 为 L_2 中的基本列, 即

$$\lim_{n>m\to\infty}\int_0^{2\pi}(s_n(x)-s_m(x))^2dx=\lim_{n>m\to\infty}\pi\sum_{k=m+1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=0.$$

所以由 L_2 的完备性 (当然依 L_2 的距离),$\{s_n(x)\}$ 平方平均收敛到此空间的某函数.

3. 设函数 $f(x)$ 满足李普希兹条件

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant L|h|^{\alpha},\quad x\in\mathbb{R},h\in\mathbb{R},$$

其中 $L>0,0<\alpha\leqslant 1$. 那么成立以下的不等式

$$|a_n|\leqslant L\pi^{\alpha}n^{-\alpha},\quad |b_n|\leqslant L\pi^{\alpha}n^{-\alpha},\quad n\in\mathbb{N}.$$

由傅里叶系数的定义及所涉及的函数的周期性推出

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi-\frac{\pi}{n}}f(x+\frac{\pi}{n})\cos nxdx\\&=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x+\frac{\pi}{n})\cos nxdx.\end{aligned}$$

由此得到

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-f(x+\frac{\pi}{n}))\cos nxdx.$$

因此,

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})|dx\leqslant L\pi^{\alpha}n^{-\alpha},\quad n\in\mathbb{N}.$$

同样地得到对于 b_n 的估计.

4. 设 $f(x)$ 以 2π 为周期并在 $[0,2\pi]$ 上有界变差. 那么 $a_n = O(n^{-1}), b_n = O(n^{-1})$.

从有界变差的定义知, 在 $[0,2\pi]$ 上 $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, 其中 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是正的, 不减的函数. 使用第二中值定理于下述积分. 对于某 $\xi \in (0,2\pi)$ 有

$$\int_0^{2\pi} f_1(x)\cos nx dx = f_1(2\pi)\int_\xi^{2\pi} \cos nx dx = -f_1(2\pi)\frac{\sin n\xi}{n} = O(n^{-1}).$$

因此, $a_n = O(n^{-1}), b_n = O(n^{-1})$.

5. 以 $2l$ 为周期的函数 $g(x) \in W$ 的傅里叶级数, $l \neq \pi$. 考虑函数 $h(y) = g\left(\frac{l}{\pi}y\right)$. 那么 $h \in W_{2\pi}$. 于是

$$h(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos ky + b_k \sin ky).$$

现在用 x 表示 $y; y = x\pi/l$, 那么得到

$$g(x) = h\left(\frac{\pi}{l}x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\frac{\pi}{l}x + b_k k\frac{\pi}{l}x\right),$$

而且

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(y)\cos ky dy = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)\cos k\frac{x\pi}{l}dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)\sin k\frac{x\pi}{l}dx.$$

这就是说, 我们对于 2π 周期函数所建立的傅里叶级数的全部理论借助于变量的线性变换转移到了 $2l$ 周期函数的情形.

§8. 余切函数之展开成最简分式以及正弦函数之表示为无穷乘积

上面建立的函数展开成三角傅里叶级数的理论工具终于使得可以非常简单地引入把正弦函数表示成无穷乘积的公式. 为此我们先证明一个余切函数展开成最简分式的公式, 此公式也是相当著名的.

在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上考虑函数 $g(x) = \cos\alpha x$, 其中 α 是常数 $|\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$. 把它以 2π 为周期延拓到全实轴. 那么 $g(x)$ 是在全实轴 $\mathbb{R}$ 上连续的偶函数. 由于 $g(x)$ 是逐段光滑函数, 它的傅里叶级数一致收敛到 $g(x)$. 因此对于一切 $x \in \mathbb{R}$ 有展开式

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

其中 a_k, b_k 是欧拉–傅里叶系数.

还有, 根据函数 $g(x)$ 的偶性, 一切 b_k 全是零. 而对于系数 a_k, 当 $\alpha \neq 0$ 时有等式

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x dx = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\cos kx dx = (-1)^k\frac{2\alpha}{\alpha^2-k^2}\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}.$$

于是

$$g(x) = \cos\alpha x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2\alpha}{\alpha^2-k^2}\cos kx\right).$$

由此, 当 $x = \pi$ 时得

$$\pi\cot\alpha\pi = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-k^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{\alpha-k}, 0 < |\alpha| \leqslant \frac{1}{2}.$$

最后的公式给出了余切函数的经典的最简分式展开式. 由此容易得到正弦函数的无穷乘积表示. 为此我们指出, 右端的级数关于参数 α 当 $0 < |\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$ 时一致收敛, 因为有优控 $\sum 2/k^2$. 进而它是自己的原函数的导函数.

另一方面, 我们有

$$\left(\ln\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}\right)' = \pi\cot\pi\alpha - \frac{1}{\alpha}.$$

$$\left(\ln\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right)\right)' = \frac{2\alpha}{\alpha^2-k^2} = \frac{1}{\alpha-k} + \frac{1}{\alpha+k}.$$

因此, 根据函数 $\ln x$ 的连续性, 对于某 $c \in \mathbb{R}$ 成立等式

$$\begin{aligned}\ln\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha} &= c + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right)\\ &= c + \lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right)\\ &= c + \ln\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right).\end{aligned}$$

这表明, 对于一切满足条件 $0 < |\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$ 的 α 成立公式

$$\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha} = c_1\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right),$$

其中 $c_1 = e^c$.

上式右端的无穷乘积关于 α 当 $|\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$ 时一致收敛. 因此, 令 $\alpha = 0$ 过渡到极限得

$$\pi = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha} = c_1 \lim_{\alpha\to 0} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right) = c_1.$$

终于得到

$$\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right).$$

于是, 正弦函数之表示为无穷乘积的公式得到证明.

§9. 开普勒问题和贝塞尔级数

假设行星 M 沿椭圆运动, 不动的星体 F 位于此椭圆的一个焦点处. 椭圆的半轴分别等于 a 和 b, $a > b$. 设 T 是行星 M 绕 F 运动一周的时间, 而 t 是行星离开长半轴上的 A 点后所经历的时间. 用 S_{AFM} 表示椭圆扇形 AFM 的面积. 根据开普勒定律有

$$\frac{S_{AFM}}{\pi ab} = \frac{t}{T}, \quad \text{即} S_{AFM} = \pi ab \frac{t}{T}.$$

考虑以椭圆的中心 O 为中心, 以 $OA = a$ 为半径的圆周. 用 M_1 代表点 M 沿短半轴方向到圆周上的投影. 令 $\varepsilon = \frac{OF}{OA}, u = \angle AOM_1$. 我们由几何的观点来求出椭圆扇形 AFM 的面积. 由于椭圆是从圆沿 Oy 轴压缩 $\frac{b}{a}$ 倍的仿射变换而得到的, 所以 $S_{AFM} = \frac{b}{a} S_{AFM_1}$.

接下来有 $S_{AFM_1} = S_{AOM_1} - S_{FOM_1} = a^2u/2 - a^2\varepsilon\frac{1}{2}\sin u$.① 因此, $S_{AFM} = \frac{1}{2}ab(u - \varepsilon \sin u)$. 我们过渡到开普勒方程

$$u - \varepsilon \sin u = \frac{2\pi t}{T} = \zeta = \angle AOM.$$

量 ζ 叫作行星的**平均近点角** 而 u 叫作**离心近点角**. 若 ζ 增加 2π 则 u 也增加 2π. 因此 $\cos nu, \sin nu$ 都是 ζ 的 2π 周期函数, 即

$$\cos(nu(\zeta + 2\pi)) = \cos(nu(\zeta)), \sin(nu(\zeta + 2\pi)) = \sin(nu(\zeta)).$$

先前曾证明, $u(\zeta)$ 是光滑函数. 因此, 根据李普希兹判别法, 函数 $\cos(nu(\zeta))$ 和 $\sin(nu(\zeta))$ 的傅里叶级数都收敛. 由于函数 $u(\zeta)$ 是奇函数, 所以有

$$\cos nu = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\zeta + a_2 \cos 2\zeta + \cdots,$$
$$\sin nu = b_1 \sin\zeta + b_2 \sin 2\zeta + \cdots,$$
$$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nu(\zeta) \cos \nu\zeta d\zeta, b_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nu(\zeta) \sin \nu\zeta d\zeta.$$

①原文将 "$\frac{1}{2}\sin u$" 写成了 "$\sin(u/2)$" —— 译者注.

计算这些傅里叶系数, 得

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nu d\zeta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nu \cdot (1-\varepsilon\cos u)du.$$

这里我们使用了

$$\zeta = u - \varepsilon \sin u, d\zeta = (1-\varepsilon\cos u)du.$$

于是

$$a_0 = \begin{cases} -\varepsilon, & \text{当} n=1, \\ 0, & \text{当} n>1. \end{cases}$$

对于 $\nu \geqslant 1$ 我们得到

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nu \cos \nu\zeta d\zeta \\ &= \frac{2}{\pi\nu}\cos nu \sin \nu\zeta\Big|_{\zeta=0}^{\pi} + \frac{2n}{\pi\nu}\int_0^{\pi} \sin nu \sin \nu\zeta du \\ &= \frac{n}{\pi\nu}\int_0^{\pi}(-\cos(nu+\nu\zeta)+\cos(nu-\nu\zeta))du \\ &= \frac{n}{\pi\nu}\int_0^{\pi} -\cos((n+\nu)u-\nu\varepsilon\sin u)du + \frac{n}{\pi\nu}\int_0^{\pi}\cos((n-\nu)u+\nu\varepsilon\sin u)du \\ &= \frac{n}{\nu}(J_{\nu-n}(\nu\varepsilon) - J_{\nu+n}(\nu\varepsilon)), ① \end{aligned}$$

其中

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi - k\varphi)d\varphi.$$

类似地求出系数 b_ν. 有

$$\begin{aligned} b_\nu &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nu \cdot \sin \nu\zeta d\zeta = \frac{2n}{\pi\nu}\int_0^{\pi}\cos nu \cos \nu\zeta du \\ &= \frac{n}{\nu}(J_{\nu-n}(\nu\varepsilon) + J_{\nu+n}(\nu\varepsilon)). \end{aligned}$$

因此

$$\cos u = -\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(J_{\nu-1}(\nu\varepsilon) - J_{\nu+1}(\nu\varepsilon))\frac{\cos\nu\zeta}{\nu},$$
$$\sin u = \sum_{\nu=1}^{\infty}(J_{\nu-1}(\nu\varepsilon) + J_{\nu+1}(\nu\varepsilon))\frac{\sin\nu\zeta}{\nu}.$$

角 u 的值, $0 \leqslant u < 2\pi$, 单值地由它的正弦值和余弦值确定. 因此, 这两个函数的上述展开式解决了确定二体运动的问题. 它们曾被贝塞尔 (F. Bessel, 德国人) 求

①这里以及后面的结果, 原文都有一个因子 2 —— 译者注.

得. 这些级数对于椭圆的任意的离心率以及一切 ζ 的值都收敛. 在贝塞尔之前, 二体问题曾被拉普拉斯借助于幂级数展开对于小的参数 ε 所解决, 幂级数的收敛性在 $\varepsilon < 0.66274\cdots$ 的条件下被证明.

函数 $J_k(x)$ 叫作**贝塞尔函数.**

第二十八讲

§10. 费耶核与魏尔斯特拉斯逼近定理

根据定义, 傅里叶级数的部分和叫作傅里叶三角多项式. 同这样多项式一样, 费耶多项式在三角级数理论中也起着重大的作用. 作为应用这些多项式的性质的一个例子, 我们来证明关于闭区间上的连续函数用三角多项式的序列以及代数多项式的序列一致逼近的魏尔斯特拉斯定理.

定义 17 称函数

$$P_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} g_m(x)$$

为函数 $g(x)$ 的 n 阶费耶多项式, 其中 $g_m(x)$ 是 $g(x)$ 的 m 阶傅里叶多项式, 即傅里叶级数的部分和

$$g_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

其中对于一切 $k = 0, 1, \cdots, m, a_k$ 和 b_k 是函数 $g(x)$ 的欧拉–傅里叶系数.

由定义显然有

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

使用 $g_m(x)$ 的积分表示就过渡到等式

$$P_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} g(x+y)D_m(y)dy = \int_{-\pi}^{\pi} g(x+y)F_n(y)dy,$$

其中

$$F_n(y) = \frac{1}{2\pi n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin(m+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}.$$

定义 18 由上式定义的 $F_n(y)$ 叫作 n 阶费耶核.

我们来推导函数 $F_n(y)$ 的某些性质. 下面的一些命题成立.

引理 9 当 $n \geqslant 1$ 时成立等式

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

由此特别地推出, 对于一切 $x, F_n(x) \geqslant 0$.

► 关于 m 求和, 借助于已知的三角函数公式得

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \frac{1}{2\pi n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi n\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{-1}{2\pi n\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}(\cos(k+1)x-\cos kx) \\ &= \frac{-1}{2\pi n\sin^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2}(\cos nx-1) \\ &= \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2. \quad ◄\end{aligned}$$

引理 10 当 $n \geqslant 1$ 时

$$\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)dx = 2\int_0^{\pi}F_n(x)dx = 1.$$

► 由于对于一切 m 成立等式

$$\int_{-\pi}^{\pi}D_m(x)dx = 1$$

所以, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1 = 1.$ ◄

引理 11 对于任意的函数 $g(x) \in W_{2\pi}$, 成立公式

$$P_n(x) - g(x) = \int_{-\pi}^{\pi}(g(x+y)-g(x))F_n(y)dy.$$

此结论直接从引理 10 和 $P_n(x)$ 的积分表示推出.

定理 19 (费耶定理) 若函数 $g(x)$ 在闭区间 $I=[-\pi,\pi]$ 上连续且 $g(-\pi)=g(\pi)$, 则它的费耶多项式序列在 I 上一致收敛到 $g(x)$.

► 把函数 $g(x)$ 以 2π 为周期延拓至全数轴. 它在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 这表明, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 找得到 $\delta>0$, 只要 $|y|<\delta$, 就对一切 x 成立

$$|g(x+y)-g(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

此外, $g(x)$ 显然在 $\mathbb{R}$ 上有界, 即存在 $C>0$, 使得对于一切 $x\in\mathbb{R}, |g(x)|\leqslant\frac{1}{2}C$, 从而对于一切 $x,y\in\mathbb{R}, |g(x+y)-g(x)|\leqslant C$. 于是

$$\begin{aligned}|g(x)-P_n(x)|&\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|g(x+y)-g(x)|F_n(y)dy\\&\leqslant\int_{-\delta}^{\delta}F_n(y)\frac{\varepsilon}{2}dy+2\int_{\delta}^{\pi}F_n(y)Cdy\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(y)dy+\frac{C}{\pi n}\int_{\delta}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2dy\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{C}{n}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}<\varepsilon\end{aligned}$$

只要 $n>\dfrac{C\varepsilon}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}$. 这表明 $P_n(x)\underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}g(x)$. ◄

由这个定理直接推出下述关于代数多项式的魏尔斯特拉斯逼近定理.

定理 20 设函数 $g(x)$ 在闭区间 $I_0=[0,\pi]$ 上连续. 那么存在代数多项式序列 $\{Q_n(x)\}$ 在 I_0 上一致收敛到 $g(x)$.

► 把 $g(x)$ 延拓成全数轴上的 2π 周期的偶函数. 则它满足定理 19 的条件. 因此, 对于 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$, 找得到号码 m, 使得费耶多项式 $P_m(x)$ 一致逼近 $g(x)$ 达精度 $\frac{1}{2}\varepsilon$. 然而 $P_m(x)$ 本身可展开成在 $I_0=[0,\pi]$ 上一致收敛到 $g(x)$ 的泰勒级数. 现取 $Q_n(x)$ 为其泰勒多项式与 $g(x)$ 在 I_0 上的偏差不超过 $\frac{1}{2}\varepsilon$ 者. 那么, $Q_n(x)$ 在 I_0 上近似 $g(x)$ 达精确度 ε(即在 I_0 上与 $g(x)$ 的偏差一致不超过 ε).

我们注意到多项式 $Q_n(x)$ 的阶数完全不必等于号码 n, 而我们也全然不需要如此.

于是, 对于一切 $x\in I_0$, 成立不等式

$$|g(x)-Q_n(x)|\leqslant\varepsilon=\frac{1}{n}.$$

由此推出当 $n\to\infty$ 时 $Q_n(x)\underset{I_0}{\rightrightarrows}g(x)$. ◄

§11. 狄利克雷积分与最简分式展开

我们使用费耶核的性质来计算狄利克雷积分的值. 显然有

$$I=\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=-\int_0^{\infty}\sin^2 x d\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=-\frac{\sin^2 x}{x}\bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

还有, 作积分的变量变换 $x=Ny, N>0$, 得

$$I=\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\frac{1}{N}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin Nx}{x}\right)^2dx$$
$$=\frac{1}{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin Nx}{x}\right)^2dx+\frac{\theta}{N}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$$
$$=\frac{1}{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin Nx}{\sin x}\right)^2dx+\frac{1}{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 Nx\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx+\frac{\theta}{N}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{dx}{x^2},$$

其中 $|\theta|\leqslant 1$. 由于下述关于费耶核的公式成立:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\sin Nx}{\sin x}\right)^2=2\pi F_N(2x),\qquad \int_0^{\pi}F_N(x)dx=\frac{1}{2},$$

所以从上面的等式推出

$$I=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_1}{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}dx+\frac{2\theta}{\pi N},\quad |\theta|\leqslant 1, |\theta_1|\leqslant 1.$$

函数 $\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上黎曼可积. 因此

$$I=\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{N}\right).$$

令 $N\to+\infty$ 就得 $I=\dfrac{\pi}{2}$.

我们还要证明两个公式, 它们把函数 $\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$ 和 $\pi\cot\pi x$ 表示成最简分数的形式. 对于第二个函数早先曾借助把函数 $\sin\alpha x$ 展开成傅里叶级数而得到这样的展开式. 这里我们使用某些三角和的积分表示以及严格正则函数的傅里叶系数随着其号码趋于无穷而趋于零的性质.

下面两个公式成立:

1) $\dfrac{\pi}{\sin\pi x}=\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=-k}^{k}\dfrac{(-1)^n}{x-n}$;

2) $\pi\cot\pi x=\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=-k}^{k}\dfrac{1}{x-n}$.

证明公式 1. 为此考虑函数

$$g_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} \frac{(-1)^n \sin \pi x}{x-n}.$$

我们有

$$\begin{aligned}
g_k(x) &= \sum_{n=-k}^{k} \frac{\sin \pi(x-n)}{x-n} = \sum_{n=-k}^{k} \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} e^{\pi i t(x-n)} dt \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} e^{\pi i t x} \left(\sum_{n=-k}^{k} e^{-\pi i t n} \right) dt \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} e^{\pi i t x} \frac{\sin \pi t \left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sin(\pi t/2)} dt \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \cos \pi t x \frac{\sin \pi t \left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sin \frac{\pi t}{2}} dt.
\end{aligned}$$

由于成立关系式

$$\int_{-1}^{1} e^{\pi i t n} dt = \begin{cases} 2, \text{当} n=0, \\ 0, \text{当} n \neq 0, n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

所以

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin \pi t \left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sin \frac{\pi t}{2}} dt = \int_{-1}^{1} \sum_{n=-k}^{k} e^{-\pi i t n} dt = 2.$$

由此得

$$\begin{aligned}
\pi - g_k(x) &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} (1-\cos \pi t x) \frac{\sin \pi t \left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sin \frac{\pi t}{2}} dt \\
&= \pi \int_{-1}^{1} \sin^2 \frac{\pi t x}{2} \frac{\sin \pi t \left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sin \frac{\pi t}{2}} dt \\
&= \pi \int_{-1}^{1} \sin \frac{\pi t}{2} x \left(\cot \frac{\pi t}{2} \cdot \sin(-k\pi t) + \cos(k\pi t) \right) dt. \\
&= \pi \left(\int_{-1}^{1} \left(\sin \frac{\pi x}{2} t \cdot \cot \frac{\pi}{2} t \right) \sin k\pi t dt + \int_{-1}^{1} \sin \frac{\pi x}{2} t \cdot \cos k\pi t dt \right).
\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-1}^{1} f(t)\sin k\pi t dt = 0 = \lim_{k\to\infty}\int_{-1}^{1} g(t)\cos k\pi t dt$$

其中 $f(t)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}t\right)\cot\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, $g(t)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}t\right)$, 所以

$$\lim_{k\to\infty}\pi - g_k(x) = 0.$$

于是, 对于 $x\notin\mathbb{Z}$ 得

$$\frac{\pi}{\sin\pi x} = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=-k}^{k}\frac{(-1)^n}{x-n},$$

或者换个写法,

$$\frac{\pi}{\sin\pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2x}{n^2-x^2}.$$

公式 1 证毕.

特别地, 当 $x=\frac{1}{2}$ 时得到数 π 的下述表示:

$$\pi = 2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}.$$

现证公式 2. 为此考虑函数

$$f_k(x) = \sum_{n=-k}^{k}\frac{\sin 2\pi x}{x-n}.$$

我们来求对于和 $f_k(x)$ 的积分表示. 有

$$\begin{aligned}
f_k(x) &= \sum_{n=-k}^{k}\frac{\sin 2\pi x}{x-n} = \sum_{n=-k}^{k}\pi\int_{-1}^{1} e^{2\pi i t(x-n)}dt\\
&= \pi\int_{-1}^{1} e^{2\pi i t x}\sum_{n=-k}^{k} e^{-2\pi i t n}dt\\
&= \pi\int_{-1}^{1} e^{2\pi i t x}\cdot\frac{e^{-2\pi i t k}-e^{2\pi i t(k+1)}}{1-e^{2\pi i t}}dt\\
&= \pi\int_{-1}^{1} e^{2\pi i t x}\cdot\frac{\sin\pi t(2k+1)}{\sin\pi t}dt\\
&= 2\pi\int_{0}^{1}\cos 2\pi t x\cdot\frac{\sin\pi t(2k+1)}{\sin\pi t}dt\\
&= 2\pi\int_{0}^{\frac{1}{2}}\cos 2\pi t x\frac{\sin\pi t(2k+1)}{\sin\pi t}dt + 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\cos 2\pi t x\frac{\sin\pi t(2k+1)}{\sin\pi t}dt\\
&= 2\pi\int_{0}^{\frac{1}{2}}\cos 2\pi t x\frac{\sin\pi t(2k+1)}{\sin\pi t}dt + 2\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\cos 2\pi x(u+1)\frac{\sin\pi u(2k+1)}{\sin\pi u}du.
\end{aligned}$$

此外,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi t(2k+1)}{\sin \pi t} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-k}^{k} e^{2\pi i t n} dt = 1.$$

如同推导公式 1 那样, 我们得到, 函数 $f_k(x) - \pi(1+\cos 2\pi x)$ 表示成 t 的函数 $h_1(t) = \sin^2 \pi x t \cdot \cot \pi t, h_2(t) = \sin \pi x t \cdot \sin \pi x(t+2) \cot \pi t, h_3(t) = \sin \pi x t \sin \pi x(t-2) \cot \pi t, h_4(t) = \sin^2 \pi x t, h_5(t) = \sin \pi x t \cdot \sin \pi x(t+2), h_6(t) = \sin \pi x t \cdot \sin \pi x(t-2)$ 的傅里叶系数的线性组合. 这些系数都随其号码之增至无穷而趋于零. 因此

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f_k(x)}{\sin 2\pi x} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{k} \frac{1}{x-n} = \frac{\pi(1+\cos 2\pi x)}{\sin 2\pi x} = \pi \cot \pi x.$$

公式 2 证毕.

第二十九讲

§12. 傅里叶变换与傅里叶积分

设 $f(x)$ 是以 $2\pi l$ 为周期的函数并展开成了收敛的傅里叶级数. 那么有

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{x}{l}},$$

其中

$$c_k = \frac{1}{2\pi l} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(t) e^{-ik\frac{t}{l}} dt.$$

用 y_k 表示 $\frac{k}{l}$ 并设

$$g_l(y_k) = \int_{-\pi l}^{\pi l} f(t) e^{-i y_k t} dt.$$

那么函数 $f(x)$ 可以表示成

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_l(y_k) e^{i y_k x} \frac{1}{l}.$$

右端的和式是积分

$$F_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_l(y) e^{iyx} dy$$

的一个形式的在 $(-\infty,\infty)$ 上的, 以 $\frac{1}{l}$ 为步长的黎曼积分和, 其中

$$g_l(y)=\int_{-\pi l}^{\pi l} f(t)e^{-iyt}dt.$$

如果在积分 $F_l(x)$ 中令 $l\to\infty$ 形式地过渡到极限, 那么就得到累次反常积分

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iyt}dt\right)dy.$$

定义 19 函数 $F(x)$ 称作函数 $f(x)$ 的傅里叶积分或傅里叶积分公式.

如果严格正则函数 $|f(x)|$ 在全实数轴上 (按某种意义) 黎曼可积, 那么积分 $g_l(y)$ 根据魏尔斯特拉斯判别法, 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛, 于是可以证明, 能令 $l\to+\infty$ 而取极限. 由此出发, 我们给出下述定义.

定义 20 函数

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iyt}dt$$

叫作函数 $f(x)$ 的傅里叶变换. 这里积分 $g(y)$ 按柯西主值理解. 而函数 $F(x)$ 叫作函数 $g(y)$ 的傅里叶逆变换.

作为法则, 成立等式 $F(x)=f(x)$. 此外, 常在傅里叶正变换和逆变换中代替函数的 "权" 系数 1 和 $\frac{1}{2\pi}$ 以 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. 显然, 傅里叶积分并不因此而改变.

作为例子, 我们来求函数 $(l>0)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2l}, 若 -l<x<l,\\ \frac{1}{4l}, 若 x=-l 和 x=l,\\ 0, \quad 在其他情形\end{cases}$$

的傅里叶变换. 有

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iyt}dt=\int_{-l}^{l}\frac{1}{2l}e^{-iyt}dt=\frac{\sin ly}{ly}.$$

对于傅里叶逆变换, 由此得到

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ly}{ly}e^{iyx}dy=f(x).$$

特别地, 对于 $x=0$

$$f(0)=\frac{1}{2l}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ly}{ly}dy.$$

我们引入最常遇到的傅里叶正变换和逆变换 [31].

表格的右边一列给出了概率分布, 即满足条件 $f(x) \geqslant 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ 的函数 $f(x)$ 的密度(见表18.1).

表 18.1

函数 $f(x)$, 其定义域	函数 $g(y)$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, -\infty < x < +\infty$, 正态分布	$e^{-y^2/2}$
$\begin{cases} 1/a, & 若x \in [0,a], \\ 0, & 若x \notin [0,a], \end{cases}$ 均匀分布	$\frac{e^{iay}-1}{iay}$
$\begin{cases} 1/(2a), & 若x \in [-a,a], \\ 0, & 若x \notin [-a,a], \end{cases}$ 均匀分布	$\frac{\sin ay}{ay}$
$\begin{cases} \frac{1}{a}\left(1-\frac{\lvert x\rvert}{a}\right), & x \in [-a,a], \\ 0, & x \notin [-a,a], \end{cases}$ 三角分布	$2\frac{1-\cos ay}{a^2y^2}$
$\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos ax}{ax^2}, -\infty < x < +\infty$	$\begin{cases} 1-\frac{\lvert y\rvert}{a}, & 若y \in [-a,a], \\ 0, & 若y \notin [-a,a], \end{cases}$
$\frac{1}{\Gamma(t)}x^{t-1}e^{-x}, x > 0, t > 0, \gamma-$ 密度 (伽玛密度)	$\frac{1}{(1-iy)^t}$
$\frac{1}{2}e^{-\lvert x\rvert}, -\infty < x < +\infty$, 双边指数分布	$\frac{1}{1+y^2}$
$\frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+x^2}, -\infty < x < +\infty, t > 0$, 柯西分布	$e^{-t\lvert y\rvert}$
$e^{-x}\cdot\frac{t}{x}J_t(x), x > 0, t > 0$, 贝塞尔密度	$(1-iy-\sqrt{(1-iy^2)-1})^t$①
$\frac{1}{\pi \mathrm{ch} x}, \infty < x + \infty$, 双曲余弦	$\frac{1}{\mathrm{ch}(\pi y/2)}$

概率分布函数的傅里叶变换叫作特征函数. 在全部傅里叶变换当中, 特征函数族具有这样的特点, 对应于不同的概率分布有不同的特征函数 (唯一性定理), 同时, 概率分布的序列 $\{F_n\}$ 收敛到概率分布 F 的充分必要条件是对应的特征函数的序列收敛到连续的极限函数 (连续性定理), 我们不去证明概率论的这些重要定理.

我们将叙述并引入一些把函数表示成傅里叶积分的充分条件. 这些条件与对于傅里叶级数的迪尼和狄利克雷–若尔当条件相类似. 对于它们的证明, 我们将依靠函数的傅里叶变换 $g(x)$ 的连续性以及当 $x \to \infty$ 时它之趋于零.

用 $L' = L'(-\infty,+\infty)$ 表示在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对黎曼可积的在任意的有限闭区间上都严格正则的函数的全体.

引理 12 *设函数 $f \in L'$. 那么它的傅里叶变换 g 是全数轴 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.*

► 根据魏尔斯特拉斯判别法, 积分 $g(y)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 因为函数 $|f(x)|$ 是其被积函数 $e^{-iyx}f(x)$ 的优控.

先考虑 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续的情形. 此时函数 $\varphi(x,y) = e^{-iyx}f(x)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续. 根据关于一致收敛的反常积分的连续性的定理, 函数此时是连续的.

①原书此处似有误, 根据有关数学手册, $e^{-x}\cdot\frac{t}{x}J_t(x), x > 0, t > 0$ 的 Fourier 变换是

$$\left(\sqrt{(1-iy)^2+1}-(1-iy)\right)^t$$

——译者注.

在一般情形, 对于严格正则函数 $f(x)$ 可以找出连续函数 $h(x)$, 它与 $f(x)$ 仅在函数 $f(x)$ 的间断点 x_n 的 δ_n 邻域内不同, 且 $h(x)$ 在此邻域内是线性函数且满足

$$\int\limits_{|x-x_n|<\delta_n} |f(x)-h(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3\cdot 2^n}.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-h(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

令

$$g_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-iyx}dx.$$

根据上面已证之事, g_1 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 因此存在 $\delta > 0$ 使对于任意的 $h \in \mathbb{R}$, 只要 $|h| < \delta$, 就成立

$$|\Delta g_1| = |g_1(y+h) - g_1(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

我们对于量 $\Delta g = g(y+h) - g(y)$ 的绝对值进行上方估计. 那么

$$|\Delta g| \leqslant |\Delta g_1| + 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-h(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

因此, 函数 $g(y)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. ◄

引理 13 (黎曼引理) 设 $f(x) \in L'[a,b]$. 那么当 $y \to \infty$ 时有

$$g(y) = \int_a^b f(x)e^{-iyx}dx \to 0.$$

► 进行变量代换 $x = t + \frac{\pi}{y}$, 得

$$g(y) = -\int_{a-\frac{\pi}{y}}^{b-\frac{\pi}{y}} f(t+\frac{\pi}{y})e^{-iyt}dt.$$

因此

$$\begin{aligned}
g(y) &= \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(x)e^{-iyx}dx - \int_{a-\frac{\pi}{y}}^{b-\frac{\pi}{y}} f(x+y)e^{-iyx}dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_a^{b-\frac{\pi}{y}} (f(x)-f(x+y))e^{-iyx}dx + \frac{1}{2}\int_{b-\frac{\pi}{y}}^b f(x)e^{-iyx}dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{a-\frac{\pi}{y}}^a f(x+\frac{\pi}{y})e^{-iyx}dx \\
&= A_1 + A_2 + A_3.
\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 是严格正则函数, 闭区间 $[a,b]$ 可以划分成函数 $f(x)$ 的连续性区间. 从而如果在每个这样的连续性区间上, 引理的结论能获得证明的话, 则由于这些区间的数目的有限性, 结论将对于整个闭区间 $[a,b]$ 成立. 因此可以认为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

根据 $f(x)$ 的连续性, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $C > 0$, 使得对于一切满足条件 $|y| > C$ 的 y, 成立不等式

$$|f(x) - f(x+\frac{\pi}{y})| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

由于在闭区间上连续的函数在该区间上有界, 所以存在数 $M > 0$ 使得对于一切 $x \in [a,b]$ 有 $|f(x)| < M$. 因此 $|A_2| + |A_3| \leqslant \pi M/|y|$.

由此得到, 当 $|y| > \max(C, 2\pi M/\varepsilon)$ 时成立不等式 $|g(y)| < \varepsilon$. 这表明当 $y \to \infty$ 时函数 $g(y) \to 0$. ◀

引理 14 设函数 $f(x) \in L'(-\infty,+\infty)$. 那么它的傅里叶变换 $g(y)$ 当 $y \to \infty$ 时趋于零.

► 任意固定 $\varepsilon > 0$. 根据函数 $|f(x)|$ 的绝对可积性知, 存在数 $A > 0$ 使得

$$\int_{-\infty}^{-A} |f(x)|dx + \int_{A}^{\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

根据黎曼引理, 存在 $Y > 0$, 使当 $|y| > Y$ 时

$$\left|\int_{-A}^{A} f(x)e^{-iyx}dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此当 $|y| > Y$ 时, $|g(y)| < \varepsilon$. 证得当 $y \to \infty$ 时 $g(y) \to 0$. ◀

定理 21 设函数 $|f(x)|$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上可积, 且在任意的有限的闭区间上函数 $f(x)$ 都是严格正则的. 还设对于某 $\delta > 0$, 存在第二类反常积分

$$B_\delta = \int_0^\delta \frac{|\varphi(y)|}{y}dy, \varphi(y) = \frac{f(x_0+y)+f(x_0-y)}{2} - f(x_0).$$

那么函数 $f(x)$ 的傅里叶积分在点 x_0 处收敛到值 $f(x_0)$.

► 考虑函数

$$f_A(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(y)e^{iyx}dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} e^{iyx}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt}f(t)dt.$$

在右端的积分中交换积分次序. 这是可行的, 因为被积函数是连续的①并且反常积分

①原文未指出哪个函数是连续的. 而且此定理中提到的 "严格正则" 似并不与第 18 章 §2 定义 7 吻合 —— 译者注.

在整个参数值集合上一致收敛. 于是

$$
\begin{aligned}
f_A(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{-A}^{A} e^{-iy(t-x)}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\frac{e^{-iA(t-x)}-e^{iA(t-x)}}{-i(t-x)}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} (f(x+u)+f(x-u))\frac{\sin Au}{u}du.
\end{aligned}
$$

我们来证 $\lim\limits_{A\to\infty} f_A(x_0)=f(x_0)$. 为此, 先回忆一下 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin Au}{u}du=\frac{\pi}{2}$, 那么

$$f_A(x_0)-f(x_0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(u)\frac{\sin Au}{u}du.$$

根据积分 B_δ 的收敛性知, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $h>0$ 使得 $\displaystyle\int_0^h \frac{|\varphi(y)|}{y}dy<\frac{\varepsilon}{2}$. 由黎曼引理推出, 存在 $Y>0$, 使得对于一切 $A>Y$, 成立不等式

$$\left|\int_h^\infty \frac{\varphi(u)}{u}\sin Au du\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由此得

$$\lim_{A\to\infty} f_A(x_0)=f(x_0). \quad ◀$$

定理 22 设 $f(x)\in L'(-\infty,\infty)$, 且设在点 x_0 的某 δ 邻域内函数 $f(x)$ 有界变差. 那么它的傅里叶积分在此点收敛到值 $f(x_0)$.

► 从上一个定理的证明得到

$$f_A(x_0)-f(x_0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(u)\frac{\sin Au}{u}du.$$

由于右端的积分收敛, 所以对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在数 $B>0$, 使得

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_B^\infty \varphi(u)\frac{\sin Au}{u}du\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

根据定理的条件, 函数 $\varphi(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 上有界变差, 且此外, 当 $y\to 0$ 时 $\varphi(y)\to 0$. 因此, 这个函数可以表示成两个正的不减的有界函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的差, 而且它们当 $x\to 0$ 时都趋于零.

只要证明当 $A\to\infty$ 时, 积分

$$R=\frac{2}{\pi}\int_0^B \varphi_1(u)\frac{\sin Au}{u}du$$

趋于零就可以了.

首先, 从条件 $\lim\limits_{u\to 0}\varphi_1(u)=0$ 得知, 存在数 $h>0$ 使得对于一切 $|u|\leqslant h$ 成立不等式 $\varphi_1(u)<\varepsilon/8$. 那么

$$\begin{aligned}R&=\frac{2}{\pi}\int_0^h\varphi_1(u)\frac{\sin Au}{u}du+\frac{2}{\pi}\int_h^B\varphi_1(u)\frac{\sin Au}{u}du\\&=R_1+R_2.\end{aligned}$$

根据第二中值定理, 对于某 $k, 0<k<h$ 有

$$\begin{aligned}|R_1|&=\left|\frac{2}{\pi}\varphi_1(h)\int_k^h\frac{\sin Au}{u}du\right|=\frac{2}{\pi}\varphi_1(u)\left|\int_{Ak}^{Ah}\frac{\sin u}{u}du\right|\\&\leqslant\frac{2}{\pi}\varphi_1(h)\int_0^\pi\frac{\sin u}{u}du=\varphi_1(h)<\frac{\varepsilon}{8}.\end{aligned}$$

还有, 对于固定的 h 和 B, 根据函数 $\varphi_1(u)/u$ 在 $[h,B]$ 上的可积性, 根据黎曼引理推出, 当 $A\to\infty$ 时 $R_2\to 0$. 因此存在 A_0 使当 $A>A_0$ 时

$$|R_2|=\left|\frac{2}{\pi}\int_h^B\varphi_1(u)\frac{\sin Au}{u}du\right|<\frac{\varepsilon}{8}.$$

于是得到

$$|f_A(x_0)-f(x_0)|=\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\varphi(u)\frac{\sin Au}{u}du\right|<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{A\to\infty}f_A(x_0)=f(x_0)$. ◀

注　设 $f(x)\in L'$. 那么从定理 21 特别地推出, 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某 δ 邻域内还是逐段光滑的, 则迪尼定理的条件成立, 从而积分 B_δ 存在, 因此, 函数 $f(x)$ 的傅里叶积分在点 x_0 收敛到 $f(x_0)$. 从定理 22 推出, 如果绝对可积的函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内还是逐段单调的, 则它的傅里叶积分在当 x_0 处收敛到 $f(x_0)$.

引理 15　设 $(1+|x|^k)f(x)\in L'(-\infty,+\infty)$, 则 f 的傅里叶变换 k 次可微.

▶　由于有不等式

$$|f(x)(ix)^n e^{ixy}|\leqslant(1+|x|^n)|f(x)|, n=1,\cdots,k,$$

根据魏尔斯特拉斯判别法, 积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(-ix)^n e^{-ixy}dx$ 在全实轴上相应地一致收敛到函数 $g^{(n)}(y), n=1,\cdots,k$. ◀

引理 16　设 $f(x),\cdots,f^{(k)}(x)\in L'(-\infty,\infty)$, 且设当 $x\to\infty$ 时成立关系式 $f(x)\to 0,\cdots,f^{(k-1)}(x)\to 0$. 那么当 $y\to\infty$ 时 $|g(y)|=o(|y|^{-k})$.

► 分部积分, 对于任意的 $A>0$, 有

$$\int_{-A}^{A} f^{(k)}(x)e^{-ixy}dx = f^{(k-1)}(x)e^{-ixy}\Big|_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A} f^{(k-1)}(x)(-iy)e^{-ixy}dx.$$

令 $A\to\infty$ 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)e^{-ixy}dx = iy\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k-1)}(x)e^{-ixy}dx.$$

于是递推地得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)e^{-ixy}dx = (iy)^k\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx.$$

根据黎曼引理,

$$\lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)e^{-ixy}dx = 0,$$

所以 $|g(y)| = o(|y|^{-k})$, 当 $y\to\infty$. ◄

定理 23 (普朗舍列尔等式) 设 $f(x), f'(x), f''(x), \varphi(x) \in L'(-\infty,\infty)$, 且当 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to 0, f'(x)\to 0$. 设 $g(y)$ 和 $\psi(y)$ 分别是 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的傅里叶变换. 那么成立等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\overline{\psi(y)}dy,$$

其中函数 $\psi(y)$ 上面的一横代表复共轭运算.

► 设 $A>0$ 是任意的. 对积分进行变换

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} f(x)\varphi(x)dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\varphi(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ixy}dy\right)dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\left(\int_{-A}^{A}\varphi(x)e^{-ixy}dx\right)}g(y)dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(A,y)dy,\end{aligned}$$

其中

$$F(A,y) = \int_{-A}^{A}\varphi(x)e^{ixy}dx.$$

上面积分之交换次序是根据对于某 $c>0$ 有

$$|g(y)| \leqslant c(1+|y|^2)^{-1}, |F(A,y)| \leqslant \frac{c}{1+|y|^2}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi''(x)|dx,$$

从而反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ixy}dy$ 在闭区间 $[-A,A]$ 上绝对一致收敛. 另外, 根据魏尔斯特拉斯判别法, 反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} F(A,y)dy$ 在全实数轴上关于 A 一致收敛. 因此可以在积分号下取极限. 于是得到定理中所断定的等式. ◄[①]

①原文此段中有一些错误, 已纠正 —— 译者注.

最后,作为傅里叶积分理论的应用,我们证明一个重要的科捷勒尼科夫 (Котельников) 公式.

称函数 $f(x)$ 为**信号**,而它的傅里叶变换为**信号的谱**.发生了这样的问题,通过信号的谱来恢复信号,即通过函数的傅里叶变换来表示函数.常常只知道在一个有限区间上的谱,即有限谱,而要根据对应于这个谱的信号在某个离散的集上的值来恢复这个信号.科捷勒尼科夫公式使我们能够做到这件事.

设下述积分存在:

$$g(y)=\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ixy}dx,\ f_a(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}g(y)e^{ixy}dy.$$

把定义在 $[-a,a]$ 上并以 $2a$ 为周期延拓到全数轴的函数 $g(y)$ 展开成傅里叶级数.有

$$g(y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{iyn\frac{\pi}{a}},$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}g(y)e^{-iyn\frac{\pi}{a}}dy=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}f_a\left(-n\frac{\pi}{a}\right).$$

因此得

$$\begin{aligned}
f_a(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}f_a\left(-n\frac{\pi}{a}\right)e^{iyn\frac{\pi}{a}}\right)e^{ixy}dy\\
&=\frac{1}{2a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_a\left(-n\frac{\pi}{a}\right)\int_{-a}^{a}e^{iy(n\frac{\pi}{a}+x)}dy\\
&=\frac{1}{2a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_a\left(-n\frac{\pi}{a}\right)\frac{2i\sin\left[\left(n\frac{\pi}{a}+x\right)a\right]}{i\left(n\frac{\pi}{a}+x\right)}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_a\left(-n\frac{\pi}{a}\right)\cdot\frac{\sin(ax+n\pi)}{ax+n\pi}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_a\left(n\frac{\pi}{a}\right)\cdot\frac{\sin(ax-n\pi)}{ax-n\pi}.
\end{aligned}$$

如果函数 $g(y)$ 的傅里叶级数当 $|y|\leqslant a$ 时一致收敛,则它可以逐项积分.于是得到

$$f_a(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_a\left(\frac{n\pi}{a}\right)\frac{\sin(ax-n\pi)}{ax-n\pi}.$$

此公式叫作**科捷勒尼科夫公式**.

第三十讲

§13. 拉普拉斯方法和稳态相方法

拉普拉斯建立了研究积分

$$J(n)=\int_a^b f(x)\varphi^n(x)dx$$

当 $n\to\infty$ 时的渐近性状的方法, 其中函数 $\varphi(x)$ 对于一切 $x\in[a,b]$ 都取正值.

其方法之本质如下. 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都是光滑函数且 $\varphi(x)$ 仅有一个严格最大值在 $x=c$ 处取得. 那么当 $n\to\infty$ 时, 此积分可以非常精确地用其被积函数在点 $x=c$ 的某足够小的邻域内的积分来代替. 而在此小邻域中可使用函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的泰勒展开式来足够精确地计算出这个积分.

我们以非传统的形式来叙述拉普拉斯方法.

定理 24 设 A,λ_2,λ_3 都是正的常数, $F(x)$ 是实函数, 它在闭区间 $[a,b]$ 上有直到三阶的连续导函数, 且对于一切 $x\in[a,b]$ 成立不等式

$$0<\lambda_2\leqslant -F''(x)\leqslant A\lambda_2, |F'''(x)|\leqslant A\lambda_3.$$

还设存在点 $c\in(a,b)$, 使得 $F'(c)=0$. 那么成立公式

$$\int_a^b e^{F(x)}dx=\sqrt{2\pi}\frac{e^{F(c)}}{|F''(c)|^{\frac{1}{2}}}+R,$$

$$R\leqslant Be^{F(c)}\lambda_2^{-\frac{4}{5}}\lambda_3^{\frac{1}{5}}+e^{F(c)}\frac{2}{\lambda_2\min(c-a,b-c,\delta)}.$$

其中 B 是一个与 A 有关的常数①.

► 从定理的条件推出, 函数 $F'(x)$ 是严格单调减的, 从而只有一个零点 $x=c$. 令 $\delta=(\lambda_2\lambda_3)^{-\frac{1}{5}}$(并认为 $\delta\leqslant 1$). 定义 $E_1=[a,c]\backslash[c-\delta,c], E_2=[a,b]\cap[c-\delta,c+\delta], E_3=[c,b]\backslash[c,c+\delta]$, 以及

$$I_k=\int_{E_k}e^{F(x)}dx, k=1,2,3.$$

若 $E_1\neq\varnothing$, 即 $c-\delta>a$, 则

$$|I_1|=\left|\int_a^{c-\delta}\frac{F'(x)}{F'(x)}e^{F(x)}dx\right|\leqslant\frac{1}{|F'(c-\delta)|}\left|\int_a^{c-\delta}de^{F(x)}\right|\leqslant\frac{e^{F(c-\delta)}}{|F'(c-\delta)|}.$$

①本定理的叙述和证明中不妥之处在翻译时作了修正 —— 译者注.

由于

$$|F'(c-\delta)| = \left|\int_{c-\delta}^{c} F''(x)dx\right| = \int_{c-\delta}^{c} |F''(x)|dx \geqslant \delta\lambda_2,$$

所以

$$|I_1| \leqslant e^{F(c-\delta)}\frac{1}{\delta\lambda_2} \leqslant e^{F(c)}\frac{1}{\delta\lambda_2}.$$

同时, 当 $E_2 \neq \varnothing$ 时,

$$|I_3| \leqslant e^{F(c)}\frac{1}{\delta\lambda_2}.$$

使用函数 $F(x)$ 在 (a',b') 上的泰勒展开式 (在 c 点展开), 其中 $a' = \max(a, c-\delta), b' = \min(b, c+\delta)$. 对于 $\xi \in (a',b')$ 有

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{a'}^{b'} e^{F(x)}dx = \int_{a'-c}^{b'-c} e^{F(c+y)}dy \\
&= e^{F(c)}\int_{a'-c}^{b'-c} e^{\frac{1}{2}F''(c)y^2+\frac{1}{6}F'''(\xi)y^3}dy \\
&= e^{F(c)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}F''(c)y^2}dy + e^{F(c)}\int_{a'-c}^{b'-c} e^{\frac{1}{2}F''(c)y^2}\left(e^{\frac{1}{6}F'''(\xi)y^3}-1\right)dy \\
&\quad -e^{F(c)}\int_{-\infty}^{a'-c} e^{\frac{1}{2}F''(c)y^2}dy - e^{F(c)}\int_{b'-c}^{\infty} e^{\frac{1}{2}F''(c)y^2}dy \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{|F''(c)|}}e^{F(c)} + R_1,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
R_1 = e^{F(c)}\Bigg\{&\int_{a'-c}^{b'-c} e^{\frac{1}{2}F''(c)y^2}\left(e^{\frac{1}{6}F'''(\xi)y^3}-1\right)dy \\
&-\int_{c-a'}^{\infty} e^{\frac{1}{2}F''(c)y^2}dy - \int_{b'-c}^{\infty} e^{\frac{1}{2}F''(c)y^2}dy\Bigg\}.
\end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned}
|R_1| &\leqslant e^{F(c)}\left\{\int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{1}{2}F''(c)y^2}B_1\lambda_3|y^3|dy + 2\int_{\min(c-a,b-c,\delta)}^{\infty} e^{\frac{1}{2}F''(c)y^2}dy\right\} \\
&\leqslant e^{F(c)}\left(B_1\lambda_3\delta^4 + \frac{2}{\lambda_2\gamma}\right) = e^{F(c)}\left(\frac{2}{\lambda_2\gamma} + B_1\lambda_2^{-\frac{4}{5}}\lambda_3^{\frac{1}{5}}\right),
\end{aligned}$$

其中 B_1 是与 A 有关的常数, $\gamma = \min(c-a, b-c, \delta)$.

把上面的结果合起来就完成了定理的证明. ◀

例　求当 $\lambda \to +\infty$ 时

$$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda}e^{-t}dt$$

的渐近公式.

引入如在定理 24 中给出的被积表达式得

$$F(t)=\lambda\ln t-t, F'(t)=\frac{\lambda}{t}-1, F''(t)=-\frac{\lambda}{t^2}, F'''(t)=\frac{2\lambda}{t^3}.$$

在点 $t=\lambda$ 处函数 $F(t)$ 取最大值. 把 $\Gamma(\lambda+1)$ 的积分表示成三个积分的和:

$$\Gamma(\lambda+1)=\int_0^{\frac{\lambda}{2}}+\int_{\frac{\lambda}{2}}^{2\lambda}+\int_{2\lambda}^{\infty}=I_1+I_2+I_3.$$

由第二中值定理出发估计区间 $\left(0,\frac{\lambda}{2}\right)$ 和 $(2\lambda,+\infty)$ 上的积分. 得

$$I_1=\int_0^{\frac{\lambda}{2}}t^\lambda e^{-t}dt\leqslant\frac{e^{F\left(\frac{\lambda}{2}\right)}}{F'\left(\frac{\lambda}{2}\right)}=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^\lambda e^{-\frac{\lambda}{2}}=\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^\lambda,$$

$$I_3\leqslant\frac{e^{F(2\lambda)}}{|F'(2\lambda)|}=2(2\lambda)^\lambda e^{-2\lambda}=2\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\left(\frac{2}{e}\right)^\lambda$$

在区间 $\left[\frac{\lambda}{2},2\lambda\right]$ 使用定理 24, 有

$$16\lambda_2=\frac{4}{\lambda}\geqslant-F''(t)\geqslant\frac{1}{4\lambda}=\lambda_2, F'''(t)=\frac{2\lambda}{t^3}\leqslant\frac{16}{\lambda^2}=16\lambda_3,$$

$$\int_{\frac{\lambda}{2}}^{2\lambda}t^\lambda e^{-t}dt=\sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda+R,$$

其中

$$|R|\leqslant B\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\cdot\lambda^{\frac{4}{5}}\lambda^{-\frac{2}{5}}=B\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\cdot\lambda^{\frac{2}{5}}.$$

于是得, 当 $\lambda\to+\infty$ 时

$$\Gamma(\lambda+1)=\sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda+O\left(\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\cdot\lambda^{\frac{2}{5}}\right)$$
$$=\sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda\left(1+O\left(\lambda^{-\frac{1}{10}}\right)\right).$$

这就是要求的渐近公式.

我们看到, 定理 24 的证明基于局部化原理, 即基于获得积分在特殊点的邻域内的渐近性质. 对于三角函数的积分的局部化原理的类似应用叫作**稳态相方法**(метод стационарной фазы).

我们以定理的形式引入这个方法. 应该指出, 此定理的证明遵循定理 24 的证明的线索.

定理 25① 设 A,λ_2,λ_3 是正的常数, $F(x)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 上具有直到三阶的连续导函数的实函数, 并且对于一切 $x\in[a,b]$ 成立不等式

$$0<\lambda_2\leqslant F''(x)\leqslant A\lambda_2, |F'''(x)|\leqslant A\lambda_3.$$

还设存在 $c\in(a,b)$, 使得 $F'(c)=0$. 那么成立公式

$$\int_a^b e^{iF(x)}dx=\sqrt{2\pi}\frac{e^{i(\pi/4+F(c))}}{|F''(c)|^{\frac{1}{2}}}+R,$$
$$|R|\leqslant B\left(\lambda_2^{-\frac{4}{5}}\lambda_3^{\frac{1}{5}}+\frac{1}{\lambda_2\min(c-a,b-c,\delta)}\right),$$

其中 B 是与 A 有关的常数.

我们看到, 如果对于一切 $x\in[a,b]$ 成立不等式 $0<\lambda_2\leqslant -F''(x)\leqslant A\lambda_2$, 那么从定理 25 推出对于函数 $G(x)=-F(x)$ 的公式, 即得到对于积分 $\int_a^b e^{-iF(x)}dx$ 的相应的公式.

▶ 函数 $F'(x)$ 仅当 $x=c$ 时等于零, 因为根据 $F''(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的正性, $F'(x)$ 是严格单调增的. 令 $\delta=(\lambda_2\lambda_3)^{-\frac{1}{3}}$(并认为 $\delta<1$). 令 $E_1=[a,c]\backslash[c-\delta,c], E_2=[a,b]\cap[c-\delta,c+\delta], E_3=[c,b]\backslash[c,c+\delta]$, 并定义

$$I_k=\int_{E_k}e^{iF(x)}dx, k=1,2,3.$$

当 $E_1\neq\varnothing$ 时, 记 $c-\delta=a'$. 则

$$\begin{aligned}|I_1|=\left|\int_a^{a'}\frac{F'(x)}{F'(x)}e^{iF(x)}dx\right|&\leqslant\frac{1}{|F'(a')|}\left|\int_{\xi_1}^{a'}F'(x)\cos F(x)dx\right|\\&+\frac{1}{|F'(a')|}\left|\int_{\xi_2}^{a'}F'(x)\sin F(x)dx\right|\\&\leqslant\frac{4}{|F'(a')|}=\frac{4}{\left|\int_{c-\delta}^{c}F''(t)dt\right|}\leqslant\frac{4}{\delta\lambda_2}.\end{aligned}$$

同样地,

$$|I_3|\leqslant\frac{4}{\delta\lambda_2}.$$

根据泰勒公式, 对于某 $\xi\in E_2(\xi=\xi(y))$,

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{\max(a-c,-\delta)}^{\min(b-c,\delta)}e^{i\left(F(c)+\frac{1}{2}F''(c)y^2+\frac{1}{6}F'''(\xi)y^3\right)}dy\\&=e^{iF(c)}\int_{-u}^{v}e^{i\left(\frac{1}{2}F''(c)y^2+\frac{1}{6}F'''(\xi)y^3\right)}dy,\end{aligned}$$

①与定理 21 一样, 原文对此定理的叙述和证明似有不妥之处, 在翻译时已作修正 —— 译者注.

其中 $u=\min(c-a,\delta), v=\min(b-c,\delta)$. 于是

$$I_2=e^{iF(c)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\frac{1}{2}F''(c)y^2}dy+R_1\right)=\sqrt{\frac{2\pi}{F''(c)}}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+F(c)\right)}+R_1e^{iF(c)},$$

其中

$$R_1=\int_{-u}^{v}\left(e^{i\frac{1}{6}F'''(\xi)y^3}-1\right)e^{i\frac{1}{2}F''(c)y^2}dy \\ -\left(\int_{v}^{\infty}e^{i\frac{1}{2}F''(c)y^2}dy+\int_{-\infty}^{-u}e^{i\frac{1}{2}F''(c)y^2}dy\right).$$

于是

$$|R_1|\leqslant B_1\lambda_3\delta^4+\left|\int_{u}^{\infty}e^{i\frac{1}{2}F''(c)y^2}dy\right|+\left|\int_{v}^{\infty}e^{i\frac{1}{2}F''(c)y^2}dy\right| \\ \leqslant B_1\lambda_2^{-\frac{4}{3}}\lambda_3^{\frac{1}{5}}+B_2\frac{1}{\lambda_2\min(c-a,b-c,\delta)},$$

其中 B_1 和 B_2 是与 A 有关的常数. 把上面的结果合起来就推出了定理的结论. ◀

例 求贝塞尔函数

$$J_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-k\varphi)d\varphi$$

当 $x\to+\infty$ 时的渐近式.

考虑积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{iF(\varphi)}d\varphi,\quad F(\varphi)=k\varphi-x\sin\varphi.$$

我们有 $F'(\varphi)=k-x\cos\varphi, F''(\varphi)=x\sin\varphi, F'''(\varphi)=x\cos\varphi$. 由条件 $F'(\varphi_0)=0$ 来确定点 φ_0, 得 $\varphi_0=\arccos\frac{k}{x}$. 那么 $F''(\varphi_0)=\sqrt{x^2-k^2}$. 当 $x>2|k|+128$ 时有 $\frac{\pi}{3}<\varphi_0<\frac{2\pi}{3}$. 我们有

$$\int_0^{\pi}e^{iF(\varphi)}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}.$$

用第二中值定理估计第一个和第三个积分, 得

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{iF(\varphi)}d\varphi\right|\leqslant\frac{4}{\left|F'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|}=\frac{4}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}x-k\right|}\leqslant\frac{B}{x},\quad \left|\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}e^{iF(\varphi)}d\varphi\right|\leqslant\frac{B}{x},$$

其中 B 是一个正的常数 $(x > 2k)$. 对于区间 $[\pi/4, 3\pi/4]$ 中的点 φ 有 $x \geqslant F''(\varphi) = x\sin\varphi \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}x, |F'''(\varphi)| \leqslant x$. 因此从定理 25 求得

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^{iF(\varphi)}d\varphi = \sqrt{2\pi}\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}+F(\varphi_0)\right)}}{\sqrt{F''(\varphi_0)}} + R,$$

$$|R| \leqslant B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^{-\frac{4}{5}} x^{\frac{1}{5}} + \frac{B}{\frac{1}{\sqrt{2}}x \cdot \min\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} - \varphi_0, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^2\right)^{-\frac{1}{5}}\right)}$$

$$\leqslant B'x^{-\frac{3}{5}} (x > 2|k| + 128),$$

其中 B, B' 为正的常数 (与 $x > 2|k| + 128$ 无关). 那么

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} e^{iF(\varphi)}d\varphi = \frac{\sqrt{2\pi}}{(x^2 - k^2)^{\frac{1}{4}}}$$

从而

$$J_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\arccos\frac{k}{x} - \sqrt{x^2 - k^2}\right)}{(x^2 - k^2)^{\frac{1}{4}}} + O\left(x^{-\frac{3}{5}}\right) (x \to +\infty).$$

由此得到

$$J_k(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k - x\right)}{\sqrt{x}} \quad (x \to +\infty).$$

最后指出, 拉普拉斯方法与稳态相方法的联合在复变函数论中导致**鞍点法** (метод перевала). 柯西, 黎曼, 涅克拉索夫, 捷巴伊都对这种方法做过重要的研究. 鞍点法的现代理论可在柯普松, 叶沃格拉佛夫, 伯列因, 杰佛里斯, 斯维尔斯等人的专著中找到.

在彼特洛维和索洛维耶夫的论文中叙述了问题的历史 (关于鞍点法形成的历史, 数学史研究, 1994 年 35 卷).

第四部分

多重黎曼积分、曲面积分

数学分析课程的最后几章涉及到的数学领域, 无论对于数学分析还是对于如实变函数论, 复变函数论, 微分几何, 泛函分析等专门的课程都具有普遍性.

课程的这一部分基本上讨论多重黎曼积分, 同时也讨论任意维数的空间中的曲线积分和曲面积分. 依本书作者们来看, 曲面上的积分的现代理论靠的是黎曼积分的概念, 后者必须在分析课程中进行系统的研究. 这里要证明经典的格林定理, 斯托克斯定理以及高斯–奥斯特洛格拉德斯基定理及其以向量分析公式的形式的标准的解释. 为了表明所采用的建立曲面积分理论的途径是可行的, 对于多维空间中的任意维数的逐片光滑的定向曲面, 证明了斯托克斯公式. 平行地, 建立了微分形式的初等理论以及多维曲面的面积的理论.

一系列重要的定理在书中是在 “模式化” 的情境下进行讨论的, 也就是说, 是在这样的个别情境之下进行讨论的, 此种情境原则上保留了一般情形下的一切最困难的方面, 但却能使叙述变得简捷. 多重积分的变量变换公式, 以及关于曲线积分和曲面积分的某些公式和定理都是这样来讨论的.

第十九章　多重积分

第一讲

§1. 二重黎曼积分作为沿着基的极限

二重积分是二元函数关于两个变数同时取的积分. 这不是定义, 我们只是指出打算怎样把定积分的概念推广到两个变数的函数的情形.

为了进行这样的推广, 我们回想一维情形时积分的定义, 即当函数 $y = f(x)$ 是定义在闭区间 $I = [a, b]$ 上的一个变数 x 的函数时, 它在 I 上的黎曼积分的定义. 此概念有若干彼此等价的定义, 其中之一可叙述如下.

定义 1 *有界函数 $f(x)$ 的积分 $\int_a^b f(x)dx$ 指的是由曲线 $y = f(x)$ 当 $x \in [a, b]$ 时组成的曲边梯形的面积的代数和. 这里, 展布在横轴之上的曲边梯形部分的面积冠以"+"号计入这个和, 而展布在横轴下方的部分则冠以"–"号.*

如果把曲边梯形的概念推广到给定在矩形 $P = I_1 \times I_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ 上的两个变数的函数 $z = g(x, y)$ 的情形, 那么就可以得到函数 $g(x, y)$ 沿矩形 P 的二重积分的一个定义. 这个积分记以符号

$$\iint\limits_P g(x,y)dxdy = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} g(x,y)dxdy.$$

先假设 $g(x, y) \geqslant 0$ 对于一切 $(x, y) \in P$ 成立. 代替曲边梯形而考虑空间图

形 H, 它包含在曲面 $z=g(x,y)$ 和平面 $z=0$ 之间, 对于 $(x,y)\in P$. 换言之, 图形 H 由一切这样的点 (x,y,z) 组成, 其坐标 $x\in I_1, y\in I_2$, 而第三个坐标 z 满足条件 $0\leqslant z\leqslant g(x,y)$.

定义 2 *称图形 H 为由曲面 $z=g(x,y)$ 产生的曲面柱形.*

如果这个图形是依某种方式 (依若尔当意义, 依勒贝格意义, 或者依其他什么意义) 可测, 则可把它的测度 $\mu(H)$ 作为二重积分的值的初始定义:

$$I=\iint\limits_P g(x,y)dxdy=\mu(H).$$

如果 μ 是若尔当测度, 则上面给出的二重积分的定义与下面给出的二重黎曼积分的定义等价. 可以就用这样的办法来处理函数 $g(x,y)$ 的取值可正可负的一般情形, 就如同在进一步证明曲面柱形的若尔当可测准则时所作的那样.

我们转来建立沿矩形 P 的二重黎曼积分的理论. 首先定义在一般情形下的柱形图形的概念.

定义 3 *图形 $H\subset\mathbb{R}^3$ 叫作是由给定在 P 上的曲面 $z=g(x,y)$ 产生的曲面柱形, 如果 H 是由全体这样的点 (x,y,z) 组成的, 其 $(x,y)\in P$, 而坐标 z 介于数 0 和 $g(x,y)$ 之间, 也就是说, 当 $g(x,y)\geqslant 0$ 时 $0\leqslant z\leqslant z(x,y)$, 而当 $g(x,y)<0$ 时 $g(x,y)\leqslant z\leqslant 0$.*

借助于平行于 Ox 轴和 Oy 轴的通过 Ox 轴上的分法 T_x 的分点 $a_1=x_0<x_1<\cdots<x_m=b_1$ 和通过 Oy 轴上的分法 T_y 的分点 $a_2=y_0<y_1<\cdots<y_n=b_2$ 的直线把矩形 P 划分成小矩形.

小矩形 $P_{k,l}\subset P$ 的点 (x,y) 满足条件

$$x\in\Delta_k^{(x)}=[x_{k-1},x_k], y\in\Delta_l^{(y)}=[y_{l-1},y_l],$$

其中 $\Delta_k^{(x)}$ 是分法 T_x 的第 k 个闭区间, 而 $\Delta_l^{(y)}$ 是分法 T_y 的第 l 个闭区间. 全体矩形 $P_{k,l}, k=1,\cdots,m, l=1,\cdots,n$, 所成的集合叫作矩形 P 的分法 T, $P_{k,l}$ 叫作矩形 P 的分法 T 的脚标为 (k,l) 的元素.

在每个矩形 $P_{k,l}$ 中取一个坐标为 $(\xi_{k,l},\theta_{k,l})$ 的点 $A_{k,l}$. 矩形 $P_{k,l}$ 和点 $A_{k,l}$ 所成的集合叫作矩形 P 的标码分法, 标记为 V.

显然, 每个标码分法 V 都单值地对应于矩形 P 的一个非标码分法T, 它是从 V 删除 "标码" 点 $(\xi_{k,l},\theta_{k,l})$ 所得的分法. 于是 $T=T(V)$.

我们看到, 分法 T 的元素, 矩形 $P_{k,l}$ 的面积等于 $\Delta x_k\Delta y_l=(x_k-x_{k-1})(y_l-y_{l-1})$.

定义 4 *代数和*

$$\sigma(V)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}g(\xi_{k,l},\theta_{k,l})\Delta x_k\Delta y_l$$

叫作函数 $g(x,y)$ 对应于标准矩形 P 的标码分法 V 的黎曼积分和.

我们把矩形 $P_{k,l}$ 的对角线的长度 $\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_l^2}$ 叫作它的**直径**.

定义 5 分法 T 的一切元素 $P_{x,l}$ 的直径的最大值叫作分法(标码分法 V 和非标码分法 T)的直径, 记作 Δ_V 或 Δ_T.

定义 6 数 I 叫作有界函数 $g(x,y)$ 沿矩形 P 的 (二重) 黎曼积分, 如果对于任何数 $\varepsilon>0$ 都存在数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对于矩形 P 的任意的标码分法 V, 只要 $\Delta_V<\delta$ 就成立不等式 $|\sigma(V)-I|<\varepsilon$.

这里 $\sigma(V)$ 是函数 $g(x,y)$ 对应于标码分法 V 的积分和. 因此, 最后的不等式也可写成:

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}g(\xi_{k,l},\theta_{k,l})\Delta x_k\Delta y_l-I\right|<\varepsilon.$$

在这种情况下, 我们说 $g(x,y)$ 是在矩形 P 上**黎曼可积的**.

考虑下述问题:

1) 确认积分 I 是沿着某个基的极限;

2) 定义达布上和与达布下和并证明二元函数可积的黎曼准则;

3) 建立二重积分与一重积分类似的性质.

从定义集合基 B 和 B' 开始. 把矩形的全体非标码分法的集合记作 A_P, 而全体标码分法的集合记作 A'_P. 取集合 $\{V|\Delta_V<\delta\}$ 即 A'_P 中那些直径 Δ_V 小于正数 δ 的全体元素的集合作为集 B' 的终端 b'_δ.

由于 $\sigma(V)$ 是在 A'_P 上定义的, 显然, 上面给出的二重积分的定义等价于沿着基 B' 的极限 $\lim\limits_{B'}\sigma(V)$ 的定义. 要验证此断言, 只需形式地把沿着基的定义写出来并将其与上面给出的定义进行比较就可以了. 下面用符号 $\Delta_V\to 0$ 来表示基 B'.

类似地定义关于一切非标码分法 A_P 的基 $\Delta_T\to 0$.

于是, 二重积分是沿着某个基的极限. 因此, 就可以谈及二重积分的唯一性, 可以使用在不等式中取极限的定理, 等等, 由此得到关于二重积分的各种类型的命题, 如其线性性质, 单调性, 等等. 下面将引入这样的一些自然的性质.

我们指出, 矩形 P 的非标码分法 T 也可以定义成由 Ox 轴上的闭区间 $[a_1,b_1]$ 的非标码分法 $T_x: a_1=x_0<x_1<\cdots<x_m=b_1$ 与 Oy 轴上的闭区间 $[a_2,b_2]$ 的非标码分法 $T_y: a_2=y_0<y_1<\cdots<y_n=b_2$ 构成的有序偶 (T_x,T_y). 此分法 T 由引 $m+1$ 条竖直线 $x=x_k, k=0,\cdots,m$ 以及 $n+1$ 条水平线 $y=y_l, l=0,\cdots,n$ 所得到. 还要指出, 若在标码分法 V 中弃去由点 $(\xi_{k,l},\theta_{k,l})\in P_{k,l}$ 组成的标码, 则显然产生一个非标码分法, 它以符号 $T=T(V)$ 标记.

定义 7 对应于同一个非标码分法 T_0 的标码分法的全体所成的集合记作 $A'_P(T_0)$, 即满足 $T(V)=T_0$ 的 V 之全体, 叫作 T_0 的标码集, 其元素叫作 T_0 的

标码.

§2. 达布和及其性质

现在转向构建沿矩形的二重黎曼积分的达布理论.

对于矩形 P 的某个未标码分法 T, 用 $M_{k,l}$ 和 $m_{k,l}$ 表示量

$$M_{k,l} = \sup_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x,y), m_{k,l} = \inf_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x,y).$$

把

$$S(T) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} M_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l$$

叫作函数 $g(x,y)$ 对应于分法 T 的**达布上和**, 而

$$s(T) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} m_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l$$

叫作函数 $g(x,y)$ 对应于分法 T 的**达布下和**. 把

$$\Omega(T) = S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l$$

叫作函数 $g(x,y)$ 对应于分法 T 的 ω- 和 (**欧米伽和**), 其中 $\omega_{k,l} = M_{k,l} - m_{k,l}$.

定义 8 把数 $I^* = \inf\limits_{T\in A_P} S(T)$ 叫作函数 $g(x,y)$ 沿矩形 P 的达布上积分, 而 $I_* = \sup\limits_{T\in A_P} s(T)$ 叫作函数 $g(x,y)$ 沿矩形 P 的达布下积分.

往下用得着达布和的下述性质.

引理 1 对于任意的标码分法 $V \in A'_P$ 有

$$s(T(V)) \leqslant \sigma(V) \leqslant S(T(V)).$$

引理 2 固定某分法 $T_0 \in A_P$. 下述关系式成立:

$$s(T_0) = \inf_{V\in A'_P(T_0)} \sigma(V), S(T_0) = \sup_{V\in A'_P(T_0)} \sigma(V).$$

引理 3 对于任意的非标码分法 T_1 和 T_2

$$s(T_1) \leqslant S(T_2).$$

引理 4 对于矩形 P 上的有界函数, 达布上积分 I^* 和下积分 I_* 都存在, 且对于任意的分法 $T \in A_P$ 成立不等式

$$s(T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(T).$$

引理 5 标码分法 V 属于终端 $b'_\delta \in B'$ 当且仅当 $T(V) \in b_\delta$.

这些引理的证明都与一维情况下相应的命题类似, 没有什么困难. 只说一说引理 3, 因为那里涉及两个不同的分法. 这时, 与一维情形一样我们引入分法加细的概念.

定义 9 非标码分法 T_2 叫作分法 T_1 的加细, 如果分法 T_2 是从分法 T_1 在 Ox 轴和 Oy 轴上添加有限个新的分点而得到的. 也说 T_2 跟随着 T_1, 记作 $T_2 \supset T_1$ 或 $T_1 \subset T_2$.

特别地, 任何非标码分法都是自己的加细. 还有, 很明显, 当分法 T 加细时, 达布下和 $s(T)$ 不减小而达布上和 $S(T)$ 不增加. 因此, 为证引理 3, 只需把分法 T_1 和 T_2 合起来作成它们共同的加细 T_3. 那么得

$$s(T_1) \leqslant s(T_3) \leqslant S(T_3) \leqslant S(T_2).$$

由此得 $s(T_1) \leqslant S(T_2)$, 就证明了引理 3 的断言.

还要指出, 引理 4 的结论本质上从引理 3 推出. 实际上, 如果作成由一切值 $s(T)$ 组成的集合 M_1 和由一切值 $S(T)$ 组成的集合 M_2, 那么引理 3 的结论表明任何一个元素 $a \in M_2$ 都是集合 M_1 的上界, 从而集合 M_1 的最小上界, 即 I_*, 不超过此元素 a. 因此,I_* 是集合 M_2 的下界. 但 I^* 依其定义为 M_2 的下确界, 所以 $I_* \leqslant I^*$. 结果对于任意的分法 $T \in A_P$,

$$s(T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(T).$$

引理 4 被证实.

引理 6 对于任意的分法 T 有 $\Omega(T) \geqslant I^* - I_*$.

实际上, 从引理 4 得到

$$\Omega(T) = S(T) - s(T) \geqslant I^* - I_*.$$

第二讲

§3. 矩形上的函数可积的黎曼准则

定理 1 (矩形上的函数可积的黎曼准则) 为使有界函数 $g(x,y)$ 在 $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ 上可积, 必要且充分的是下述等价的条件中的一个成立:

1) $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$;

2) $I^* = I_*$;

3) $\inf_{T} \Omega(T) = 0$.

▶ 先证明函数可积与条件 1) 等价.

必要性 设 $\lim_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = I$. 这表明, 对于任意的 $\varepsilon_1 > 0$, 找得到 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, 使得对于任意标码分法 V, 只要 $\Delta_V < \delta_1$, 就有 $|\sigma(V) - I| < \varepsilon_1$, 即

$$I - \varepsilon_1 < \sigma(V) < I + \varepsilon_1. \tag{*}$$

考虑任意的非标码分法 T 使 $\Delta_T < \delta_1$ 者. 对此分法有

$$s(T) = \inf_{V \in A_P(T)} \sigma(V), S(V) = \sup_{V \in A_P(T)} \sigma(V).$$

那么从不等式 (*) 推出

$$I - \varepsilon_1 \leqslant s(T) \leqslant I + \varepsilon_1, I - \varepsilon_1 \leqslant S(T) \leqslant I + \varepsilon_1.$$

因此, 值 $s(T)$ 和 $S(T)$ 位于同一个长度为 $2\varepsilon_1$ 的闭区间 $[I - \varepsilon_1, I + \varepsilon_1]$ 中. 于是

$$\Omega(T) = S(T) - s(T) \leqslant 2\varepsilon_1.$$

如果取 $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{3}, \delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon_1)$, 那么就得到, 对于任意的分法 T, 只要 $\Delta_T < \delta$ 就有 $\Omega(T) < \varepsilon$. 这就证明了 $\lim_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$. 必要性证毕.

充分性 要证从条件 $\lim_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$ 推出极限 $\lim_{\Delta_V \to 0} \sigma(V)$ 存在.

先验证 $I_* = I^*$. 从引理 6 知, 对于任意的分法 $T \in A_P$ 有

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant \Omega(T).$$

从而当 $\Delta_T \to 0$ 时 $I^* - I_* \to 0$, 但 $I^* - I_*$ 是常数, 所以必是零, 即 $I_* = I^* = I$. 剩下的是证明当 $\Delta_V \to 0$ 时 $\sigma(V) \to I$. 任意取一个正数 ε_1. 由 $\lim_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$ 知, 存在数 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$, 使得只要分法 T 满足 $\Delta_T < \delta_1$, 就成立不等式 $\Omega(T) < \varepsilon_1$. 于是对这样的分法 T 的任何标码分法 V 成立

$$s(T(V)) \leqslant \sigma(V) \leqslant S(T(V)), s(T(V)) \leqslant I_* = I = I^* \leqslant S(T(V)),$$
$$S(T(V)) - s(T(V)) = \Omega(T) < \varepsilon_1.$$

所以, $\sigma(V)$ 和 I 这两个数都属于闭区间 $[s(T(V)), S(T(V))]$, 而此区间之长度小于 ε_1. 因此, $|\sigma(V) - I| < \varepsilon_1$. 所以 $\lim_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = I$. 充分性证毕.

于是定理的条件 1 与函数的黎曼可积等价.

现证明条件 1,2,3 彼此等价. 为此我们来验证下面的命题链:

$$1) \underset{a)}{\Rightarrow} 2) \underset{b)}{\Rightarrow} 3) \underset{c)}{\Rightarrow} 1).$$

a) 我们要证, 若 $\lim\limits_{\Delta_T\to 0}\Omega(T)=0$ 则 $I_*=I^*$. 而此事在证明条件 1 的充分性时已经证实.

b) 先证

$$\inf_T \Omega(T) = I^* - I_*.$$

从引理 6 推出, 数 I^*-I_* 是 $\{\Omega(T)\}$ 的下界. 我们来证它是下确界. 为此, 任取 $\varepsilon>0$. 根据达布和的定义, 存在分法 T_1 和 T_2 使

$$S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}, s(T_2) > I_* - \frac{\varepsilon}{2}.$$

取分法 $T_3 = T_1 \cup T_2$. 得

$$S(T_3) \leqslant S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2},$$
$$s(T_3) \geqslant s(T_2) > I_* - \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此得 $\Omega(T_3) < I^* - I_* + \varepsilon$. 从而 $I^* - I_* = \inf\limits_T \Omega(T)$. 于是从条件 2 得

$$\inf_T \Omega(T) = 0.$$

证得条件 2) 蕴含条件 3).

c) 要证若 $\inf\limits_T \Omega(T)=0$, 则 $\lim\limits_{\Delta_T\to 0}\Omega(T)=0$.

对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在分法 T_1 使得 $\Omega(T_1)<\frac{\varepsilon}{2}$. 分法 T_1 对应于关于轴 Ox 和 Oy 的分法的有序偶 $(T_1(x), T_1(y))$. 用 g 代表分法 $T_1(x), T_1(y)$ 的分点总数①.

由于 $g(x,y)$ 在 P 上有界, 所以存在 $M>0$, 使得对于一切 $(x,y)\in P$ 有 $|g(x,y)|<M$. 用 d 表示矩形 P 的大边的长度. 令 $\delta = \frac{\varepsilon}{4gdM}$.

任取满足条件 $\Delta_T<\delta$ 的分法 $T=(T(x),T(y))$. 那么对于分法 $T_2 = T\cup T_1$, 因为它是 T_1 的加细, 所以有

$$\Omega(T_2) \leqslant \Omega(T_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

我们来对 $\Omega(T)$ 做上方估计. 我们有

$$\Omega(T) = \Omega(T_2) + \alpha(T, T_1).$$

①如果用 g 代表 T_1 分成的矩形总数, 则下面的论述可简化许多 —— 译者注.

这里 $\alpha(T,T_1)\geqslant 0$, 因为 $T_2\supset T$ 蕴含 $\Omega(T_2)\leqslant\Omega(T)$. 此外

$$\alpha(T,T_1)=\sum_{(k,l)}\sum(\omega_{k,l}\Delta x_k\Delta y_l-\omega'_{k,l}\Delta x'_k\Delta y'_l-\cdots-\omega^{(r)}_{k,l}\Delta x^{(r)}_k\Delta y^{(r)}_l)$$
$$\leqslant\sum_{(k,l)}\sum\omega_{k,l}\Delta x_k\Delta y_l,$$

其中记号 $\sum\limits_{(k,l)}\sum$ 表示仅对于分法 T 的矩形 $P_{k,l}$ 经分法 T_1 被分成了带 "′" 的标号的小矩形的那些指标 (k,l) 进行求和. 换言之, 求和的指标 (k,l) 满足这样的条件: 在 $\Delta^{(x)}_k$ 或 $\Delta^{(y)}_l$ 内至少有分法 $T_1(x)$ 或分法 $T_1(y)$ 的一个分点.

只要估计量 $\alpha(T,T_1)$. 我们认为记号 $\sum\limits_{(k)}\sum\limits_{l}$ 表示求和是关于具有如下性质的 (k,l) 进行的: 在 $\Delta^{(x)}_k$ 的内部含有分法 $T_1(x)$ 的至少一个点, 而 l 取遍一切以分法 T 确定的值. 类似地定义记号 $\sum\limits_{k}\sum\limits_{(l)}$. 进行估计时用到下述不等式:

$$\omega_{k,l}\leqslant 2M,\Delta x_k<\delta,\Delta y_l<\delta,\sum_k\Delta x_k<d,\sum_l\Delta y_l<d.$$

于是

$$\alpha(T,T_1)\leqslant\sum_{(k)}\sum_{l}\omega_{k,l}\Delta x_k\Delta y_l\leqslant\sum_{(k)}\sum_{l}\omega_{k,l}\Delta x_k\Delta y_l+\sum_{k}\sum_{(l)}\omega_{k,l}\Delta x_k\Delta y_l$$
$$\leqslant 2M\delta\left(\sum_{(k)}\left(\sum_l\Delta y_l\right)+\sum_{(l)}\left(\sum_k\Delta x_k\right)\right)$$
$$\leqslant 2M\delta d\left(\sum_{(k)}1+\sum_{(l)}1\right)\leqslant 2M\delta dg\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

结果

$$\Omega(T)=\Omega(T_2)+\alpha(T,T_1)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

结论 c) 证毕.

定理 1 完全获证. ◄

§4. 矩形上的函数可积的特殊准则

设 T_n 是矩形 P 的对应于闭区间 $[a_1,b_1]$ 的 n 等分以及闭区间 $[a_2,b_2]$ 的 n 等分的分法, 那么分法 T_n 由 n^2 个彼此相等的 n^2 个矩形组成. 对应于分法 T_n 的达布上、下和分别记作 S_n 和 s_n,ω 和记作 Ω_n.

定理 2 矩形 R 上的有界函数可积的准则是

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = 0.$$

► 条件的必要性从上节的定理 1 得到, 因为 $\lim\limits_{\Delta_T\to 0} \Omega(T) = 0$ 蕴含着 $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = 0$.

充分性. 对于任意的分法 T

$$s(T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(T),$$

所以

$$s_n \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_n.$$

由此得到

$$\Omega_n = S_n - s_n \geqslant I^* - I_* \geqslant 0.$$

然而 $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = 0$, 所以 $I^* = I_* = I$. 根据 §3 定理 1 的条件 2), 由此得知所考虑的函数黎曼可积. ◄

下述定理是上节定理 1 的补充和细化.

定理 3 有界函数在矩形上可积的必要且充分的条件是下述等价条件之一成立:

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = 0$;

5) $\inf\limits_{n} \Omega_n = 0$.

► 根据定理 1 和定理 2, 成立如下蕴含关系链:

$$5) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5). \quad ◄$$

本节的结论对于计算是有意义的. 从本节的结论知. 只要考虑一个分法序列 $\{T_n\}$ 就够了.

根据定理 3, 对于相应于未标码分法 T_n 的任意的标码分法 V_n, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(V_n) = I$, 且用 $\sigma(V_n)$ 代替 I 的误差不超过 Ω_n, 即 $|\sigma(V_n) - I| \leqslant \Omega_n$.

其实, 成立更一般的结论: 对于任意的标码分法 V 以及 $T = T(V)$, 有

$$|\sigma(V) - I| \leqslant \Omega(T(V)).$$

实际上, 成立不等式

$$s(T(V)) \leqslant \sigma(V) \leqslant S(T(V)), s(T(V)) \leqslant I \leqslant S(T(V)).$$

这表明在闭区间 $[s(T(V)), S(T(V))]$ 含有两个数 $\sigma(V)$ 和 I, 而区间之长度为 $S(T(V)) - s(T(V)) = \Omega(T(V))$. 所以

$$|\sigma(V) - I| \leqslant \Omega(T(V)),$$

这就是上面所断言的不等式.

第三讲

§5. 曲面柱形的若尔当可测性

回想一下与三维图形的若尔当可测性概念相关的定义.

定义 10 图形 P 叫作是最简单的, 如果它是有限个标准平行六面体的并. 各边分别与各坐标平面平行的平行六面体叫作标准平行六面体.

用 $\Pi = \Pi_3$ 代表空间 $\mathbb{R}^3$ 中全体最简单图形所成的集合.

显然, 简单图形的若尔当测度 (或体积) 乃是此图形分解成的那些开的互不相交的标准平行六面体的体积之和.

定义 11 一切包含有界图形 F 的简单图形的体积的下确界叫作 F 的若尔当上测度, 记作 $\mu^*(F)$, 即

$$\mu^*(F) = \inf_{P\in\Pi, F\subset P} \mu(P).$$

类似地, 称

$$\mu_*(F) = \sup_{P\in\Pi, F\supset P} \mu(P)$$

叫作图形 F 的若尔当下测度

如果 $\mu_*(F) = \mu^*(F)$, 则图形 F 叫作是若尔当可测的, 且其若尔当测度 (体积) 等于 $\mu(F) = \mu_*(F) = \mu^*(F)$.

我们指出, 平面的任意有界的部分的体积总是零.

回忆一下图形 F 若尔当可测准则. 用 ∂F 代表图形 F 的边界, 即 $\mathbb{R}^3$ 中那些既不是 F 的内点又不是 F 的外点的点的集合.

定理 4 有界图形 F 若尔当可测的充分必要条件是它的边界的若尔当测度 $\mu(\partial(F))$ 等于零.

我们不叙述此准则之证明, 因为它与二维情形时的准则的证明没什么不同. 我们仅指出量 $\mu(F)$ 的四个性质.

1° 若 F 和 G 皆可测, 则 $F\cup G$ 与 $F\cap G$ 也可测.

2° 若 F 与 G 不相交, 则 $\mu(F\cup G) = \mu(F) + \mu(G)$(**加性**)

3° 若 $F\subset G$, 则 $\mu(F) \leqslant \mu(G)$(**单调性**).

4° 图形 F 的平移和旋转不改变此图形的测度值(**不变性**).

定理 5 矩形 P 上的有界函数 $g(x,y)$ 可积的充分必要条件是由曲面 $z=g(x,y)$ 产生的曲面柱形 F 是若尔当可测的.

▶ 必要性 设函数 $g(x,y)$ 在 P 上可积. 要证图形 F 可测. 此图形的边界由六个曲面组成:

$$\partial F = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5 \cup H_6,$$

其中 $H_1,\cdots,H_5$ 是图形 F 的边界中与坐标平面平行的平面的一部分, 而 H_6 是曲面

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in P, z=g(x,y)\}.$$

我们看到 $\mu(\partial H_1)=\cdots=\mu(\partial H_5)=0$, 因为平面的任何有限部分的体积都是零.

从函数 $g(x,y)$ 黎曼可积的准则知, $\inf\limits_{T}\Omega(T)=0$. 因此对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在分法 T, 使得不等式 $\Omega(T)<\varepsilon$ 成立. 对于这个分法 T, 我们考虑简单图形 D, 它是相应于矩形 P 的分法 T 的闭的平行六面体 $D_{k,l}$ 的并集,$D_{k,l}=\{(x,y,z):(x,y)\in P_{k,l}, m_{k,l}\leqslant z\leqslant M_{k,l}\}\left(\text{我们记得}, m_{k,l}=\inf\limits_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x,y), M_{k,l}=\sup\limits_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x,y)\right)$.

那么, 图形 D 显然包含 H_6. 还有 $\mu(D)=\Omega(T)<\varepsilon$. 于是得到 $H^*(H_6)<\varepsilon$. 根据 $\varepsilon>0$ 的任意性, 这就表明 $\mu(H_6)=0$. 由此推出 $\mu(\partial(F))=0$. 于是根据可测准则, 图形 F 若尔当可测. 必要性证完.

充分性 设图形 F 可测. 由可测准则得 $\mu(\partial F)=0$. 这表明, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在图形 $D\in\Pi$ 使得 $H_6\subset D$ 且 $\mu(D)<\varepsilon$. 图形 D 是某些闭的标准平行六面体 D_r 的并集, $r=1,\cdots,t$.

可以认为, 图形 D 在平面 $z=0$ 上的投影与 P 重合. 如果不是这样, 则可代替 D 而取它与无穷柱体 $\{(x,y,z)|(x,y)\in P\}$ 的交.

全体长方体 $D_r, r=1,\cdots,t$, 在平面 $z=0$ 上的投影给出了矩形 P 中的一组矩形 $\{Q_r|r=1,\cdots,t\}$. 这里 Q_r 是 D_r 在平面 $z=0$ 上的投影.

把每个矩形 Q_r 的边延长到与矩形 P 的边相交为止, 这样就得到矩形 P 的一个分法, 分成的小矩形记作 $P_{k,l}$.

对于每点 $(x,y)\in P_{k,l}$ 有

$$(x,y,m_{k,l})\in D,\quad (x,y,M_{k,l})\in D,$$

其中 $m_{k,l}=\inf\limits_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x,y), M_{k,l}=\sup\limits_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x,y)$. 此断言之成立是因为 $H_6\subset D$.

用 $D_{k,l}$ 代表下述条件决定的长方体:

$$(x,y)\in P_{k,l},\quad m_{k,l}\leqslant z\leqslant M_{k,l}.$$

设 D_0 是全体这样的长方体的并集. 那么,$D_0\subset D$ 且 $\mu(D_0)\leqslant\mu(D)<\varepsilon$. 由此得 $\mu(D_0)=\Omega(T)<\varepsilon$. 结果 $\inf\limits_{T}\Omega(T)=0$. 从而 $g(x,y)$ 在 P 上可积. ◀

§6. 沿有界的若尔当可测区域的二重黎曼积分的概念

为了进一步的研究我们还需要引入沿着一个集合基的极限的概念.

考虑定义在有界的约定可测的区域 D 上的函数 $g(x,y)$.

定义 12 称满足下述条件的若尔当可测集 $D_1,\cdots,D_t$ 的有限组 τ 为区域 D 的一个分法:

1) $D_1\cup\cdots\cup D_t=D$;

2) 对于一切 $m,n\leqslant t$, 当 $m\neq n$ 时 $\mu(D_m\cap D_n)=0$.

一切分法 τ 的集合用记号 A_D 代表.

定义 13 称 $\sup\limits_{a,b\in D}\rho(a,b)$ 为集合 D 的直径, 记作 $d(D)$, 其中 $\rho(a,b)$ 代表点 a 和 b 之间的距离.

称 $\Delta_\tau=\max\limits_{1\leqslant n\leqslant t}d(D_n)$ 为区域 D 的分法 $\tau=\{D_n|n=1,\cdots,t\}$ 的直径.

设 $a_s\in D_s, 1\leqslant s\leqslant t$. 称 $\{a_1,\cdots,a_t\}$ 为分法 τ 的一个标码. 分法 τ 连同一个标码合起来叫作标码分法.

全体标码分法所成的集合记作 A'_D.

定义 14 设标码分法 β 由非标码分法 $\tau=\{D_n|n=1,\cdots,t\}$ 及标码 $\{a_n=(x_n,y_n)\in D_n|n=1,\cdots,t\}$ 组成. 称

$$\sigma(\beta)=\sum_{n=1}^{t}g(a_n)\mu(D_n)$$

为标码分法 β 的积分和.

定义 15 设有数 I 满足条件: 对于任意的 $\varepsilon>0$ 存在数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得只要标码分法 β 的直径 (即 β 对应的非标码分法 τ 的直径)$\Delta_\beta<\delta$, 就有 $|\sigma(\beta)-I|<\varepsilon$. 则称 I 为函数 $g(x,y)$ 沿区域 D 的二重黎曼积分.

沿区域 D 的二重积分可以看作是沿着基的极限. 用记号 $\Delta_\beta\to 0$ 来代表这个基; 它由终端 $b'_\delta\subset A'_D$ 组成,b'_δ 由条件

$$b'_\delta=\{\beta\in A'_D|\Delta_\beta<\delta\}$$

确定. 显然, 函数 $\sigma(\beta)=\sum\limits_{n=1}^{t}g(a_n)\mu(D_n)$ 定义在集合 A'_D 上, 而它沿着基 $\Delta_\beta\to 0$ 的极限就是沿着区域 D 的二重积分.

设 $m_n=\inf\limits_{a\in D_n}g(a), M_n=\sup\limits_{a\in D_n}g(a), \omega_n=M_n-m_n$. 那么我们就用下面的两个式子:

$$S(\tau)=\sum_{n=1}^{t}M_n\mu(D_n),\quad s(\tau)=\sum_{n=1}^{t}m_n\mu(D_n)$$

来分别定义达布上和与达布下和, 并用表达式 $\Omega(\tau)=\sum_{n=1}^{t}\omega_n\mu(D_n)$ 来定义 $\omega-$ 和.

我们还要给出有界函数 $g(x,y)$ 沿有界的约定可测区域 D 的多重积分的一个定义.

设对于某矩形 P 有 $D\subset P$. 补充定义函数 $g(x,y)$ 到整个矩形上, 令

$$g_0(x,y)=\begin{cases}g(x,y), & 若(x,y)\in D,\\ 0, & 若(x,y)\in P\setminus D.\end{cases}$$

定义 16 *若函数 $g_0(x,y)$ 在矩形 P 上黎曼可积, 则 $g_0(x,y)$ 在 P 上的二重积分 J 叫作函数 $g(x,y)$ 在集合 D 上的二重黎曼积分, 即定义*

$$\iint\limits_D g(x,y)dxdy=J=\iint\limits_P g_0(x,y)dxdy.$$

乍看起来, 可能觉得积分 I 的概念与积分 J 的概念相比较, 扩大了可积函数类. 但实际上并不如此.

定理 6 *二重积分 I 存在的必要且充分的条件是积分 J 存在, 且此时 $I=J$.*

▶ 我们指出, 可以把达布理论和可积准则搬到定义 15 规定的二重积分的情形.

1. 设沿矩形 P 的积分 J 存在. 那么根据可积准则 $\left(\inf\limits_T\Omega(T)=0\right)$, 对于任何 $\varepsilon>0$ 都找得到 P 的分法 T, 使得 $\Omega(T)<\varepsilon$, 此处 T 由矩形 $P_{k,l}$ 组成. 取 $D_{k,l}=D\cap P_{k,l}$. 那么得到集合 D 的分法 τ. 函数 $g(x,y)$ 在集合 $D_{k,l}$ 上的振幅不超过它在 $P_{k,l}$ 上的振幅. 因此 $\Omega(\tau)\leqslant\Omega(T)<\varepsilon$. 所以, 根据可积准则, 积分 I 存在.

类似地可以得到不等式 $S(\tau)\leqslant S(T)$, 所以 $I^*\leqslant S(T), I^*\leqslant J^*, I=I^*\leqslant J^*=J$. 从对于达布下和的类似的不等式推出 $s(\tau)\geqslant s(T), I=I_*\geqslant J_*=J$. 从这些不等式推出 $I=J$. 必要性证毕.

2. 设存在沿有界可测集 D 的积分 I. 要证的是存在函数 $g_0(x,y)$ 沿矩形 P 的积分 $J, P\supset D$. 由可积准则推出, 存在分法 $\tau=\{D_1,\cdots,D_t\}$ 使得 $\Omega(\tau)<\varepsilon$. 对于每个 $r\in\{1,\cdots,t\}$, 集合 D_r 可测, 因此 $\mu(\partial D_r)=0$(这里 μ 是平面上的若尔当测度 ——译者注). 因此存在由矩形 $P_{k,l}$ 组成的最简单的图形 F, 使得 $F\supset\bigcup\limits_{r=1}^{t}\partial D_r$ 并且

全部这些 $P_{k,l}$ 的面积之和小于 ε.

把 F 的边界的直线段延长到与矩形 P 的边相交为止. 这样就得到 P 的一个分法 T. 把 $\omega-$ 和 $\Omega(T)$ 分成两部分, 一部分由组成 F 的那些矩形的被加项作成, 记为 ω_2, 另一部分则为 ω_1. 那么

$$\omega_1\leqslant\Omega(\tau)<\varepsilon,$$

$$\omega_2\leqslant 2M\mu(F)<2M\varepsilon.$$

因此

$$\Omega(T) = \omega_1 + \omega_2 < (2M+1)\varepsilon.$$

由此, 根据函数沿矩形可积的准则, 积分 J 存在.

类似地对于达布上和进行讨论, 得不等式

$$S(T) - 2M\varepsilon \leqslant S(\tau).$$

因此 $J \leqslant I + 2M\varepsilon$. 根据正数 ε 之选取的任意性, 由此得到 $J \leqslant I$. 由对于达布下和的估计得到反向的不等式 $J \geqslant I$. 于是 $J = I$. ◀

从黎曼积分定义的等价性看到, 在建立理论时可以仅限于考虑正方形 $K \supset D$ 以及将 Kn^2 等分的分法的情形. 此时, 可积函数类与其他各种定义方式所得完全一样. 但是这样构建理论时也有一个不方便的地方, 那就是两正方形的交不必还是正方形. 所以我们还是限于考虑矩形的情形.

第四讲

§7. 二重积分的基本性质

我们来考察二重积分的性质, 而在与单重积分的性质出现本质的不同时予以证明.

设 $D, D_1, D_2, \cdots$ 是若尔当可测集, 并且函数 $g(x,y), g_1(x,y), g_2(x,y)$ 在所考虑的集合上黎曼可积. 那么下述性质成立.

1° 成立等式(**线性性质**)

a) $\iint\limits_D (g_1(x,y) + g_2(x,y))dxdy = \iint\limits_D g_1(x,y)dxdy + \iint\limits_D g_2(x,y)dxdy$;

b) $\iint\limits_D cg(x,y)dxdy = c\iint\limits_D g(x,y)dxdy \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

2° 设函数 g_1 和 g_2 都在 D 上可积, 则 g_1g_2 也在 D 上可积.

3° 设在 D 上成立不等式 $g_1(x,y) \leqslant g_2(x,y)$. 此时:

a) $\iint\limits_D g_1(x,y)dxdy \leqslant \iint\limits_D g_2(x,y)dxdy$(**单调性**).

b) 设 $|g(x,y)|$ 也在 D 上可积. 则

$$\left|\iint\limits_D g(x,y)dxdy\right| \leqslant \iint\limits_D |g(x,y)|dxdy.$$

c) 设 $f(x,y) \geqslant 0, m = \inf\limits_D g(x,y), M = \sup\limits_D g(x,y)$. 那么存在数 $c, m \leqslant c \leqslant M$, 使

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)dxdy \quad \text{(中值定理)}.$$

4° $\iint\limits_D 1dxdy = \mu(D)$.

这个结论从若尔当测度的定义与二重积分的定义的等价性推出.

5° 若 $\mu(D) = 0$, 则 $\iint\limits_D g(x,y)dxdy = 0$ 对于任意的在 D 上有界的函数 $g(x,y)$ 都成立.

► 由于函数 $g(x,y)$ 在集合 D 上有界, 所有存在数 $M > 0$, 使得对于一切 $(x,y) \in D$, 成立不等式 $|g(x,y)| \leqslant M$. 从性质 3°,1° 和 4° 得到

$$\left|\iint\limits_D g(x,y)dxdy\right| \leqslant \iint\limits_D |g(x,y)|dxdy \leqslant M\iint\limits_D dxdy = M\mu(D) = 0. \quad ◄$$

6° 设区域 D_1 和 D_2 无公共内点. 那么

$$\iint\limits_{D_1} g(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} g(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1\bigcup D_2} g(x,y)dxdy$$

(积分作为积分区域的泛函的可加性).

► 设 标准矩形 P 包含 D_1 和 D_2. 那么根据定义

$$\iint\limits_{D_1} g(x,y)dxdy = \iint\limits_P g_1(x,y)dxdy, \iint\limits_{D_2} g(x,y)dxdy = \iint\limits_P g_2(x,y)dxdy,$$

其中

$$g_1(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & \text{若}(x,y) \in D_1, \\ 0, & \text{若}(x,y) \in P \setminus D_1, \end{cases}$$

$$g_2(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & \text{若}(x,y) \in D_2, \\ 0, & \text{若}(x,y) \in P \setminus D_2. \end{cases}$$

由此, 根据积分的线性性质得

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{D_1} g(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} g(x,y)dxdy \\
&= \iint\limits_P g_1(x,y)dxdy + \iint\limits_P g_2(x,y)dxdy \\
&= \iint\limits_P (g_1(x,y) + g_2(x,y))dxdy = \iint\limits_{D_1\bigcup D_2} g(x,y)dxdy. \quad ◄
\end{aligned}$$

§8. 二重积分转化为累次积分

我们建立一个关于二重积分与累次积分相等的定理.

定理 7 设函数 $g(x,y)$ 在矩形 $P = I_1 \times I_2$ 上可积,$I_1 = [a_1,b_1], I_2 = [a_2,b_2]$. 还设对于每个值 $x \in I_1$, 函数 $f(y) = f_x(y) = g(x,y)$ 作为一个变元 y 的函数在闭区间 I_2 上关于 y 可积, 且 $h(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(y)dy$. 那么成立公式

$$A = \iint\limits_P g(x,y)dxdy = \int_{a_1}^{b_1} h(x)dx$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} g(x,y)dy\right) dx,$$

即二重积分等于累次积分.

► 对于矩形 P 的任意的分法 $T = T_P = \{P_{k,l} | k = 1,\cdots,m, l = 1,\cdots,n\}$, 成立不等式 $m_{k,l} \leqslant g(x,y) \leqslant M_{k,l}$, 其中 $(x,y) \in P_{k,l}$, 且 $m_{k,l}$ 和 $M_{k,l}$ 依通常的方式定义,$k = 1,\cdots,m, l = 1,\cdots,n$.

对于固定的 $x = \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ 可以关于 y 从 y_{l-1} 到 y_l 遍积分此不等式得

$$m_{k,l}\Delta y_l \leqslant \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(\xi_k, y)dy \leqslant M_{k,l}\Delta y_l.$$

对此不等式关于 l 求和得

$$\sum_{l=1}^{n} m_{k,l}\Delta y_l \leqslant \int_{a_2}^{b_2} g(\xi_k,y)dy = h(\xi_k) \leqslant \sum_{l=1}^{n} M_{k,l}\Delta y_l.$$

遍乘此式以 Δx_k 然后对 k 求和, 得

$$s(T) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} m_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l \leqslant \sum_{k=1}^{m} h(\xi_k)\Delta x_k = \sigma(V(x))$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} M_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l = S(T),$$

其中 $V(x) = \{x_0 = a_1 < x_1 < \cdots < x_m = b_1; \xi_1, \cdots, \xi_m\}$ 是闭区间 I_1 的标码分法. 此外,$s(T) \leqslant A \leqslant S(T)$.

分法 $T = (T(x), T(y))$ 是沿 Ox 轴的分法 $T(x)$ 和沿 Oy 轴的分法 $T(y)$ 的有序偶.

由于函数 $g(x,y)$ 在 P 上可积, 所以对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得只要分法 T 满足 $\Delta_T < \delta$, 就有 $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

此时 $|\sigma(V(x)) - A| \leqslant S(T) - s(T) < \varepsilon$. 此式对于 I_1 的一切满足 $\Delta_{V(x)} < \delta$ 的标码分法都成立, 所以成立等式

$$A = \lim_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = \int_{a_1}^{b_1} h(x)dx. \quad ◀$$

沿任意的可测集 D 积分的情况与上面所考察的情况没有多大差别. 设矩形 P 包含 D. 那么根据定义有

$$A = \iint\limits_D g(x,y)dxdy = \iint\limits_P g_0(x,y)dxdy,$$

其中 g_0 在集合 D 上与函数 g 重合, 而在 D 之外 $g_0 = 0$.

用 $E(x)$ 代表使 $(x,y) \in D$ 的点 y 的集合. 设 $E(x)$ 由有限个闭区间 $[\varphi_1(x), \psi_1(x)], \cdots, [\varphi_t(x), \psi_t(x)]$ 组成①. 那么若 $h(x) = \int_{a_2}^{b_2} g_0 dy$, 则

$$A = \int_{a_1}^{b_1} h(x)dx,$$

其中

$$h(x) = \int_{a_2}^{b_2} g_0(x,y)dy = \sum_{r=1}^{t} \int_{\varphi_r(x)}^{\psi_r(x)} g(x,y)dy.$$

因此, 成立公式

$$A = \sum_{r=1}^{t} \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{\varphi_r(x)}^{\psi_r(x)} g(x,y)dy,$$

它推广了定理 7 的结论②.

§9. 可测集上的连续函数的可积性

下述断言成立.

定理 8 设函数 $g(x,y)$ 在矩形 P 上连续, 则 $g(x,y)$ 在 P 上可积.

► 矩形 P 是紧致的. 因此, 函数 $g(x,y)$ 在 P 上一致连续. 换言之, 对于任意的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在数 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ 使得对于任意的满足条件 $\Delta_T < \delta_1$ 的分法 T 有 $\omega_{k,l} = M_{k,l} - m_{k,l} < \varepsilon_1$. 因此,

$$\Omega(T) \leqslant \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \omega_{k,l}\mu(P_{k,l}) \leqslant \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \mu(P_{k,l}) = \varepsilon_1 \mu(P).$$

①这里还应该指出, 作为假设, t 是与 x 无关的正整数 —— 译者注.

②此结论可由定理 7 的结论推出, 它们等价 —— 译者注.

任取 $\varepsilon > 0$ 且令 $\varepsilon_1 = \varepsilon/\mu(P)$. 那么对于任意的满足条件 $\Delta_T < \delta_1\left(\dfrac{\varepsilon}{\mu(P)}\right)$ 的分法 T 得到 $\Omega(T) < \varepsilon$. 这表明 $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$, 即函数 $g(x, y)$ 在 P 上可积. ◄

定理 9 设函数 $g(x, y)$ 在有界的可测集 D 上有界且连续. 那么 $g(x, y)$ 在 D 上可积.

我们来证明一个更一般的定理, 它蕴含定理 9[①].

定理 10 设函数 $g(x, y)$ 在有界的闭的可测集 D 上有界且在集合 D 的除去一个测度为零的子集 $D_1, \mu(D_1) = 0$, 外的每点处都连续. 那么 $g(x, y)$ 在 D 上可积[②].

► 任意固定 $\varepsilon > 0$. 由于集合 D 可测, 所以存在闭的简单图形 $F \subset D$, 使得 $\mu(D \setminus F) < \varepsilon$. 同时存在开的简单图形 $F_1 \supset D_1$, 使 $\mu(F_1) < \varepsilon$. 于是简单图形 $F_2 = F \setminus F_1$ 是闭的且 $\mu(D \setminus F_2) < 2\varepsilon$.

函数 $g(x, y)$ 在紧集 F_2 上连续, 所以在 F_2 上一致连续[③], 因此存在 F_2 的直径充分小的分法 T, 使 g 的相应于此分法的 ω 和 $\Omega(T) < \varepsilon$.

对这个分法 T 添加图形 $D_0 = D \setminus F_2$ 使之成为 D 的分法 τ. 那么在和 $\Omega(\tau)$ 中仅比 $\Omega(T)$ 加入了一项 $(M_0 - m_0)\mu(D_0)$, 其中 $m_0 = \inf\limits_{D_0} g(x, y), M_0 = \sup\limits_{D_0} g(x, y)$. 因此

$$\Omega(\tau) < \varepsilon + (M_0 - m_0)2\varepsilon = \varepsilon(2M_0 - 2m_0 + 1).$$

由此推出对于集合 D 的分法 τ 取下确界有 $\inf\limits_{\tau} \Omega(\tau) = 0$. 这表明函数 $g(x, y)$ 在 D 上可积. ◄

第五讲

§10. 多重积分

前面, 二重积分被定义为沿着基 $\Delta_V \to 0$(或在集合 D 上沿着基 $\Delta_\beta \to 0$) 的极限, 其中 V 和 β 分别是矩形 P 和集合 D 的标码分法.

这个定义可以逐字逐句地搬到多变数的函数的情形. 譬如说, 在积分 I 的定义中, 把函数 $g(x, y)$ 改换成函数 $g(\bar{x}) = g(x_1, \cdots, x_n), n \geqslant 2$, 而把区域 $D, D_1, \cdots, D_t$ 认为是 n 维的, 那么, 由于若尔当可测性早已对于任意的 $n \geqslant 1$ 作过定义, 于是沿着

[①]其实, 定理 9 与定理 10 等价 —— 译者注.
[②]定理 10 和定理 9 的条件, D 的有界性均是译者添加的 —— 译者注.
[③]原文此处为 "从定理 1 推出它在 F_2 上可积", 实乃欲证之事 —— 译者注.

$\mathbb{R}^n$ 中的有界的若尔当可测集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 的 n 重积分的定义就作成了. 对于这个积分我们引用下面的记号:

$$I = \int \cdots \int_D g(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int \cdots \int_D g(\bar{x}) d\mu.$$

我们不再对于一般情形引入细节, 而只对 $n=2$ 和 $n=3$ 的情形进行讨论, 此时积分 I 常被写成:

$$I = \iint_D g(x,y)dS, \quad I = \iiint_D g(x,y,z)dV.$$

对于 $n=2$ 的情形所证明的全部事实, 可搬到 $n \geqslant 2$ 的一般情形而在证明中不必作任何原则的改变. 我们指出, 函数可积的各种形式的准则, 以及二重积分的性质 1°—7° 都是如此.

我们引述一个把 n 重积分转化为 $n-1$ 重积分的定理. 我们限于 $n=3$ 的情形.

定理 11 a) *设函数 $g(x,y,z)$ 在矩形 $P = I_1 \times I_2 \times I_3$ 上有三重积分 A. 还设在矩形 $Q = I_2 \times I_3$ 上有二重积分 $h(x) = \iint_Q g(x,y,z)dydz$. 那么函数 $h(x)$ 在闭区间 I_1 上可积且成立等式*

$$A = \int_{I_1} h(x)dx.$$

b) *设 $D \subset P = I_1 \times I_2 \times I_3$. 设对于固定的 $x \in I_1$ 记号 $D(x)$ 代表集合 $\{(y,z) \in I_2 \times I_3 | (x,y,z) \in D\}$ (即 $D(x)$ 是集合 D 与第一坐标固定为 x 的点所成的平面的交集), 并设 $D(x)$ 是二维的若尔当可测的区域. 还设对于每个 $x \in I_1$, 积分*

$$h(x) = \iint_{D(x)} g(x,y,z)dydz$$

存在, 那么

$$A = \int_{I_1} h(x)dx.$$

对于固定的 x, 施用类似的定理于二重积分 $h(x)$, 得

$$h(x) = \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{D(x,y)} g(x,y,z)dz,$$

其中集合 $D(x,y)$ 是集合 D 与直线 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z \in \mathbb{R}\}$ 的交 (此处须假定 $D(x,y)$ 是若尔当可测的, 此事并非必然成立, 译者注).

例 1 求积分

$$I = \int \cdots \int_D f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

其中 D 的定义是

$$D = \{(x_1, \cdots, x_n) | 0 < x_1 < \cdots < x_n < 1\}.$$

用 D_σ 代表对应于数 $1, \cdots, n$ 的排列 σ 的区域

$$D_\sigma = \{(x_1, \cdots, x_n) | 0 < x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(n)} < 1\}.$$

对于不同的排列 σ 和 τ, 区域 D_σ 和 D_τ 不相交. 还有, 同一函数 $f(x_1) \cdots f(x_n)$ 对应于积分区域 D_σ 的积分 $I(\sigma)$ 都等于 I. n 个数的排列的总数为 $n!$. 因此

$$n! I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n = \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^n.$$

于是我们把 n 重积分的计算归结为一重积分的计算, 并得到公式

$$I = \frac{1}{n!} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^n.$$

例 2　我们来证明下述狄利克雷–刘维尔公式. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续并设 S 是 n 维空间中的单形

$$S = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0, x_1 + \cdots + x_n \leqslant 1\}.$$

那么对于 $p_1 > 0, \cdots, p_n > 0$ 有

$$\begin{aligned} J = J_n(p_1, \cdots, p_n) &= \underset{S}{\int \cdots \int} f(x_1 + \cdots + x_n) x_1^{p_1 - 1} \cdots x_n^{p_n - 1} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1 + \cdots + p_n - 1} du. \end{aligned}$$

设 $\lambda = x_1 + \cdots + x_{n-2}$. 在积分 J 中配置积分限. 那么关于最后两个变量 x_{n-1} 和 x_n 的积分可写成

$$H = \int_0^{1-\lambda} dx_{n-1} \int_0^{1-\lambda-x_n} f(\lambda + x_{n-1} + x_n) x_{n-1}^{p_{n-1}-1} x_n^{p_n - 1} dx_n.$$

在里面的积分中作变量变换 $x_n = x_{n-1} \dfrac{1-v}{v}$. 那么 $v = \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-1} + x_n}, dx_n = -\dfrac{x_{n-1}}{v^2} dv$. 从而

$$H = \int_0^{1-\lambda} dx_{n-1} \int_{\frac{x_{n-1}}{1-\lambda}}^1 f(\lambda + \frac{x_{n-1}}{v}) x_{n-1}^{p_{n-1}+p_n-1} (1-v)^{p_n - 1} v^{-p_n - 1} dv.$$

改变积分次序得

$$H = \int_0^1 dv \int_0^{(1-\lambda)v} f\left(\lambda + \frac{x_{n-1}}{v}\right) x_{n-1}^{p_{n-1}+p_{n-1}} (1-v)^{p_{n-1}} v^{-p_n - 1} dx_{n-1}.$$

再作一个变换 $x_{n-1}=vt$. 得

$$H=\int_0^1(1-v)^{p_n-1}v^{p_{n-1}-1}dv\int_0^{1-\lambda}f(\lambda+t)t^{p_{n-1}+p_n-1}dt$$
$$=B(p_{n-1},p_n)\int_0^{1-\lambda}f(\lambda+t)t^{p_{n-1}+p_n-1}dt.$$

由此得到下面的递推公式:

$$J=J_n(p_1,\cdots,p_n)=B(p_{n-1},p_n)J_{n-1}(p_1,\cdots,p_{n-2},p_{n-1}+p_n).$$

从而推出

$$J=B(p_{n-1},p_n)B(p_{n-2},p_{n-1}+p_n)\cdots B(p_1,p_2+\cdots+p_n)J_1(p_1+\cdots+p_n)$$
$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n)}\cdot\int_0^1 f(u)u^{p_1+\cdots+p_n-1}du.$$

这就证得狄利克雷–刘维尔公式.

特别地, 由关系式 $x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2$ 给出的 n 维球的体积的表达式是这个公式的一个推论. 根据球关于超平面 $x_k=0$ 的对称性,$k=1,\cdots,n$, 可限于计算球的由下式定义的部分区域 K 的体积:

$$x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2,x_1\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0.$$

而后将结果乘上 2^n, 就得到球的体积 V, 即

$$V=2^n\int_K\cdots\int dx_1\cdots dx_n.$$

经变量变换 $a^2u_1=x_1^2,\cdots,a^2u_n=x_n^2$ 之后, 区域 K 变成单形 S, 其定义如上, 而由于 $dx_K=\dfrac{a}{2\sqrt{u_k}}du_k,k=1,\cdots,n$, 得到

$$V=a^n\int_S\cdots\int\frac{du_1\cdots du_n}{\sqrt{u_1\cdots u_n}}.$$

这个积分是狄利克雷–刘维尔型积分, 其中

$$f(u_1,\cdots,u_n)=1,p_1=\cdots=p_n=\frac{1}{2}.$$

于是, 半径为 a 的 n 维球的体积是 $\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a^n$.

§11. 凸集上的光滑映射的性质

大家知道在一重积分的理论建议中变量变换的方法起着多么巨大的作用. 在多重积分的情形, 变量变换方法的作用毫不减少 (甚至更大). 变量变换方法的理论依据需要光滑映射的一些性质.

设函数 $g(\bar{y}), \bar{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, 定义在紧致的可测区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上, 并且在 D 上可积. 设 I 代表积分

$$I = \int\limits_D \cdots \int g(\bar{y}) dy_1 \cdots dy_n.$$

考虑可测的紧致集合 $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ 到集合 D 的映射 $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$. 设 φ 建立了集合 $\mathring{D}_0$ 到集合 $\mathring{D}$ 的双方单值对应 ($\mathring{D}_0$ 和 $\mathring{D}$ 分别表示 D_0 和 D 的内部). 我们记得, 映射 $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ 由 n 个定义在 D_0 上的函数 $y_1 = \varphi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_n = \varphi_n(x_1, \cdots, x_n)$ 的函数组来确定.

我们将认为这些函数中的每个都在 D_0 上有全部的连续的偏导函数.

注 1. 诸函数 $\varphi_k(\bar{x})$ 叫作定义在 D_0 上的曲线坐标.

2. 映射 $\varphi : D_0 \to D$ 对于区域 D_0 的内点的双方单值性的条件由此映射的雅可比式在 D_0 的每点处都不等于零的要求来保证 (关于逆映射的定理).

我们来叙述并证明关于区域上的光滑映射的命题.

定理 12 设 D_0 是凸的闭集, 且 $\varphi(\bar{x})$ 是集合 D_0 上的光滑函数. 还设点 $\bar{x}$ 和 $\bar{x} + \Delta\bar{x}$ 属于 D_0. 那么存在点 $\bar{\xi} = \bar{x} + \theta\Delta\bar{x}, 0 < \theta < 1$, 使得 $\Delta\varphi = (\Delta\bar{x}, \mathrm{grad}\varphi(\bar{\xi}))$.

► 考虑单变数 t 的函数 $h(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$h(t) = \varphi(\bar{x} + t\Delta\bar{x}).$$

很明显, 函数 $h(t)$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的光滑函数. 因此, 可对它使用拉格朗日有限增量公式. 那么存在数 $\theta, 0 < \theta < 1$, 使得

$$\Delta\varphi = \Delta h = h(1) - h(0) = h'(\theta)(1 - 0) = h'(\theta).$$

函数 $h(t)$ 是函数 $\varphi(\bar{u})$ 和函数 $\bar{u} = \bar{x} + t\Delta\bar{x}$ 的复合函数, 从而根据复合函数的微分法则得

$$h'(\theta) = \frac{\partial\varphi(\bar{\xi})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial\varphi(\bar{\xi})}{\partial x_n}\Delta x_n = (\Delta\bar{x}, \mathrm{grad}\varphi(\bar{\xi})),$$

其中 $\bar{\xi} = \bar{x} + \theta\Delta\bar{x}$. ◄

定理 13 设 $\bar{\varphi}(\bar{x})$ 是凸紧集 D_0 到区域 D 的光滑映射. 那么存在数 $c > 0$ 使得对于任意的点 $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in D_0$ 成立不等式 $\|\bar{\varphi}(\bar{a}_1) - \bar{\varphi}(\bar{a}_2)\| \leqslant c\|\bar{a}_1 - \bar{a}_2\|$, 其中 $\|\bar{x}\|$ 是向量 x 在欧几里得度量下的长度.

► 从定理 12 推出, 对于 $k=1,\cdots,n$ 有

$$\varphi_k(\bar{a}_1)-\varphi_k(\bar{a}_2)=\Delta\varphi_k=(\bar{a}_1-\bar{a}_2,\mathrm{grad}\varphi_k(\bar{\xi}_k)),$$

其中 $\bar{\xi}_k=\bar{a}_2+\theta_k(\bar{a}_1-\bar{a}_2)$, 而 $\theta_k\in(0,1)$. 接着, 我们使用柯西不等式 $|(\bar{a},\bar{b})|\leqslant\|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\|$. 于是

$$|\Delta\varphi_k|\leqslant\|\bar{a}_1-\bar{a}_2\|\,\|\mathrm{grad}\varphi_k(\bar{\xi}_k)\|.$$

由于 D_0 是紧致的, 而函数 $\|\mathrm{grad}\varphi_k(\bar{x})\|$ 在 D_0 上连续, 所以它在紧致集上以某常数 $c_k>0$ 为上界. 使用此式及数值不等式

$$\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\leqslant|a_1|+\cdots+|a_n|,$$

得

$$\|\Delta\bar{\varphi}\|\leqslant|\Delta\varphi_1|+\cdots+|\Delta\varphi_n|\leqslant(c_1+\cdots+c_n)\|\Delta\bar{x}\|=c\|\Delta\bar{x}\|,$$

其中 $\Delta\bar{x}=\bar{a}_1-\bar{a}_2$. ◄

用 $A_\varphi(\bar{x})$ 表示映射 $\bar{\varphi}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 在点 $\bar{x}$ 处的雅可比矩阵.

定义 17 向量 $\bar{x}$ 的增量 $\Delta\bar{x}$ 的线性映射 $\Delta\bar{y}=A_\varphi(\bar{x})\cdot\Delta\bar{x}$ 叫作映射 $\bar{\varphi}$ 在点 $\bar{x}$ 处的微分, 并记作 $d\bar{\varphi}(\bar{x})$.

显然, $d\bar{\varphi}(\bar{x})$ 是一个第 k 坐标为

$$d\varphi_k(\bar{x})=(\Delta\bar{x},\mathrm{grad}\varphi_k(\bar{x}))$$

的向量.

定理 14 设 $\bar{\varphi}$ 是凸紧集 D_0 上的光滑映射且 $r(\bar{x},\Delta\bar{x})=\Delta\bar{\varphi}-d\bar{\varphi}$. 那么成立下面的极限等式:

$$\frac{\|r(\bar{x},\Delta\bar{x})\|}{\|\Delta\bar{x}\|}\underset{D_0}{\rightrightarrows}0\quad 当\|\Delta\bar{x}\|\to 0时.$$

换言之, 存在数值函数 $\alpha(\Delta\bar{x})\to 0$ 当 $\|\Delta\bar{x}\|\to 0$时, 使得对于一切 $\bar{x}\in D_0$, 成立不等式

$$\|r(\bar{x},\Delta\bar{x})\|\leqslant\alpha(\Delta\bar{x})\|\Delta\bar{x}\|.$$

► 考虑向量 $\Delta\varphi$ 和 $d\varphi$ 的第 k 坐标. 根据定义有 $d\varphi_k=(\Delta\bar{x},\mathrm{grad}\varphi_k(\bar{x}))$. 而根据定理 12, 对于某 $\bar{\xi}$ 有

$$\Delta\varphi_k=\varphi_k(\bar{x}+\Delta\bar{x})-\varphi_k(\bar{x})=(\Delta\bar{x},\mathrm{grad}\varphi_k(\bar{\xi})).$$

因此

$$\Delta\varphi_k-d\varphi_k=(\Delta\bar{x},\mathrm{grad}\varphi_k(\bar{\xi})-\mathrm{grad}\varphi_k(\bar{x})).$$

接下来, 由于映射 $\bar{\varphi}$ 的一切分量的一切偏导函数都在紧致集 D_0 上连续, 所以根据它们的一致连续性有

$$\left|\frac{\partial\varphi_k(\bar{\xi})}{\partial x_s}-\frac{\partial\varphi_k(\bar{x})}{\partial x_s}\right|\leqslant\alpha_k(\Delta\bar{x}),$$

其中 $\alpha_k(\Delta\bar{x})$ 仅依赖于 $\Delta\bar{x}$ 且当 $\|\Delta\bar{x}\|\to0$ 时 $\alpha_k(\Delta\bar{x})\to0$. 由此使用柯西不等式得到

$$|\Delta\varphi_k-d\varphi_k|\leqslant\|\Delta\bar{x}\|\cdot\sqrt{n}\alpha_k(\Delta\bar{x}).$$

结果

$$\|r(\bar{x},\Delta\bar{x})\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\Delta\varphi_k-d\varphi_k|\leqslant\|\Delta\bar{x}\|\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(\Delta\bar{x})=\alpha(\Delta\bar{x})\|\Delta\bar{x}\|,$$

而且当 $\|\Delta\bar{x}\|\to0$ 时 $\alpha(\Delta\bar{x})\to0$. ◀

第六讲

§12. 在曲纹坐标中的区域的体积. 关于多重积分的变量变换的定理

我们将证明一个关于在曲纹坐标中的区域的体积的定理

定理 15 *设 Q 是凸的紧致的若尔当可测集且 S 是它在光滑的双方单值映射 $\bar{\varphi}$ 之下的像. 那么*

1) 集合 S 是若尔当可测的;

2) $\mu(S)\leqslant\int\limits_{Q}\cdots\int|J|d\mu$, 其中 J 是映射 $\bar{\varphi}$ 的雅可比矩阵的行列式 (雅可比式).

我们记得, 映射的雅可比矩阵和微分的定义曾在上节的末尾给出.

► 限于考虑平面区域 $Q\subset\mathbb{R}^2$ 的情形. 立即发现, 由于映射 $\bar{\varphi}$ 的雅可比式的绝对值是 Q 上的连续函数, 所以它在 Q 上可积.

设 P 是一个标准正方形, 包含紧致集 Q. 还设边长为 h 的正方形 $P_{k,l}$ 组成正方形 P 的一个分法. 那么, 诸集合 $Q_{k,l}=Q\cap P_{k,l}$ 构成紧致集 Q 的一个分法 τ, 每个 $Q_{u,l}$ 都是凸的可测集. 任意固定 $\varepsilon>0$, 并取 h 足够小使得全体至少含有边界 ∂Q 一个点的正方形 $P_{k,l}$ 的总面积小于 ε. 我们把使 $P_{k,l}\cap\partial Q\neq\varnothing$ 的数偶 (k,l) 叫作**特殊的**, 而其他的则叫作**正常的**.

根据定理 13 对应于每个特殊的指标 (k,l) 的集合 $Q_{k,l}$ 的直径 $d_{k,l}$ 在映射 $\bar{\varphi}$ 之下的扩大不多于 c 倍, 即它的像 $S_{k,l}$ 可被半径为 ch 的圆或者边长为 $2ch$ 的正方形所覆盖. 所以 $S_{k,l}$ 被一个面积为 $4c^2\mu(P_{k,l})$ 的正方形覆盖. 于是集合 $U\{S_{k,l}|(k,l)$ 为

特殊指标 $\} = E_1$ 被一个测度小于

$$4c^2 \sum_{(k,l)\text{特殊}} \mu(P_{k,l}) < 4c^2\varepsilon$$

的简单图形所覆盖. 显然 $\partial S \subset E_1$. 这表明集合 $S = \bar{\varphi}(Q)$ 是若尔当可测的.①

用 $\mu(S)$ 代表集合 S 的若尔当测度. 那么

$$\mu(S) = \mu_1 + \mu_2$$

其中 $\mu_1 = \sum\limits_{(k,l)\text{特殊}} \mu(S_{k,l}); \mu_2 = \sum\limits_{(k,l)\text{正常}} \mu(S_{k,l})$.

如果某正方形 $P_{k,l}$ 完全包含在 Q 内部, 那么 $Q_{k,l} = P_{k,l}$. 把它的顶点记为 $\bar{x}_0, \bar{x}_0 + \bar{a}_1, \bar{x}_0 + \bar{a}_2, \bar{x}_0 + \bar{a}_1 + \bar{a}_2$, 这里 $\|\bar{a}_1\| = \|\bar{a}_2\| = h$. 显然, 对于任意的 $\bar{x} \in P_{k,l}$ 都有 $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| = \|\Delta\bar{x}\| < 2h$. 设 A 是映射 $\bar{\varphi}$ 的雅可比矩阵. 把 A 在 $\bar{x}_0$ 处的值记作 A_0, 它给出一个线性变换, 仍记为 A_0(此句为译者添加). 那么正方形 $P_{k,l}$ 经变换 $T(\bar{x}) = \bar{\varphi}(x_0) + A_0(\bar{x} - \bar{x}_0)$ 变成 (此句原文为 "正方形 $P_{k,l}$ 经以 A 为矩阵的线性变换变成") 顶点为 $\bar{y}_0 = \bar{\varphi}(\bar{x}_0), \bar{y}_1 = \bar{\varphi}(\bar{x}_0) + A_0\bar{a}_1, \bar{y}_2 = \bar{\varphi}(x_0) + A_0\bar{a}_2, \bar{y}_3 = \bar{\varphi}(\bar{x}_0) + A_0(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)$ 的平行四边形 K.

设 $\alpha(\Delta\bar{x})$ 是在定理 14 的结论中定义的函数 ($\Delta\bar{x} = \bar{x} - \bar{x}_0$). 记 $\rho = \alpha(2h)2h$,K_1 为包含 K 的, 其边与 K 的边的距离为 ρ 的平行四边形. 那么对于任何一点 $\bar{x} \in P_{k,l}, \bar{y}_0 + A_0(\bar{x} - \bar{x}_0) \in K$. 因此

$$\|\bar{\varphi}(\bar{x}) - (\bar{\varphi}(\bar{x}_0) + A_0(\bar{x} - \bar{x}_0))\| = \|\bar{r}(\bar{x}_0, \Delta\bar{x})\| \leqslant \rho.$$

从而 $\bar{\varphi}(\bar{x}) \in K_1$. 所以 $S_{k,l} \subset K_1$.

根据已证之事,$S_{k,l}$ 是若尔当可测的.

平行四边形的周长不超过 $c4h$. 因此, 从图形 K_1 的构造可见

$$\mu(K_1) \leqslant \mu(K) + \rho c4h + 4\pi\rho^2.$$

由于 $S_{k,l} \subset K_1$, 所以量 $\mu(S_{k,l})$ 满足不等式 $\mu(S_{k,l}) \leqslant \mu(K_1)$. 使用这些不等式, 我们过渡到估计式

$$\mu(S_{k,l}) \leqslant \mu(K_1) \leqslant \mu(K) + \rho \cdot c8h + 4\pi\rho^2 = \mu(K) + \Delta(h).$$

从线性代数知, 矩阵为 A 的线性变换把正方形 $P_{k,l}$ 变成平行四边形 K, 使 $\mu(K) = |J|\mu(P_{k,l})$, 其中 J 为 A 的行列式. 使用此等式得

$$\mu(S_{k,l}) \leqslant |J_{\varphi}(\bar{x}_{k,l})|\mu(Q_{k,l}) + \Delta(h).$$

①原文中在未曾证得 S 可测时便使用 $\mu(S_{k,l})$ 等符号, 似不妥 —— 译者注.

另外，对于每个特殊指标 (k,l)，任意取点 $\bar{x}_{k,l}\in Q_{k,l}$ 并作成和

$$\sigma_1=\sum{}'|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x}_{k,l})|\mu(Q_{k,l}),$$

其中 $\sum'$ 表示求和是关于特殊指标 (k,l) 进行的.

由于函数 $|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})|$ 在紧集 Q 上连续，所以根据魏尔斯特拉斯定理，它以某常数 $c_2>0$ 为上界. 因此

$$|\sigma_1|\leqslant c_2\sum{}'\mu(Q_{k,l})=c_2\mu_1<c_2\varepsilon.$$

设 $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$，其中 $\sigma_2=\sum''|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x}_{k,l})\mu(Q_{k,l})|$，此处 $\sum''$ 表示求和是关于正常指标 (k,l) 进行的. 我们来估计积分和 σ 与量 $\mu(S)$ 之间的差. 有

$$\begin{aligned}|\mu(S)-\sigma|&=|\sum{}''(\mu(S_{k,l})-|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x}_{k,l})|\mu(Q_{k,l}))+\sum{}'\mu(S_{k,l})-\sigma_1|\\&\leqslant|\sum{}''|+|\sum{}'|+|\sigma_1|.\end{aligned}$$

使用前面证明了的不等式得到

$$|\sum{}''|\leqslant\frac{\Delta(h)}{h^2}\mu(Q),{}^{①}\sum{}''h^2=\sum{}''\mu(Q_{k,l})\leqslant\mu(Q),$$

$$|\sum{}'|\leqslant 4c^2\varepsilon,|\sigma_1|<c^2\varepsilon.$$

和式 σ 本身是函数 $|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})|$ 沿集合 Q 的积分和. 当 $h\to 0$ 时，此和收敛到极限 $\iint\limits_Q|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})|d\mu$. 由于当 $h\to 0$ 时 $\dfrac{\Delta(h)}{h^2}\to 0$，所以，从上面所得的估计式，当 $h\to 0$ 时过渡到

$$\mu(S)\leqslant\iint\limits_Q|J|d\mu+\varepsilon(4c^2+c_2).$$

根据数 ε 的选取的任意性，由此得到 $\mu(S)\leqslant\iint\limits_Q|J|d\mu$. ◀

定理 16 设 Q 是空间 $\mathbb{R}^n$ 中的若尔当可测的紧致集合，S 是它在光滑的可逆映射 $\bar{\varphi}$ 之下的像. 那么

1) 集合 S 是若尔当可测的；

2) $\mu(S)\leqslant\int\limits_Q\cdots\int|J|d\mu$，其中 $J=J_\varphi$ 是映射 $\bar{\varphi}$ 的雅可比式.

► 我们来证明，在定理 15 的条件中，集合 Q 的凸性的要求可以去掉. 为此，如在定理 15 中那样考虑 Q 的分法 $\{Q_{k,l}\}$，其中 $Q_{k,l}$ 分为正常的和特殊的两类 (还是以 $n=2$ 为例来讨论，译者注). 此时假定全体包含特殊集合 $Q_{k,l}$ 的标准正方形的并集

①前面得到的不等式 $\mu(S_{k,l})\leqslant|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x}_{k,l})|\mu(Q_{k,l})+\Delta(h)$ 不能用来导出 $|\sum''|\leqslant\frac{\Delta(h)}{h^2}\mu(Q_{k,l})$. 其实在此定理中估计 $|\mu(S)-\sigma|$ 似也无必要 —— 译者注.

D 的测度 $\mu(D)$ 不超过预先任给的正数 ε. 在证明定理 15 时已证明, 集合 D 在映射 $\bar{\varphi}$ 之下的像 W 的测度 $\mu(W)$ 不超过 $4c^2\varepsilon$. 还有, 每个正常集合 $Q_{k,l} = P_{k,l}$ 都是标准正方形, 从而满足定理 15 的条件, 因此对于它们成立不等式

$$\mu(S_{k,l}) \leqslant \int \underset{P_{k,l}}{\cdots} \int |J| d\mu.$$

这里同前面一样,$S_{k,l} = \bar{\varphi}(Q_{k,l}) = \bar{\varphi}(P_{k,l})$. 对于全部号码 (k,l) 求和就得到不等式

$$\mu(S) = \sum_{(k,l)} \mu(S_{k,l}) \leqslant 4c^2\varepsilon + \int \underset{Q}{\cdots} \int |J| d\mu.$$

根据 ε 的选取的任意性, 此不等式蕴含着

$$\mu(S) \leqslant \int \underset{Q}{\cdots} \int |J| d\mu. \quad ◄$$

定理 17 设定理 16 的条件成立, 且对于一切 $\bar{x} \in Q$ 成立不等式 $|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})| \geqslant \delta$, 其中 $\delta > 0$ 是某个常数. 那么成立公式

$$\mu(S) = \int \underset{Q}{\cdots} \int |J| d\mu.$$

► 考虑定义在集合 S 上的, $\bar{\varphi}$ 的逆映射 $\bar{\psi}$. 那么, $\bar{\psi}$ 是光滑映射, 它的雅可比式 J_{ψ} 连续且

$$|J_{\psi}| = |J_{\bar{\varphi}}^{-1}| \leqslant \delta^{-1}.$$

根据定理 16, 成立估计式

$$\mu(S) \leqslant \int \underset{Q}{\cdots} \int |J_{\bar{\varphi}}| d\mu = \sup_{T} s(T),$$

其中 $s(T)$ 是函数 $|J_{\bar{\varphi}}|$ 关于集合的非标码分法 T 的达布下和.

我们有 $s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \mu_k$, 其中 $T = \{Q_1, \cdots, Q_n\}, Q_k$ 是分法 T 的元素, 它是若尔当可测集, $m_k = \inf\limits_{Q_k} |J_{\bar{\varphi}}|, \mu_k = \mu(Q_k)$, 且 $Q_k = \bar{\psi}(S_k)$. 根据定理 16, 对于一切 k 从 1 到 n, 成立估计式

$$\mu(Q_k) \leqslant \int \underset{S_k}{\cdots} \int |J_{\bar{\psi}}| d\mu.$$

用中值定理, 得

$$\int \underset{S_k}{\cdots} \int |J_{\bar{\psi}}| d\mu \leqslant M_k \mu(S_k),$$

其中 $M_k=\sup\limits_{S_k}|J_{\bar\psi}|$. 现注意 $J_{\bar\psi}=J_{\bar\varphi}^{-1}$, 得 $m_k=M_k^{-1}$. 于是我们导出不等式

$$S(T)\leqslant\sum_{k=1}^{n}m_kM_k\mu(S_k)=\sum_{k=1}^{n}\mu(S_k)=\mu(S).$$

据此得到不等式 $\mu(S)\leqslant\int\limits_Q\cdots\int|J_{\bar\varphi}|d\mu\leqslant\mu(S)$, 它与等式 $\mu(S)=\int\limits_Q\cdots\int|J_{\bar\varphi}|d\mu$ 等效. ◀

定理 18 对雅可比式 $J_{\bar\varphi}$ 的值不加限制, 定理 17 的结论依然成立.

► 考虑使雅可比式 $J(\bar x)=J_{\bar\varphi}(\bar x)$ 等于零的点 $\bar x\in Q$ 的集合 K. 我们来证明, 点集 K 是闭的. 实际上, 若 $\bar x_0$ 是 K 的极限点, 则存在一列点 $\bar x_n\in K$, 使得当 $n\to\infty$ 时 $\bar x_n\to\bar x_0$. 于是根据函数 $J(\bar x)$ 的连续性及 $J(\bar x_n)=0$, 得等式

$$J(\bar x_0)=J(\lim_{n\to\infty}\bar x_n)=\lim_{n\to\infty}J(\bar x_n)=0.$$

结果 $\bar x_0\in K$.

固定任意一个数 $\delta>0$. 每个点 $\bar x\in K$ 被一个邻域 (与 Q 的交) 包住, 在这个邻域 (与 Q 的交) 中函数 $J(\bar x)$ 满足不等式 $|J(\bar x)|<\delta$. 由于 K 是紧致的, 所以从这些邻域 (与 Q 的交) 中可选出有限个即正覆盖 K. 把这些邻域的并集记作 K. 并令 $Q_0=K_0\cap Q, Q_1=Q\backslash K_0$.

显然 $Q=Q_0\cup Q_1, Q_0\cap Q_1=\varnothing$, 且 Q_0 与 Q_1 皆若尔当可测. 另外,Q_1 显然是闭集, 从而是紧致集. 根据魏尔斯特拉斯定理, $|J(\bar x)|$ 在 Q_1 上达到最小值 m, 即存在 $\bar x_0\in Q_1$ 使 $|J(\bar x_0)|=\min\limits_{\bar x\in Q_1}|J(\bar x)|=m$. 由于 $\bar x_0\notin K\subset Q_0$, 所以 $m>0$. 因此, 可对集合 Q_1 在映射 $\bar\varphi$ 下的像 S_1 使用定理 17, 而对集合 Q 和 Q_0 的像 S 和 S_0 使用定理 16. 那么再用上中值定理, 就得到

$$\mu(S)=\mu(S_0)+\mu(S_1),\mu(S_1)=\int\limits_{Q_1}\cdots\int|J_{\bar\varphi}|d\mu,$$

$$0\leqslant\mu(S_0)\leqslant\int\limits_{Q_0}\cdots\int|J_{\bar\varphi}|d\mu\leqslant\delta\mu(Q_0)\leqslant\delta\mu(Q),$$

$$\mu(S)\leqslant\int\limits_{Q}\cdots\int|J_{\bar\varphi}|d\mu.$$

因此,

$$0\leqslant\int\limits_{Q}\cdots\int|J_{\bar\varphi}|d\mu-\mu(S)=\int\limits_{Q}\cdots\int|J_{\bar\varphi}|d\mu-\int\limits_{Q_1}\cdots\int|J_{\bar\varphi}|d\mu-\mu(S_0)$$

$$=\int\limits_{Q_0}\cdots\int|J_{\bar\varphi}|d\mu-\mu(S_0)\leqslant\delta\mu(Q).$$

根据 $\delta > 0$ 的任意性, 这表明

$$\int\limits_{Q}\cdots\int |J_{\bar\varphi}|d\mu = \mu(S). \qquad \blacktriangleleft$$

定理 19 (多重积分的变量变换公式) 设 D_0 是紧致的若尔当可测集,$\bar\varphi$ 是把集 D_0 映成 D_1 的双方单值光滑映射. 还设函数 $g(\bar y)$ 在 D 上可积, 而函数 $f(\bar x) = g(\bar\varphi(\bar x))|J_{\bar\varphi}(\bar x)|$ 在 D_0 上可积. 那么

$$\int\limits_{D}\cdots\int g(\bar y)dy_1\cdots dy_n = \int\limits_{D_0}\cdots\int f(\bar x)dx_1\cdots dx_n.$$

► 任意作 D 的一个分法 $T=\{S_k : k=1,\cdots,t\}$, 每个 S_k 都是可测区域. 设 $\bar\varphi(Q_k) = S_k$ (即 $Q_k = \bar\varphi^{-1}(S_k))k=1,\cdots,t$. 令 $m_k = \inf\limits_{\bar y\in S_k} g(\bar y), M_k = \sup\limits_{\bar y\in S_k} g(\bar y)$. 根据中值定理

$$m_k\int\limits_{Q_k}\cdots\int |J_{\bar\varphi}|d\mu \leqslant \int\limits_{Q_k}\cdots\int g(\bar\varphi(\bar x))|J_{\bar\varphi}(\bar x)|d\mu \leqslant M_s\int\limits_{Q_k}\cdots\int |J_{\bar\varphi}|d\mu.$$

由定理 18 推出 $\mu(S_k) = \int\limits_{Q_k}\cdots\int |J_{\bar\varphi}|d\mu$. 因此, 把上面的不等式关于 k 从 1 到 t 通加起来, 得

$$\sum_{k=1}^{t} m_k\mu(S_k) \leqslant \int\limits_{D_0}\cdots\int g(\bar\varphi(\bar x))|J_{\bar\varphi}(\bar x)|d\bar x \leqslant \sum_{k=1}^{t} M_k\mu(S_k),$$

即对于函数 $g(\bar y)$ 沿区域 D 的对应于分法 T 的达布上和及达布下和成立不等式:

$$s(T) \leqslant \int\limits_{D_0}\cdots\int g(\bar\varphi(\bar x))|J_{\bar\varphi}(\bar x)|d\bar x \leqslant S(T).$$

根据函数 $g(\bar y)$ 的可积性, 得知当 $\Delta_T \to 0$ 时 $s(T) \to A, S(T) \to A$, 其中 $A = \int\limits_{D}\cdots\int g(\bar y)d\bar y$. 结果

$$\int\limits_{D}\cdots\int g(\bar y)d\bar y = \int\limits_{D_0}\cdots\int g(\bar\varphi(\bar x))|J_{\bar\varphi}(\bar x)|d\bar x. \qquad \blacktriangleleft$$

注 在定理 18 和定理 19 中, 作为映射 $\bar\varphi$ 可以取任意的正交变换, 其雅可比式等于 1. 因此, 若尔当测度以及黎曼积分关于空间的运动不变, 从而它们的定义不依赖于直角坐标系的选取. 我们指出, 若尔当测度的不变性, 早已被我们通过几何的讨论而得到了.

例 1. 从直角坐标按下面的公式过渡到极坐标

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r > 0, 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

映射 $(x,y)\to(r,\varphi)$ 的雅可比式等于 r. 变量变换的公式为

$$\iint\limits_{D} g(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_0} g(r\cos\varphi, x\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

2. 从笛卡儿直角坐标按下面的公式过渡到球坐标:

$$x=r\cos\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\cos\theta, z=r\sin\theta,$$

其中 r 是从坐标原点出发的到动点 M 的矢径的长度, 而 θ 是矢径 $\overline{OM}$ 与它到 xOy 平面的投影之间的夹角, φ 是 Qx 轴与 $\overline{OM}$ 的夹角, 此外,$r>0, 0\leqslant\varphi<2\pi, |\theta|<\dfrac{\pi}{2}$.

此映射的雅可比式等于 $r^2\cos\theta$. 于是对于体积元 dV 有如下微分表示:

$$dV = dxdydz = r^2\cos\theta drd\varphi d\theta.$$

第七讲

§13. 勒贝格准则

我们从定义勒贝格零测度集开始. 把诸棱分别与直角坐标系的轴平行的开的平行多面体叫作是**标准的**. 把有限个或可数个标准平行多面体的并集叫作**最简单图形**.

定义 18 设 $A\subset\mathbb{R}^n$. 若对于任意的 $\varepsilon>0$, 都存在有限个或可数个开的标准平行多面体 $\Pi_k, k=1,2,\cdots$, 使得 $A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Pi_k$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(\Pi_k)<\varepsilon$, 则称 A 是勒贝格零测度集. 记作 $l(A)=0$.

引理 7 可数个勒贝格零测度集的并集是勒贝格零测度集.

► 设 $l(A_k)=0, k=1,2,\cdots$. 我们来证 $l(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k)=0$. 实际上, 根据定义, 任给 $\varepsilon>0$, 存在最简单图形 Π_k, 使得 $A_k\subset\Pi_k$ 且 $\mu(\Pi_k)<\varepsilon/2^k$.

此外有 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Pi_k$, 以及 $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Pi_k)$ [①]$\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(\Pi_k)<\varepsilon$. 因此, 集合 A 是勒贝格零测度集. ◄

引理 8 若 $l(A)=0, B\subset A$, 则 $l(B)=0$.

① 尚未定义文中的 $\mu(\Pi_k)$ 和 $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Pi_k)$, 请读者自己补充 —— 译者注.

► 由于任何覆盖集合 A 的最简单图形也覆盖 B, 所以引理的结论立即从勒贝格零测度集的定义推出. ◄

引理 9 设 $A \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 1$. 若 A 是紧致的, 且 $l(A)=0$, 则 A 是若尔当可测的, 且其若尔当测度 $\mu(A)$ 也等于零.

► 由于 $l(A)=0$, 所以对于任意的 $\varepsilon>0$ 都存在最简单图形 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k \supset A$, 使得 $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Pi_k) < \varepsilon$. 这里每个 Π_k 都是开的标准平行多面体. 由于 A 是紧致的, 知存在 $m \in \mathbb{N}_+$ 使得 $\bigcup_{k=1}^{m} \Pi_k \supset A$. 当然仍有 $\sum_{k=1}^{m} \mu(\Pi_k) < \varepsilon$. 根据若尔当测度的定义, 由此断定 A 是若尔当可测的, 并且 $\mu(A)=0$. ◄

以下, 设函数 $g(x,y)$ 在平行多面体 P 上有界. 设 $\bar{x}_0=(x_{0,1},\cdots,x_{0,n})$. 用记号 $\Pi=\Pi(\delta)=\Pi(\bar{x}_0,\delta)$ 代表由满足条件 $x_{0,k}-\delta<x_k<x_{0,k}+\delta, k=1,\cdots,n$ 的点 $\bar{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 组成的立方体 $(\delta>0)$.

定义 19 称

$$\omega(\bar{x}_0)=\omega_g(\bar{x}_0)=\inf_{\delta>0} \sup_{x,y\in\Pi(\delta)} (g(\bar{x})-g(\bar{y}))$$

为函数 $g(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}_0$ 处的振幅, 当然,

$$\omega(\bar{x}_0)=\inf_{\delta>0}(M_\delta(\bar{x}_0)-m_\delta(\bar{x}_0)),$$

其中

$$M_\delta(\bar{x}_0)=\sup_{\bar{x}\in\Pi(\delta)} g(\bar{x}), m_\delta(\bar{x}_0)=\inf_{\bar{x}\in\Pi(\delta)} g(\bar{x}).$$

用在一点处的振幅的语言, 函数在一点处连续可如下刻画.

引理 10 函数 $g(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}_0$ 处连续, 当且仅当 $\omega_g(\bar{x}_0)=0$.

► 必要性 设函数 $g(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}_0$ 处连续. 假设 $\omega_g(\bar{x}_0)=\alpha>0$. 考虑立方体 $\Pi\left(\frac{1}{k}\right)$. 由振幅 $\omega_g(\bar{x}_0)$ 之定义知,$M_{\frac{1}{k}}(\bar{x}_0)-m_{\frac{1}{k}}(\bar{x}_0) \geqslant \alpha$. 由此得知, 存在点 $\bar{x}_k \in \Pi\left(\frac{1}{k}\right)$ 和 $\bar{y}_k \in \Pi\left(\frac{1}{k}\right)$, 使得

$$g(\bar{x}_k)-g(\bar{y}_k) > \frac{1}{2}\alpha > 0.$$

于是 $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k = \lim\limits_{k\to\infty} \bar{y}_k = \bar{x}_0$. 那么, 在上式中过渡到极限 $k\to\infty$, 并使用函数 $g(\bar{y})$ 在点 $\bar{x}_0$ 处的连续性, 就得到 $0 \geqslant \frac{1}{2}\alpha > 0$. 这个荒谬的式子表明所作的假设不真. 因此,$\omega_g(\bar{x}_0)=0$. 必要性证毕.

充分性 由于 $\omega_g(\bar{x}_0)=0$, 所以对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对于一切 $\bar{x}\in\Pi(\delta),\bar{y}\in\Pi(\delta)$, 有 $|g(\bar{x})-g(\bar{y})|<\varepsilon$. 令 $\bar{y}=\bar{x}_0$. 此不等式表明函数 $g(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}_0$ 处连续. ◀

用 $D(\alpha)$ 代表 P 中满足 $\omega_g(\bar{x})\geqslant\alpha>0$ 的点 $\bar{x}$ 的集合.

引理 11 *集合 $D(\alpha)$ 是闭集.*

▶ 设 $\bar{x}_0$ 是集合 $D(\alpha)$ 的极限点. 我们来证明 $\bar{x}_0\in D(\alpha)$. 由于 $\bar{x}_0$ 是 $D(\alpha)$ 的极限点, 所以存在一列点 $\bar{x}_k\in D(\alpha)$, 它收敛到 $\bar{x}_0$.

对于任意的 $\delta>0$, 存在某 $\bar{x}_k\in\Pi(\bar{x}_0,\delta)$. 由于 $\Pi(\bar{x}_0,\delta)$ 是开集, 所以存在 $\delta_1>0$, 使

$$\Pi(\bar{x}_k,\delta_1)\subset\Pi(\bar{x}_0,\delta).$$

由此得到

$$M_\delta(\bar{x}_0)-m_\delta(\bar{x}_0)\geqslant M_{\delta_1}(\bar{x}_k)-m_{\delta_1}(\bar{x}_k)\geqslant\omega_g(\bar{x}_k)\geqslant\alpha.$$

因此,$\omega_g(\bar{x}_0)=\inf\limits_{\delta>0}(M_\delta(\bar{x}_0)-m_\delta(\bar{x}_0))\geqslant\alpha$. 从而 $\bar{x}_0\in D(\alpha)$. ◀

定理 20 *在矩形上有界的函数黎曼可积, 当且仅当对于任意的 $\alpha>0$, 集合 $D(\alpha)$ 都是勒贝格零测度集.*

▶ *必要性* 假设存在 $\alpha>0$ 使得 $D(\alpha)$ 不是勒贝格零测度集, 那么, 存在 $\varepsilon_0>0$, 使得任何包含 $D(\alpha)$ 的最简单图形的体积[①]都不小于 ε_0.

考虑矩形 P 的任意分法 $T=\{P_{k,l}\}$(这里不言而喻地是在二维情形说话). 设 Π_0 是其内部至少含 $D(\alpha)$ 的一个点的矩形 $P_{k,l}$ 的全体所成的集合. 最简单图形 Π_0 的面积不小于 ε_0.[②]如果不是这样的话, 则 $\mu(\Pi_0)=\varepsilon_1<\varepsilon_0$. 那么, 把 Π_0 的边界用总面积不超过 $\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{2}$ 的有限个开矩形盖住, 它们连同 Π_0 合起来成为覆盖 $D(\alpha)$ 的开的最简单图形 (由有限个标准矩形合并而成 —— 译者注), 其面积不超过 $\varepsilon_1+\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{2}=\dfrac{\varepsilon_0+\varepsilon_1}{2}<\varepsilon_0$, 这与我们的假设相矛盾. 因此 $\mu(\Pi_0)\geqslant\varepsilon_0$.

对于 Π_0 中的任意的标准矩形 $P_{k,l}$, 函数在此矩形上的振幅都不小于 α. 因此, $\Omega(T)\geqslant\alpha\varepsilon_0>0$. 由此推出 $\inf\limits_T\Omega(T)\geqslant\alpha\varepsilon_0>0$. 但这表明所考虑的函数在矩形上不可积, 这与定理的条件相矛盾. 因此所作的假设不成立. 也就是说, 对于任意的 $\alpha>0,D(\alpha)$ 是勒贝格零测度集. 必要性证毕.

充分性 任给 $\varepsilon>0$, 令 $\alpha=\varepsilon/(4\mu(P)),\delta=\varepsilon/(4M),M=\max\limits_{\bar{x}\in P}|g(\bar{x})|$. 因为集合 $D(\alpha)$ 是有界闭集, 即是紧致集, 所以, 根据引理 9,$D(\alpha)$ 作为勒贝格零测度集也是若尔当可测的, 并且其若尔当测度也是零. 那么, 可以用有限个开的标准矩形合成的最

[①]这里没有定义本节开头所定义的最简单图形的体积是什么 —— 译者注.

[②]作者先定义 Π_0 是有限个 $P_{k,l}$ 所成的族, 说它是最简单图形时, 则又把它看作是它所含元素的并集合 —— 译者注.

简单图形 I 来覆盖 $D(\alpha)$, 且若尔当测度 $\mu(I) < \delta$. 令 $K = P\backslash I$, 则 P 是紧致集, 对于每个 $\bar{x} \in K$ 有 $\omega_g(\bar{x}) < \alpha$. 从 $\omega_g(\bar{x})$ 的定义知, 存在正方形 $\Pi(\bar{x},\gamma), \gamma > 0$, 使得函数 $g(\bar{y})$ 在 $\Pi(\bar{x},\gamma)$(实应用 $\Pi(\bar{x},\gamma) \cap P$) 上的振幅小于 2α. 全部正方形 $\Pi(\bar{x}, \frac{1}{2}\gamma)(\bar{x} \in K)$ 构成了 K 的开覆盖. 从中取一个有限子覆盖 V. 延长组成 I 和 V 的矩形的边到与 P 的边相交为止. 这样构成矩形 P 的一个分法 T.

和 $\Omega(T)$ 有如下表示:

$$\Omega(T) = \sum_{(k,l)}\sum{}' \omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l + \sum_{(k,l)}\sum{}'' \omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l = \sum{}_1 + \sum{}_2,$$

其中和 $\sum\limits_{(k,l)}\sum{}'$ 对于使 $P_{k,l} \subset I$ 的 (k,l) 求和, 而和 $\sum\sum{}''$ 则对使 $P_{k,l} \subset V$ 的 (k,l) 求和. 那么

$$\sum{}_1 \leqslant 2M\sum_{(k,l)}\sum{}' \Delta x_k \Delta y_l < 2M\delta, \quad \sum{}_2 \leqslant 2\alpha\sum_{(k,l)}\sum{}'' \Delta x_k \Delta y_l \leqslant 2\alpha\mu(P).$$

结果,

$$\Omega(T) = \sum{}_1 + \sum{}_2 < 2M\delta + 2\alpha\mu(P) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是 $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$, 即函数 $g(\bar{x})$ 在矩形 P 上黎曼可积. ◄

定理 21 (勒贝格准则) 有界函数 $g(\bar{x})$ 在矩形 P 上黎曼可积, 当且仅当它在 P 上的间断点的全体所成的集 D 是一个勒贝格零测度集.

► 根据定理 20, g可积等价于$l\left(D\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0, n = 1, 2, \cdots$.这等价于$l\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$. 而 $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D\left(\frac{1}{n}\right)$. ① ◄

定理 22 设函数 $g(\bar{x})$ 在矩形 P 上可积,$m = \inf\limits_P g(\bar{x}), M = \sup\limits_P g(\bar{x})$. 设函数 $f(t)$ 在闭区间 $[m, M]$ 上连续. 那么函数 $f(g(\bar{x}))$ 在矩形 P 上可积.

► 函数 $g(\bar{x})$ 的连续点必定也是函数 $f(g(\bar{x}))$ 的连续点. 所以函数 $f \circ g$ 的间断点所成之集是函数 g 的间断点所成之集的子集, 它必为勒贝格零测度集, 因为后者根据 g 的可积性及勒贝格准则是勒贝格零测度集. 所以再根据勒贝格准则, $f \circ g$ 在 P 上黎曼可积. ◄

①此段证明是译者改写的 —— 译者注.

第八讲

§14. 反常重积分

对于一重积分, 我们定义了两种类型的反常积分. 在多重积分的情形, 类似地我们称:

1) 有界函数 $g(\bar{x})$ 沿无界区域 D 的积分为**第一类反常多重积分**;

2) 有有限多个奇点 $\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_k$ 的函数 $g(\bar{x})$ 在有界的若尔当可测区域 D 上的积分为**第二类反常多重积分**. 所谓奇点, 是指在此点的任何邻域内函数都无界的点, 奇点本身不必属于函数的定义域.

例 函数 $g(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 在区域 $D=\{(x,y)|x>0,y>0\}$ 中有奇点 $x=0,y=0$.

对于反常积分使用与正常积分一样的记号:

$$I=\iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

为简单起见, 我们只考虑二重积分, 并且首先考虑具有一个奇点 $\bar{a}$ 的第二类反常积分. 最简单的情形是, 此积分作为积分 $I_r=\iint\limits_{D_r} g(x,y)dxdy$ 当 $r\to 0+$ 时的极限的情形, 此处 $D_r=D\backslash O(\bar{a},r),O(\bar{a},r)$ 是以点 $\bar{a}$ 为中心 r 为半径的球 (圆), 即, 按定义

$$I=\iint\limits_D g(x,y)dxdy=\lim_{r\to 0+} I_r.$$

这个值叫作函数 $g(\bar{x})$ 沿区域 D 的反常积分的柯西主值.

类似地, 对于第一类反常积分, 称 $I=\lim\limits_{R\to\infty} I_R$ 为柯西主值, 其中

$$I_R=\iint\limits_{D_R} g(x,y)dxdy, D_R=D\cap O(\bar{0},R).$$

我们转向反常积分的一般定义.

定义 20 1) 数 I 叫作函数沿无界区域 D 的第一类反常二重积分, 如果对于任何一列满足下述条件的有界的, 开的, 连通的若尔当可测的区域 D_n 都成立

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n} g(x,y)dxdy=I:$$

a) 对于一切自然数 $n, D_n \subset D_{n+1}$(单调性条件);

b) $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$(穷竭性条件).

2) 数 I 叫作无界函数 $g(x,y)$ 沿有界的若尔当可测的具有奇点集 $L \subset \bar{D}$ 的区域 D 的第二类反常二重积分 ($\bar{D}$ 是 D 的闭包), 如果对于任何一列满足下述条件的开的, 连通的, 若尔当可测的区域 D_n 都成立 $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} g(x,y)dxdy = I$:

a) 对于一切自然数 $n, D_n \subset D_{n+1}$(单调性条件);

b) $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$(穷竭性条件);

c) 对于一切自然数 $n, L \cap \bar{D}_n = \varnothing$.

在第一和第二类反常积分的定义中的序列 $\{D_n\}$ 叫作是可行的, 或 D 可行的.

注 1. 为使第二类反常积分存在, 显然必须要有 $\mu(L) = 0$.

2. 在两类反常积分中都保持使用标准的记号 $I = \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.

3. 在重数大于 2 的情形下, 反常重积分的定义与二重情形完全一样.

定理 23 设 $g(x,y) \geqslant 0$. 那么反常积分 $I = \iint\limits_D g(x,y)dxdy$ 收敛的必要且充分条件是对于任何 D 可行的区域序列 $\{D_n\}$, 数集 $\{I_n = \iint\limits_{D_n} g(x,y)dxdy\}$ 都是有界的.

► *必要性* 若积分 I 存在, 则数列 $\{I_n\}$ 收敛到 I. 因此 $\{I_n\}$ 有界. 必要性证毕.

充分性 设数列 $\{I_n\}$ 有界, 那么根据魏尔斯特拉斯定理, 存在 $I_0 = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \sup\limits_n \{I_n\}$.

设 $\{D'_n\}$ 是另一个 D 可行序列, 且 $I'_n = \iint\limits_{D'_n} g(x,y)dxdy$. 固定某 D'_m 且考虑 $D''_n = D_n \cap D'_m$.

显然, 序列 $\{D''_n\}$ 是 D'_m 可行的. 特别地, 对于任意的 n 有 $D''_n \subset D''_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} D''_n = D'_m$.

要完成必要性的证明, 需要下面的引理及其推论.

引理 12 (穷竭性引理) 下述关系式成立:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(D''_n) = \mu(D'_m), \lim_{n\to\infty} \mu(D'_m \backslash D''_n) = 0.$$

引理 12 的证明 数列 $\{\mu(D''_n)\}$ 不减且以 $\mu(D'_m)$ 为上界. 因此存在 $\mu_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(D''_n) \leqslant \mu(D'_m)$.

要证 $\mu_0 = \mu(D'_m)$. 考虑集合 D'_m 的闭包 $\bar{D}'_m = D'_m \cup \partial D'_m$. 由于 D'_m 可测, 故 $\mu(\partial D'_m) = 0$. 因此对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在开的最简单图形 $W = W_\varepsilon$, 使得 $\partial D'_m \subset W$.

集合 $\bar{D}'_m$ 是紧致的, 而 $W \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} D''_n) \supset \bar{D}'_m$. 所以存在足够大的自然数 k, 使得 $W \cup (\bigcup_{n=1}^{k} D''_n) \supset \bar{D}'_m$, 即 $(W \cup D''_k) \supset \bar{D}'_m$. 因此

$$\mu(W) + \mu(D''_k) \geqslant \mu(D'_m).$$

从而 $\varepsilon+\mu_0\geqslant\mu(D'_m)$. 由此推出 $\mu_0\geqslant\mu(D'_m)$. 终于得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(D''_n)=\mu(D'_m)$.

还有, 由 $(D'_m\backslash D''_n)\cup D''_n=D'_m$ 以及 $(D'_m\backslash D''_n)\cap D''_n=\varnothing$, 从测度的加性得

$$\mu(D'_m\backslash D''_n)+\mu(D''_n)=\mu(D'_m).$$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(D'_m\backslash D''_n)=0$. 引理 12 证毕.

推论 设引理 12 的条件成立. 还设函数 $g(x,y)$ 在 D'_m 上可积. 那么成立等式

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D''_n}g(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'_m}g(x,y)dxdy=I'_m.$$

► 推论的证明. 根据积分的加性, 有

$$I'_m-\iint\limits_{D''_n}g(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'_m\backslash D''_n}g(x,y)dxdy.$$

由于函数 $g(x,y)$ 在 D'_m 上有界, 即存在 $c>0$ 使对一切 $(x,y)\in D'_m$ 有 $|g(x,y)|\leqslant c$, 所以当 $n\to\infty$ 时

$$|I'_m-\iint\limits_{D''_n}g(x,y)dxdy|\leqslant c\mu(D'_m\backslash D'_n)\to 0.$$

推论证毕.

现在来完成定理 23 的证明. 由于 $D''_n\subset D_n$, 所以成立不等式

$$\iint\limits_{D''_n}g(x,y)d\mu\leqslant I_n\leqslant I_0.$$

在此式中令 $n\to\infty$ 过渡到极限, 使用推论, 就得到

$$I'_m=\iint\limits_{D'_m}g(x,y)d\mu\leqslant I_0$$

由此得知, 存在极限 $I'=\lim\limits_{m\to\infty}I'_m\leqslant I_0$. 但若将所进行的讨论中的 D_n 和 D'_n 位置互换, 就得到 $I_0\leqslant I'$. 因此 $I_0=I'$. 定理 23 的充分性部分也证完了. ◄

定理 24 设函数 $g(x,y)$ 和 $g_0(x,y)$ 在含于集合 D 的任何若尔当可测的紧致集合上都可积, 并设在集合 D 上成立不等式 $0\leqslant g_0(x,y)\leqslant g(x,y)$. 那么:

1) 若反常积分 $\iint\limits_D g(x,y)d\mu=I$ 收敛, 则积分 $\iint\limits_D g_0(x,y)d\mu=I_0$ 收敛;

2) 若反常积分 $\iint\limits_D g_0(x,y)d\mu$ 发散, 则积分 $\iint\limits_D g(x,y)d\mu$ 也发散.

► 由于积分 I 收敛, 所以存在 D 可行的序列 $\{D_n\}$ 使得当 $n\to\infty$ 时有

$$I_n=\iint\limits_{D_n} g(x,y)d\mu\to I.$$

于是成立不等式

$$I'_n=\iint\limits_{D_n} g_0(x,y)d\mu\leqslant I_n\leqslant I,$$

而且数列 $\{I'_n\}$ 是不减的. 因此存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} I'_n=I_0\leqslant I$. 根据定理 23, 反常积分 $I_0=\iint\limits_D g_0(x,y)d\mu$ 存在.

2)[①]根据积分 $\iint\limits_D g_0(x,y)d\mu$ 的发散性, 对于任意的 D 可行序列 $\{D_n\}$, 当 $n\to\infty$ 时有

$$I'_n=\iint\limits_{D_n} g_0(x,y)d\mu\to+\infty.$$

因此, 当 $n\to\infty$ 时也有 $I_n\to+\infty$, 这是因为 $I_n\geqslant I'_n$. ◄

推论 若反常积分 $\iint\limits_D |g(x,y)|d\mu$ 收敛, 则积分 $\iint\limits_D g(x,y)d\mu$ 收敛.

► 考虑函数

$$g_+=\frac{|g|+g}{2},g_-=\frac{|g|-g}{2}.$$

由于 $0\leqslant g_-\leqslant|g|,0\leqslant g_+\leqslant|g|$, 所以根据定理 24 积分 $\iint\limits_D g_-d\mu,\iint\limits_D g_+d\mu$ 都收敛. 于是函数 $g=g_+-g_-$ 的积分收敛. ◄

定义 21 若积分 $\iint\limits_D |g(x,y)|d\mu$ 收敛, 则说积分 $\iint\limits_D g(x,y)d\mu$ 绝对收敛.

上面的推论可写成: 若反常积分绝对收敛, 则它收敛.

类似于定理 23 和定理 24 的命题对于第二类反常积分也成立. 情况是这样的, 在反常重积分的情形, 通常的收敛蕴含着绝对收敛. 而对于一重积分, 情况并非如此.

我们只引两个利于应用的定理.

定理 25 若积分 $\iint\limits_D g(x,y)d\mu$ 收敛, 且函数 $g(x,y)$ 沿区域 D 的累次积分存在, 则两者相等.

定理 26 若积分 $\iint\limits_D g(\bar{y})d\mu$ 收敛, 并且 $\bar{y}=\bar{\varphi}(\bar{x})$ 是区域 D_0 到 D 的光滑映射, 它在 D_0 的内部是双方单值的, 那么成立下述变元变换公式:

$$\iint\limits_D g(\bar{y})d\mu=\iint\limits_{D_0} g(\bar{\varphi}(\bar{x}))|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})|d\bar{x}.^{②}$$

① 原文中没写 1) 而有 2). 2) 是 1) 的等价说法 —— 译者注.

② 望读者对文中使用的 $d\mu,d\bar{x},dxdy$ 等符号, 不要混淆 —— 译者注.

例 1. 积分 $\int\limits_{\|\bar{x}\|>1}\cdots\int\frac{d\bar{x}}{\|\bar{x}\|^{\alpha}}$ 当 $\alpha>n$ 时收敛, 而当 $\alpha\leqslant n$ 时发散, 其中 $\|\bar{x}\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$.

考虑满足不等式 $A<\|\bar{x}\|\leqslant 2A$ 的点 $\bar{x}$ 的集合 S_A. 设 $A=A_k=2^k, k=0,1,2,\cdots$. 得到

$$\int\limits_{\|\bar{x}\|>1}\cdots\int\frac{d\bar{x}}{\|\bar{x}\|^{\alpha}}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k\alpha}}\cdot\mu(S_{2^k})\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}2^{2n}2^{-k\alpha+kn}.$$

右端的级数当 $-\alpha+n<0$, 即 $\alpha>n$ 时收敛. 此时积分收敛. 用 K_A 代表满足 $\|\bar{x}\|\leqslant A$ 的点 $\bar{x}$ 的集合. 那么

$$\mu(S_A)=\mu(K_{2A})-\mu(K_A)=A^n(\mu(K_2)-\mu(K_1)).$$

由此

$$\int\limits_{\|\bar{x}\|>1}\cdots\int\frac{d\bar{x}}{\|\bar{x}\|^{\alpha}}\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{(k+1)\alpha}}2^{kn}(\mu(K_2)-\mu(K_1)).$$

右端的级数当 $\alpha\leqslant n$ 时发散, 从而积分此时亦发散.

2. 积分

$$\int\limits_{\|\bar{x}\|>1}\cdots\int\frac{d\bar{x}}{|x_1|^{\alpha_1}+\cdots+|x_n|^{\alpha_n}},$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n>0$, 当 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}<1$ 时收敛, 而当 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\geqslant 1$ 时发散.

设 S_A 是使不等式

$$A<|x_1|^{\alpha_1}+\cdots+|x_n|^{\alpha_n}\leqslant 2A$$

成立的点 $\bar{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 的集合. 那么, 对于任意的 $\bar{x}\in S_A$ 有 $|x_s|\leqslant(2A)^{\frac{1}{\alpha_s}}, s=1,\cdots,n$. 因此,

$$\mu(S_{2^k})\leqslant\frac{1}{2^k}2^n2^{\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}}2^{k(\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n})}.$$

由此得到, 当

$$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}-1<0$$

时, 积分收敛.

设 K_A 是满足条件 $|x_1|^{\alpha_1}+\cdots+|x_n|^{\alpha_n}\leqslant A$ 的点 $\bar{x}$ 的集合. 那么 $S_A=K_{2A}\backslash K_A$. 显然

$$\mu(S_A)=\mu(K_{2A})-\mu(K_A)=A^{\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}}(\mu(K_2)-\mu(K_1)).$$

于是积分

$$\int\cdots\int\limits_{\|\bar{x}\|>1}\frac{d\bar{x}}{|x_1|^{\alpha_1}+\cdots+|x_n|^{\alpha_n}}\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\mu(S_{2^k})$$

$$\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot 2^{k\left(\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)}(\mu(K_2)-\mu(K_1)).$$

当 $\dfrac{1}{\alpha_1}+\cdots+\dfrac{1}{\alpha_n}-1\geqslant 0$ 时发散.

到此, 我们完成了对反常重积分理论的讨论.

第九讲

§15. 曲面的面积

我们的目的是, 把测度的概念推广到展布在三维以及更高维的空间中的二维曲面上的集合上. 为此必须回答下面的问题. 这样的曲面是什么? 我们将要考察什么样的曲面?

我们把满足方程 $z=g(x,y)$ 的点 (x,y,z) 的集合 Q 叫作*曲面*, 这里 $g(x,y)$ 是某个两个变量 x 和 y 的函数, 而点 (x,y) 属于 xOy 平面的某个集合. 通常要求函数 $g(x,y)$ 在除了一个若尔当测度为零的集合 L 外处处连续. 曲面 Q 在平面 xOy 上的投影是区域 D. 假设 D 是约定可测的紧致集合. 设可测集 $D_1,\cdots,D_t$ 构成它的分法 τ. 取 $M_k\in D_k$, 并设 M_k 是曲面 Q 上点 N_k 在平面 xOy 上的投影,$k=1,\cdots,t$. 设 γ_k 是曲面 Q 在点 N_k 处的法线与轴 Oz 的夹角. 考虑曲面 Q 在点 N_k 处的切平面其到 xOy 平面的投影恰为 D_k 的那一部分 $Q_k,k=1,\cdots,t$. 诸 Q_k 的全体就构成了一个 "鳞状" 曲面. 由线性代数知, 面积 $\mu(Q_k)$ 等于

$$\mu(Q_k)=\frac{\mu(D_k)}{|\cos\gamma_k|},k=1,\cdots,t.$$

我们定义**曲面Q的面积**为

$$\mu(Q)=\lim_{\Delta_\tau\to 0}\sum_{k=1}^{t}\frac{\mu(D_k)}{|\cos\gamma_k|}=\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{|\cos\gamma(x,y)|}.$$

由于曲面的方程是 $z=g(x,y)$, 它在点 $N\in Q$ 处的法向量可写成

$$\bar{n}=\bar{n}(N)=\frac{(-g'_x,-g'_y,1)}{\sqrt{1+(g'_x)^2+(g'_y)^2}},N=N(x,y).$$

因此

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(g'_x)^2+(g'_y)^2}}, \gamma = \gamma(x,y).$$

由此得到

$$\mu(Q) = \iint\limits_D \sqrt{1+(g'_x(x,y))^2+(g'_y(x,y))^2}dxdy.$$

于是, 从不完全严格的几何讨论, 我们得到了三维空间中曲面面积的公式. 下面我们给出这个概念的某种精确化及推广.

定义 22 把集合 $Q = \{\bar{r} = (r_1, \cdots, r_n) = \bar{r}(\bar{x}) : \bar{x} = (x_1, x_2) \in D\}$ 叫作 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中的曲面, 这里区域 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界的若尔当可测的集合, 而映射 $\bar{r} : D \to Q \subset \mathbb{R}^n, \bar{r} = \bar{r}(x)$, 是在 $\mathring{D}$(D 的内部) 上双方单值 (即可逆) 的, 且在 D 上除了一个具有若尔当测度零的集 L 外, 处处连续.

我们记得, 映射 $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x}) = (r_1(\bar{x}), \cdots, r_n(\bar{x}))$ 在点 $\bar{x}_0$ 处连续, 指的是每个函数 $r_k(\bar{x})$ 都在点 $\bar{x}_0$ 处连续,$k = 1, \cdots, n$.

说映射 $\bar{r}(\bar{x}) = (r_1(\bar{x}), \cdots, r_n(\bar{x}))$ 是**光滑的**, 如果每个函数 $r_k(\bar{x})$ 在 D 的每点处都有偏导数, 且偏导函数连续(在边界 ∂D 上, 当然只考虑单边导数), $k = 1, \cdots, n$.

注 曲面 Q 可用不同的方式定义, 上述方式叫作**参数方式**或集合 Q 的**参数化**. 参数化也可有不同的取法. 对于任意固定的数 c_1 和 c_2, Q 上由 $\bar{r} = \bar{r}(x_1, c_2)$ 和 $\bar{r} = \bar{r}(c_1, x_2)$ 给出的曲线叫作曲面 Q 上的**坐标曲线**, 而点 (c_1, c_2) 则叫作曲面 Q 上的点 $\bar{r}(c_1, c_2)$ 的曲线坐标.

定义 23 曲面 Q 叫作光滑的, 如果它所借以定义的映射 $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ 是光滑的. 光滑曲面叫作非退化的, 如果映射 $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ 的雅可比矩阵总满秩, 即秩总为 2.

我们的目的是定义**非退化曲面**上的集合的测度, 即面积. 为此先搞明白, 集合的面积或测度应该具有什么性质. 除了测度的通常的性质 (单调性, 加性, 关于空间的正交变换的不变性, 与参数的选取的无关性) 外, 还必须使得在 $r_3 = r_4 = \cdots = r_n \equiv 0$, 即 "平面" 映射 $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ 的情形, 成立公式

$$\mu(Q) = \iint\limits_D |J_{\bar{r}}(\bar{x})| dx_1 dx_2,$$

其中 $J_{\bar{r}}(\bar{x})$ 是映射 $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ 的雅可比式

$$J_{\bar{r}}(\bar{x}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial r_1(\bar{x})}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial r_2(\bar{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial r_1(\bar{x})}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial r_2(\bar{x})}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

为了简化论述, 我们假设平面集合 D 是闭的标准正方形. 此时 D 的像的测度 $\mu(Q)$ 是当 $\Delta_T \to 0$ 时正方形 D 的等分为正方形 $D_{k,l}, k, l = 1, \cdots, m$ 的分法的积分

和

$$\sigma(T)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}|J_{\bar{r}}(\bar{x}_{k,l})|\mu(D_{k,l})$$

的极限, 式中 $\bar{x}_{k,l}$ 是正方形 $D_{k,l}$ 的左下顶点.

在推导图形 Q 的面积公式时我们已经见到, 数 $|J_{\bar{r}}(\bar{x}_{k,l})|\mu(D_{k,l})$ 等于正方形 $D_{k,l}$ 经线性变换 $\bar{\rho}$:

$$\bar{\rho}(\bar{x})=A(\bar{x}_{k,l})(\bar{x}-\bar{x}_{k,l})=d\bar{r}(\bar{x}_{k,l})$$

变到的平行四边形的面积, 这里 $A(\bar{x}_{k,l})$ 是映射 $\bar{r}=\bar{r}(\bar{x})$ 的雅可比矩阵 A 在点 $\bar{x}=\bar{x}_{k,l}$ 处的值 (矩阵),$\bar{\rho}(\bar{x})$ 是 $\Delta\bar{r}=\bar{r}(\bar{x})-\bar{r}(\bar{x}_{k,l})$ 的一阶近似 (即线性近似).

于是, 在计算 $\mu(Q)$ 时, 我们把 D 分划成正方形 $D_{k,l}$, 然后对于每个 $D_{k,l}$ 用线性映射 $d\bar{r}(\bar{x}_{k,l})$ 代替映射 $\Delta\bar{r}$. 在这个变换之下, 可以说出像的面积等于什么. 所得到的面积关于一切指标 $(k,l), k,l=1,\cdots,m$ 求和, 就给出了积分和 $\sigma(T)$.

在一般情况下, 自然地基于同样的步骤来定义曲面的面积, 也就是说, 应该作正方形 D 的分法 T, 把它划分成相等的正方形 $D_{k,l}, k,l=1,\cdots,m$. 然后代替映射 $\Delta\bar{r}$ 以线性映射 $\bar{\rho}_{k,l}$:

$$\bar{\rho}_{k,l}(\bar{x})=d\bar{r}(\bar{x}_{k,l}),$$

再求出测度 $R_{k,l}=\bar{\rho}_{k,l}(D_{k,l})$. 然后加起来得

$$\sigma(T)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\mu(R_{k,l}).$$

定义 24 *若当 $\Delta_T\to 0$ 时 $\sigma(T)$ 有极限, 则称此极限为曲面 Q 的面积.*

剩下的是对 $\sigma(T)$ 进行明确的计算并求出它的极限 $\mu(Q)$. 为此, 指出, 向量 $\bar{e}_1=(h,0)$ 和 $\bar{e}_2=(0,h)$ 在映射 $\bar{\rho}=d\bar{r}(\bar{x}_{k,l})$ 之下变成向量

$$\bar{a}_1=\bar{\rho}(\bar{e}_1)=h\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial r_n}{\partial x_1}\right),$$
$$\bar{a}_2=\bar{\rho}(\bar{e}_2)=h\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial r_n}{\partial x_2}\right).$$

现在应该求出由向量 $\bar{a}_1$ 和 $\bar{a}_2$ 组成的平行四边形的面积, 为此使用线性代数的公式, 它断言

$$\mu^2=\begin{vmatrix}(\bar{a}_1,\bar{a}_1), & (\bar{a}_1,\bar{a}_2)\\ (\bar{a}_2,\bar{a}_1), & (\bar{a}_2,\bar{a}_2)\end{vmatrix}=h^2\begin{vmatrix}E & F\\ F & G\end{vmatrix}=(EG-F^2)h^4.$$

我们对此公式作一简单的推导. 显然, 由向量 $\bar{a}_1$ 和 $\bar{a}_2$ 组成的平行四边形的面积等于

$$\mu=\|\bar{a}_1\|\left\|\bar{a}_2-\frac{\bar{a}_1(\bar{a}_1,\bar{a}_2)}{\|\bar{a}_1\|^2}\right\|.$$

由此求得

$$\mu^2 = \|\bar{a}_1\|^2\|\bar{a}_2\|^2 - (\bar{a}_1, \bar{a}_2)^2$$
$$= (EG - F^2)h^4 = \Gamma(\bar{x})h^4.$$

于是得到

$$\sigma(T) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \sqrt{\Gamma(\bar{x}_{k,l})} \cdot \mu(D_{k,l}).$$

函数 $\sqrt{\Gamma(\bar{x})}$ 在 D 上连续, 因此存在极限

$$\lim_{\Delta_T \to 0} \sigma(T) = \iint\limits_D \sqrt{\Gamma(\bar{x})} dx_1 dx_2 = \mu(Q).$$

换言之

$$\mu(Q) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} dx_1 dx_2.$$

我们指出, 这个积分既可以是正常的, 也可以是反常的. 由边 $\bar{a}_1 = h\bar{r}'_{x_1}, \bar{a}_2 = h\bar{r}'_{x_2}$ 组成的平行四边形的面积等于

$$\mu(R_{k,l}) = h^2 \|[\bar{r}'_{x_1}, \bar{r}'_{x_2}]\|.$$

由此得到曲面面积的又一个公式:

$$\mu(Q) = \iint\limits_D \|[\bar{r}'_{x_1}, \bar{r}'_{x_2}]\| dx_1 dx_2.$$

例　1. 上半球面 $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ 的面积等于 2π.

我们有

$$\mu(Q) = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{dxdy}{|\cos(\bar{n}, \bar{e}_3)|},$$

其中 $\bar{n} = (x, y, z), z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \cos(\bar{n}, \bar{e}_3) = z$. 因此得

$$\mu(Q) = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

转换到极坐标, 得

$$\mu(Q) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1 - r^2}} = \pi \int_0^1 \frac{dr^2}{\sqrt{1 - r^2}} = \pi \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\pi.$$

2. 由方程

$$\bar{r} = \bar{r}(\varphi, \theta) = ((b + a\cos\theta)\cos\varphi, (b + a\cos\theta)\sin\varphi, a\sin\theta), b > a$$

在参数变化的区域

$$D = \{(\varphi, \theta) | 0 \leqslant \varphi < 2\pi, 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$$

上给出的二维环面 $Q \subset \mathbb{R}^3$ 的面积.

我们有

$$\begin{aligned}
\bar{r}'_\varphi &= (-(b + a\cos\theta)\sin\varphi, (b + a\cos\theta)\cos\varphi, 0),\\
\bar{r}'_\theta &= (-a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta),\\
E &= (\bar{r}'_\varphi, \bar{r}'_\varphi) = (b + a\cos\theta)^2, F = (\bar{r}'_\varphi, \bar{r}'_\theta) = 0,\\
G &= (\bar{r}'_\theta, \bar{r}'_\theta) = a^2, \sqrt{EG - F^2} = a(b + a\cos\theta).
\end{aligned}$$

由此得到

$$\mu(Q) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b + a\cos\theta) d\theta = 4\pi^2 ab.$$

§16. 在 n 维欧几里得空间中的 m 维曲面的面积

设 m, n 都是自然数, $1 \leqslant m < n$.

设 D 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界的若尔当可测集, 映射 $\bar{r}$ 是 D 到 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 的可逆映射且在 D 上除了一若尔当测度为零的子集 L 外处处连续. 称此 Q 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 m 维曲面.

说光滑曲面 Q 非退化, 如果映射 $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ 的雅可比矩阵处处满秩, 即处处有秩 m.

为简单起见, 设集合 D 是立方体, 并设 T 是把它等分为边长为 h 的立方体 $D_{\bar{k}}$ 的分法. 还设 $\bar{x}_{\bar{k}}$ 是立方体 $D_{\bar{k}}$ 的左下顶点.

令 $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{\bar{k}}(\bar{x}) = d\bar{r}(\bar{x}_{\bar{k}}), R_{\bar{k}} = \bar{\rho}_{\bar{k}}(D_{\bar{k}})$ 且定义积分和

$$\sigma(T) = \sum_{\bar{k}} \mu(R_{\bar{k}}).$$

定义 25 称

$$\mu(Q) = \lim_{\Delta_T \to 0} \sigma(T)$$

为曲面 Q 的面积.

为了计算 $\sigma(T)$, 必须找出平行多面体 $R_{\bar{k}}$ 的体积 $\mu(R_{\bar{k}})$. 此多面体由向量 $\bar{a}_1 = h\bar{r}'_{x_1}, \cdots, \bar{a}_m = h\bar{r}'_{x_m}$ 构成

由线性代数知

$$\mu(R_{\bar{k}}) = \sqrt{\Gamma(\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_m)} = V_m,$$

其中 $\Gamma_m = \Gamma(\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_m)$ 是克拉默矩阵的行列式

$$\Gamma(\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_m) = \begin{vmatrix} (\bar{a}_1, \bar{a}_1) & \cdots & (\bar{a}_1, \bar{a}_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\bar{a}_m, \bar{a}_1) & \cdots & (\bar{a}_m, \bar{a}_m) \end{vmatrix}.$$

我们引入 V_m 的计算公式. 当 $m = 1,2$ 时, 显然 $\sqrt{\Gamma_1} = \|\bar{a}_1\| = V_1, \sqrt{\Gamma_2} = V_1 \cdot h_2 = V_2$. 因此 $h_2^2 = \Gamma_2/\Gamma_1$. 我们来证明 $h_m^2 = \Gamma_m/\Gamma_{m-1}$, 其中 h_m 是向量 $\bar{a}_m$ 到以 $\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_{m-1}$ 为基的 $m-1$ 维空间 $L = \left\{\sum\limits_{k=1}^{m-1} \alpha_k \bar{a}_k \middle| \alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, \cdots, m-1\right\}$ 的映射.

把 $\bar{a}_m$ 表示成 $\bar{a}_m = \bar{b}_m + \bar{h}_m$, 其中 $\bar{b}_m \in L, \bar{h}_m \perp L$. 那么下面的等式链成立:

$$\frac{\Gamma_m}{\Gamma_{m-1}} = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{m-1} & (\bar{a}_1, \bar{a}_m) \\ \cdots & \cdots \\ (\bar{a}_m, \bar{a}_1) & (\bar{a}_m, \bar{a}_m) \end{vmatrix}}{\Gamma_{m-1}} = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{m-1} & (\bar{a}_1, \bar{b}_m) \\ \cdots & \cdots \\ (\bar{b}_m, \bar{a}_1) & \|b_m\|^2 + \|h_m\|^2 \end{vmatrix}}{\Gamma_{m-1}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} (\bar{a}_1, \bar{a}_1) & \cdots & (\bar{a}_1, \bar{a}_{m-1}) & (\bar{a}_1, \bar{b}_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\bar{a}_{m-1}, \bar{a}_1) & \cdots & (\bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}) & (\bar{a}_{m-1}, \bar{b}_m) \\ (\bar{b}_m, \bar{a}_1) & \cdots & (\bar{b}_m, \bar{a}_{m-1}) & \|b_m\|^2 \end{vmatrix}}{\Gamma_{m-1}} + \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{m-1} & 0 \\ (\bar{b}_m, \bar{a}_1) \cdots & \|h_m\|^2 \end{vmatrix}}{\Gamma_{m-1}} = \|h_m\|^2,$$

因为第一个被加项的分子中的行列式等于零 (它的最后一行是其他各行的线性组合).

于是, 平行多面体 $R_{\bar{k}}$ 的体积 $V_m = \mu(R_{\bar{k}})$ 等于

$$V_m = V_{m-1} h_m = \sqrt{\Gamma_{m-1}} \cdot \sqrt{\frac{\Gamma_m}{\Gamma_{m-1}}} = \sqrt{\Gamma_m}.$$

我们指出,$\Gamma_m > 0$, 这从等式

$$\frac{\Gamma_m}{\Gamma_{m-1}} = h_m^2 > 0, \Gamma_1 = \|\bar{a}_1\|^2 > 0$$

推出, 因此

$$\sigma(T) = \sum_{\bar{k}} \sqrt{\Gamma(\bar{r}'_{x_1}(\bar{x}_{\bar{k}}), \cdots, \bar{r}'_{x_m}(\bar{x}_{\bar{k}}))}\mu(D_{\bar{k}}).$$

在此等式中令 $\Delta_T \to 0$ 过渡到极限, 就得到计算 n 维空间中的 m 维曲面的面积的公式:

$$\mu(Q) = \int_D \cdots \int \sqrt{\Gamma(\bar{r}'_{x_1}(\bar{x}), \cdots, \bar{r}'_{x_m}(\bar{x}))}dx_1 \cdots dx_m.$$

当 $m=1$ 时我们得到光滑曲线的长度公式 $\mu(Q)=\int_D \|\bar{r}'(t)\|dt$, 而当 $m=n$ 时就转化成 n 重积分中的变量变换公式:

$$\mu(Q)=\int\limits_D\cdots\int\sqrt{\Gamma}dx_1\cdots dx_m=\int\limits_D\cdots\int|J_{\bar{r}}(\bar{x})|dx_1\cdots dx_m,$$

其中 $J_{\bar{r}}(\bar{x})$ 是映射 $\bar{r}=\bar{r}(\bar{x})$ 的雅可比式.

注 1. 设 $A=(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_m)$ 是由 n 维空间中的 m 个向量组成按列排成的矩阵, 而 A^t 是它的转置矩阵. 那么从比内–柯西公式知

$$\Gamma_m=V_m^2=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\begin{vmatrix} a_{i_{1,1}}a_{i_{1,2}} & \cdots & a_{i_{1,m}} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{i_{m,1}}a_{i_{m,2}} & \cdots & a_{i_{m,m}}\end{vmatrix}^2.$$

此等式表明, 平行多面体的体积的平方等于它到所有的坐标 m 维子空间的投影的体积的平方之和 (毕达哥拉斯定理的推广).

2. 成立阿达马不等式 $\Gamma(\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_m)\leqslant\Gamma(\bar{a}_1)\cdots\Gamma(\bar{a}_m)$, 其中等号仅当对于一切 $1\leqslant i,j\leqslant m, i\neq j, \bar{a}_i$ 与 $\bar{a}_j$ 正交时成立.

3. 根据定义, m 维曲面的面积不依赖于参数的选取.

第二十章　曲面积分

第十讲

§1. 曲线积分

曲线积分是沿着 n 维空间中的曲线 L 的积分. 我们将考虑两种类型的曲线积分: 第一型和第二型曲线积分.

作一些假定. 为简单起见, 我们认为曲线 L 所在的空间是二维的. 曲线 L 本身被认为是逐段光滑的, 也就是说它可以划分成有限个光滑曲线段. 我们仅考察一个这样的段.

大家知道, 曲线 L 是某个线段 $[a,b]$ 在映射 $\bar{r}=\bar{r}(t), t\in[a,b]$ 之下的像, 其中 $\bar{r}(t)=(x(t),y(t))$, 且 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的光滑函数. 此外, 线段 $[a,b]$ 的内点映成曲线上的 "内" 点, 而线段的端点 a 和 b 映成曲线 L 的端点 A 和 $B, A=\bar{r}(a), B=\bar{r}(b)$. 我们还假定曲线 L 非退化, 即不含奇点. 换言之, 对于一切 $t\in[a,b]$, 向量 $\bar{r}'(t)$ 异于零.

设 T 是闭区间 $[a,b]$ 的一个标码分法:$a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b, \xi_1,\cdots,\xi_m$ 是标码点,$x_k=x(\xi_k), y_k=y(\xi_k), k=1,\cdots,m; \Delta l_k$ 是曲线 L 上的 $\Delta_k=[t_{k-1},t_k]$ 的像的那一段的长度, 即

$$\Delta l_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$$

设函数 $g(x,y)$ 在曲线 L 上定义.

定义 1 若当 $\Delta_T \to 0$ 时积分和

$$\sigma_1(T) = \sum_{k=1}^{m} g(x_k, y_k)\Delta l_k$$

有极限, 则此极限值叫作函数 $g(x,y)$ 沿曲线的第一型积分.

此积分记作

$$I_1 = \int_L g(x,y)dl.$$

考虑积分和

$$\sigma_2(T) = \sum_{k=1}^{m} g(x_k, y_k)\Delta x_k, \Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}).$$

定义 2 若当 $\Delta_T \to 0$ 时积分和 $\sigma_2(T)$ 有极限 I_2, 则 I_2 叫作函数 $g(x,y)$ 沿曲线从 A 到 B 的方向关于第一坐标的第二型积分.

记作

$$I_2 = \int_{AB} g(x,y)dx.$$

类似地还定义一个第二型积分 (关于第二坐标的积分),

$$I_3 = \int_{AB} g(x,y)dy.$$

对于积分 I_2 和 I_3, 常使用下面的记号:

$$I_2 = \int_{AB} P(x,y)dx, I_3 = \int_{AB} Q(x,y)dy.$$

表达式

$$I = \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy.$$

叫作线性微分形式 $Pdx + Qdy$ 沿曲线 $L = AB$ 的**一般的第二型曲线积分**(这里曲线通过它的始点和终点来标记).

§2. 曲线积分的性质

设 $x = x(t)$ 是常数. 那么

$$I_2 = \int_{AB} P(x,y)dx = 0.$$

实际上, 对于任意的分法 T, 总有 $\Delta x_k = 0$, 从面 $\sigma_2(T) = 0$. 由此推出 $I_2 = 0$.

定理 1 (曲线积分的值用黎曼积分表示) 设函数 $g(x,y)$ 在 L 上连续. 那么曲线积分 I_1, I_2, I_3 都存在且分别等于

$$I_1 = \int_a^b g(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt,$$
$$I_2 = \int_a^b g(x(t), y(t))x'(t)dt,$$
$$I_3 = \int_a^b g(x(t), y(t))y'(t)dt.$$

► 只考虑积分 I_1. 积分

$$\int_a^b g(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

的积分和 $\sum_1(T)$ 与曲线积分的积分和 $\sigma_1(T)$ 的差别在于, 代替 Δl_k 而取 $\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2}\Delta t_k$, 其中 $\xi_k \in \Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$, 即曲线长度在点 ξ_k 处对于变量 t 的增量 Δt_k 的微分. 往下可以援引斯蒂尔切斯积分.

$$I_1 = \int_a^b g(x(t), y(t))dl(t)$$

的定义, 其中 $l(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2}du$, 而据此完成积分等式的证明. 但我们还是给出此式的直接的证明.

根据导函数 $l'(t)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的连续性, 它在此区间是一致连续的. 那么对于任意的 $t \in [t_{k-1}, t_k]$ 和 $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, 有 $|l'(t) - l'(\xi_k)| \leqslant \omega(\Delta t_k)$, 且 $\lim\limits_{z\to 0} \omega(z) = 0$. (这里 ω 代表函数 l' 在 $[a,b]$ 上的连续模 $\omega(\delta) = \sup\{|l(s) - l(t)| : |s-t| \leqslant \delta\}, \delta > 0$, 译者注).

由此得

$$\begin{aligned}\Delta l_k &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} l'(t)dt = l'(\xi_k)\Delta t_k + \int_{t_{k-1}}^{t_k} (l'(t) - l'(\xi_k))dt \\ &= l'(\xi_k)\Delta t_k + O(\omega(\Delta t_k)\Delta t_k).\end{aligned}$$

由于 $g(x,y)$ 在紧致集 L 上连续, 故它在 L 上有界, 即存在数 $M > 0$, 使得对于一切 $(x,y) \in L, |g(x,y)| \leqslant M$.

于是

$$\begin{aligned}\sigma_1(T) &= \sum_k g(x_k, y_k)\Delta l_k = \sum_k g(x_k, y_k)l'(\xi_k)\Delta t_k + O\left(\sum_k M\Delta t_k \omega(\Delta t_k)\right) \\ &= \sum\nolimits_1(T) + O(R),\end{aligned}$$

其中

$$|R| \leqslant M \max_k \omega(\Delta t_k) \sum_k \Delta t_k = M(b-a) \cdot \max_k \omega(\Delta t_k).$$

由于当 $\Delta_T \to 0$ 时 $R \to 0$, 所以 $\sigma_1(T)$ 和 $\sum_1(T)$ 同时收敛到同一个极限. 积分 I_1 的表达式获证. ◀

定理 1 给出了计算曲线积分的统一的方法. 此定理的下述推论都通过把曲线积分转化为黎曼积分而得到.

1° 成立下述等式:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha_1 + Q\cos\alpha_2)dl,$$

其中 $\cos\alpha_1 = (\bar{\tau}, \bar{e}_1) = \dfrac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}, \cos\alpha_2 = (\bar{\tau}, \bar{e}_2) = \dfrac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}; \bar{\tau} = (x', y')$ 是曲线 L 在点 (x, y) 处的切向量,$\bar{e}_1$ 和 $\bar{e}_2$ 是沿坐标轴 Ox 和 Oy 方向的单位向量.

2° 若对于一切点 $(x, y) \in L$ 都成立不等式 $g_1(x, y) \leqslant g_2(x, y)$, 则有 $\int_L g_1 dl \leqslant \int_L g_2 dl$.

3° 成立不等式 $\left|\int_L g dl\right| \leqslant \int_L |g| dl$.

4° 若函数 g 在曲线 L 上连续, 则存在点 $\xi \in L$ 使得 $\int_L g dl = g(\xi)\mu(L)$, 其中 $\mu(L)$ 是曲线 L 的长度.

第一型和第二型曲线积分的值都与参数的选取无关, 因为在它们的定义中的积分和与参数的选取无关.

特别地, 积分 I_1 不依赖于是把 A 还是 B 看作是曲线 L 的始点 (相应地把 B 还是 A 看作终点, 例如, 可以通过关系式 $t = a + b - u$ 来重新定义参数).

同时, 成立等式 $\int_{AB} Pdx = -\int_{BA} Pdx, \int_{AB} Qdy = -\int_{BA} Qdy$, 也就是说, 第二型曲线积分当曲线循行方向改变时, 积分值改变符号.①

我们来考虑曲线 L 的两个参数表示:$\bar{r} = \bar{r}(t), t \in [a, b]$, 以及 $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(u), u \in [c, d]$. 设 $t = t(u)$ 是从 $[c, d]$ 到 $[a, b]$ 的光滑映射. 那么 $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(u) = \bar{r}(t(u)), x_1 = x(t(u))$.

我们指出, 导函数 $t'(u)$ 在整个闭区间 $[c, d]$ 上有同一个符号, 不然的话, 根据魏尔斯特拉斯定理, 将会有某点 $u_0 \in (c, d)$ 使 $t'(u_0) = 0$. 那时将有 $\bar{r}'_u(u_0) = \bar{r}'_t(t(u_0))t'(u_0) = 0$, 于是曲线 L 就有奇点了, 也就是说它是退化的, 而事实不是这样.

当 $t'(u) > 0$ 时, 必有 $t(c) = a, t(d) = b$. 实际上, 从拉格朗日定理得知, 对于某 $\xi \in (c, d)$ 有 $t(d) - t(c) = t'(\xi)(d - c)$. 因此 $t(d) > t(c)$. 而这表明 $t(c) = a, t(d) = b$.

①这里原文是 $\int_{AB} Pdx = -\int_{AB} Qdy$ —— 译者注.

往下我们使用定理 1 和在黎曼积分中进行变量变换的定理. 我们得到一串关于第二型积分的等式

$$\begin{aligned}\int_L g(\bar{r}(t))dx(t) &= \int_a^b g(\bar{r}(t))x'(t)dt \\ &= \int_c^d g(\bar{r}(t(u)))x'(t(u))t'(u)du \\ &= \int_c^d g(\bar{r}_1(u))x_1'(u)du \\ &= \int_L g(\bar{r}_1(u))dx_1(u).\end{aligned}$$

在 $t'(u) < 0$ 的情形有 $t(c) = b, t(d) = a$. 重复上面的论述, 得知在这种情况下从一个参数转化为另一个参数时成立等式

$$\begin{aligned}\int_L g(\bar{r}(t))dx(t) &= -\int_c^d g(\bar{r}(t(u)))x'(t(u))t'(u)du \\ &= -\int_c^d g(\bar{r}_1(u))x_1'(u)du \\ &= -\int_{BA} g(\bar{r}_1)dx_1{}^{①} = \int_L g(\bar{r}_1)dx_1.\end{aligned}$$

式中 $A = \bar{r}_1(c) = \bar{r}(b), B = \bar{r}_1(d) = \bar{r}(a), BA$ 代表 L 沿与原来方向 (从 A 到 B) 相反方向循行. 此式恰说明第二型曲线积分与第一型曲线积分一样都与曲线的参数表示方式无关.

在维数多于 2 的空间中, 对于曲线积分, 类似的性质都成立. 例如在 3 维情形

$$\int_L g(x,y,z)dl = \int_a^b g(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt,$$

$$\begin{aligned}\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz &= \int_a^b Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)dt \\ &= \int_L P\cos\alpha_1 + Q\cos\alpha_2 + R\cos\alpha_3 dl,\end{aligned}$$

其中 $\cos\alpha_k = (\tau, \bar{e}_k), \tau = \dfrac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|}, k = 1,2,3.$

到此, 我们结束对于曲线积分一般性质的研究.

---

① 原文此处为 $-\int_L g(\bar{r}_1)dx_1$. 其实曲线的参数表示与直角坐标系的选取是两个概念. 参数 t 换为 u 时, u 的增加对应于 t 的减小, 从而改变了 L 的循行方向 ——译者注.

第十一讲

§3. 沿闭围道的第二型曲线积分. 格林公式

根据第二型积分的加性, 对于任意的曲线 $L_1 = AB$ 和 $L_2 = BC$, 只要曲线 $L = L_1 \cup L_2$ 没有重 (chóng) 点, 就有

$$\int_{AB} g dx + \int_{BC} g dx = \int_{AC} g dx.$$

就是根据这个公式, 也定义了当 A 与 C 重合时的积分. 此时, 曲线 L_1 与 L_2 的联结 $L = L_1 \cup L_2$ 叫作闭曲线.

定义 3 *曲线 L 叫作闭的逐段光滑曲线(无重点的), 如果*

1) $L = L_1 \cup L_2$;

2) *L_1 和 L_2 都是逐段光滑的曲线, 它们的两端点分别重合;*

3) *曲线 L_1 和 L_2 没有公共点.*

如果在曲线 L_1 上定义了循行方向, 即确定了始点 A 和终点 B, 而在曲线 L_2 上以 B 为始点, 以 A 为终点, 那么在 L 上就给定了循行方向, 使得对于任何不同的三点 $A_1, A_2, A_3 \in L$, 下列两个循行次序: $A_1A_2A_3A_1$ 和 $A_1A_3A_2A_1$ 总有一个合乎 L 的循行方向.

由于在任何闭曲线 L 上, 确切地有两个不同的循行方向, 其中一个自然地认为是正方向, 而另一个被认为是负方向.

我们指出, 此时对于微分形式 $Pdx + Qdy$ 沿闭曲线 L 按正方向循行时的积分 I, 使用记号

$$I = \oint\limits_L Pdx + Qdy.$$

我们来确定如何选取闭曲线循行的正方向. 首先观察圆周 $L: x^2 + y^2 = 1$, 这个重要的例子. 作为圆周循行的正方向, 取 "逆时针方向", 它是这样定义的, 把圆周分成上半圆周 $L_1: x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0$ 和下半圆周 $L_2: x^2 + y^2 = 1, y \leqslant 0$. 在 L_1 上作为始点取 $A = (1,0)$, 而终点是 $B = (-1,0)$; 对于下半圆周 L_2, 则以 B 为始点,A 为终点.

在圆周 L 上可以通过指定它上面任取的点 A 处的切线方向, 即切向量 $\bar{\tau}$ 来确定 L 的循行方向.

我们考察空间 $\mathbb{R}^3$ 中 xOy 平面上的圆周 L, 设在它的每点处给定了圆周的外法向 $\bar{n}$, 它位于平面 xOy 内, 以及圆周的切向量 $\bar{\tau}$. 如果沿 Oz 轴的单位向量 $\bar{e}_3$(基向

量) 的方向与矢量积 $[\bar{n},\bar{\tau}]$ 的方向一致, 则说向量 $\bar{\tau}$ 给定了圆周 L 的循行正方向 (简称正向).

我们把圆周的这个性质作为定义一般曲线 L 的循行正方向的基础.

定义 4 设闭的逐段光滑的无重点曲线 L 是平面 xOy 上的凸集 D 的边界. 设 $\bar{e}_3$ 是 Oz 轴的基向量. 在曲线 L 的每点处[①]给定切向量 $\bar{\tau}$ 和外法向向量 $\bar{n}$. 如果向量 $\bar{e}_3$ 的方向与矢量积 $[\bar{n},\bar{\tau}]$ 总是一样的, 则说向量 $\bar{\tau}$ 给出了围道 L 的循行正方向.

我们的当务之急是证明格林公式. 格林公式给出沿平面区域 D 的边界, 平面闭区线 L 的第二型曲线积分与沿区域 D 的二重积分之间的联系. 为简单起见, 我们考虑凸区域 D 的情形.

定理 2 (格林公式) 设区域 D 是凸的, 若尔当可测的, 紧致的, 其边界 $L=\partial D$ 是闭的非退化逐段光滑的曲线. 还设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 都在 D 上连续, 且偏导函数 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 都在 D 上连续. 那么成立公式

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

其中曲线 L 沿正方向循行.

► 仅证等式

$$\oint_L Pdx=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

等式

$$\oint_L Qdy=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy.$$

的证明是类似的.

设线段 $[a,b]$ 是区域 D 到 Ox 轴的投影. 通过点 $(a,0)$ 和 $(b,0)$ 作竖直的直线 $x=a$ 和 $x=b$. 根据集合 D 的凸性, 其边界 $L=\partial D$ 被分成四部分: 位于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 上的线段 L_1 和 L_3(它们当中的每个都可仅由单独一个点组成), 以及位于这两条直线所夹长条中的曲线 L_2 和 L_4.

在曲线 L_1 和 L_3 上,x 的值分别为常数, 因此

$$\int_{L_1}Pdx=\int_{L_3}Pdx=0.$$

对于任何 $x_0\in(a,b)$, 直线 $x=x_0$ 与曲线 L_2 和 L_4 中的每条都恰只相交于一个点 (根据 D 的凸性), 分别记作 $(x_0,\varphi_1(x_0))$ 和 $(x_0,\varphi_2(x_0))$. 那么曲线 L_2 是函数 $y=\varphi_1(x)$ 的图像, 面曲线 L_4 是函数 $y=\varphi_2(x)$ 的图像.

[①]当然不光滑的点除外 —— 译者注.

我们指出, 从曲线 L 的逐段光滑性推出函数 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的逐段光滑性.

从曲线积分用黎曼积分表示的定理得到

$$\int_{L_2} P(x,y)dx = \int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx,$$
$$\int_{L_4} P(x,y)dx = -\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx.$$

由此得到

$$\int_{L_2\cup L_4} P(x,y)dx = \int_a^b (P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x)))dx = H.$$

由于函数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 上连续, 根据牛顿-莱布尼茨公式有

$$P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x)) = -\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

因此

$$H = -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

由于 $\int_{L_1} Pdx = \int_{L_3} Pdx = 0$, 所以成立 $H = \oint_L Pdx$. ◄

我们指出, 根据积分的加性, 格林公式对于作为有限个凸区域的并集的区域也成立.

例 1. 区域 D 的面积, 根据格林公式, 通过曲线积分表示如下:

$$\mu(D) = \oint\limits_L xdy = -\oint\limits_L ydx = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx.$$

2. 设 $\varphi: D_0 \to D$ 是从平面区域 D_0 到平面区域 D 的可逆的光滑映射. 还设映射的雅可比式 $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 在区域 D_0 上不变符号且 $\varphi(\partial D_0) = \partial D$. 此外, 设 $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$ 在 D_0 上连续. 我们从例 1 的公式出发来计算区域 D 的测度那么

$$\mu(D) = \oint\limits_{\partial D} xdy.$$

接着, 设给定曲线 ∂D_0 的参数表示 $u = u(t), v = v(t), a \leqslant t \leqslant b$. 那么, 曲线 ∂D 对应地由参数方程 $x = x(u(t), v(t)), y = y(u(t), v(t))$ 给出.

由曲线积分通过黎曼积分的表达式得

$$\mu(D) = \oint\limits_{\partial D} xdy = \int_a^b x(t)\frac{dy(t)}{dt}dt$$
$$= \int_a^b x(t)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt.$$

而最后的积分可以表示成沿曲线 ∂D_0 的积分. 那么

$$\mu(D)=\varepsilon\oint\limits_{\partial D_0}x\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right),$$

其中, 若曲线 ∂D_0 与 ∂D 有相同的循行方向, 则 $\varepsilon=1$, 而当 ∂D_0 与 ∂D 的循行方向相反时, 取 $\varepsilon=-1$.

使用格林公式于最后的积分, 得

$$\mu(D)=\varepsilon\oint\limits_{\partial D_0}x\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)=\varepsilon\iint\limits_{D_0}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(x\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(x\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right)dudv$$
$$=\varepsilon\iint\limits_{D_0}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{dy}{dv}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dy}{du}\right)dudv=\varepsilon\iint\limits_{D_0}Idudv.$$

由于雅可比式不变号且 $\mu(D)\geqslant 0$, 所以 $\varepsilon I=|I|$. 因此

$$\mu(D)=\iint\limits_{D_0}|I|dudv.$$

这样就得到了平面区域在曲线坐标中计算面积的公式.

第十二讲

§4. 曲面积分

考察 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑曲面 D. 我们假设 D 在每一点都不退化, 也就是说在它的参数表示 $\bar r=\bar r(u,v),(u,v)\in D_0$ 中雅可比矩阵总是满秩, 即秩等于 2 的.

先假定区域 D_0 是正方形. 把它等分成正方形 $P_{k,l}$ 并作一标码分法 V, 以 $P_{k,l}$ 的左下顶点 $(u_{k,l},v_{k,l}),k,l=1,\cdots,n$ 为标码. 记 $P_{k,l}$ 的边长为 $\delta(\delta^2=\frac{1}{n^2}\mu(D_0))$. 令 $D_{k,l}=\bar r(P_{k,l})$, 并考虑曲面 D 在点 $\bar r_{k,l}=\bar r(u_{k,l},v_{k,l})$ 处的切平面对应于正方形 $P_{k,l}$ 的那一 $R_{k,l},k,l=1,\cdots,n$.

在曲面 D 的点 $\bar r(u,v),(u,v)\in D_0$ 处定义着 D 的两个切向量 $\bar r_1$ 和 $\bar r_2$, 它们分别对应于雅可比矩阵 $J_{\bar r}(u,v)$ 的第一列和第二列, 即

$$\bar r_1=\bar r'_u(u,v)=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial u}\end{pmatrix},\bar r_2=\bar r'_v(u,v)=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}.$$

根据雅可比矩阵不退化这一条件知, 对于任何点 $(u,v)\in D_0$, 矢量积 $[\bar{r}_1(u,v),\bar{r}_2(u,v)]$ 都异于零向量. 我们把曲面上使雅可比矩阵的秩小于 2 的点叫作曲面的**奇点**.现在考虑的是无奇点的曲面.

考虑向量

$$\bar{n}=\frac{[\bar{r}_1,\bar{r}_2]}{\|[\bar{r}_1,\bar{r}_2]\|}.$$

定义 5 把向量 $\bar{n}=\bar{n}(\bar{r})$ 叫作对应于参数表示 $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ 的曲面 D 的法向量.

这个称号的由来是, 向量 $\bar{n}$ 与切向量 $\bar{r}_1$ 和 $\bar{r}_2$ 都垂直. 特别地, 当 $(u,v)=(u_{k,l},v_{k,l})$ 时, 向量 $\bar{n}$ 垂直于切平面 $R_{k,l}$.

如果 δ 是正方形 $P_{k,l}$ 的边长, 则 $R_{k,l}$ 是一个面积为 $\mu(R_{k,l})=\|[\bar{r}_1,\bar{r}_2]\|\delta^2$ 的平行四边形, 其中与曲面 D 相切的向量 $\bar{r}_1$ 和 $\bar{r}_2$ 在点 $\bar{r}(u_{k,l},v_{k,l})$ 处取值.

如果给定曲面 D 的另一个参数表示 $\bar{\rho}$, 那么等式 $\bar{n}(\bar{r})=\bar{n}(\bar{\rho})$ 以及 $\bar{n}(\bar{r})=-\bar{n}(\bar{\rho})$ 两者总有一个成立. 那么等于向量 $\bar{n}(\bar{r})$ 与 $\bar{n}(\bar{\rho})$ 的标量积的函数 $f(u,v)$ 总共取两个值 $+1$ 和 -1. 但此函数是 D_0 上的连续函数, 因此它或者恒等于 $+1$, 或者恒等于 -1. 这表明, 在改变参数表示时, 我们所定义的法向量或者在 D 的每点都不变, 或者在 D 的一切点同时改变成相反的方向. 因此说, 无奇点的光滑曲面对应于某个参数表示的曲面的法向量标示了该曲面的一个侧. 具有被标示的侧的曲面叫作**双侧曲面**.

定义 6 曲面 D 借助于参数表示而标示其一个侧, 叫作曲面 D 的定向(ориентация).

往下, 设在曲面 D 上给定了一个三个参数 $\bar{r}=(x,y,z)$ 的函数 $h(\bar{r})$. 考虑对应于标码分法 V 的如下四个积分和:

$$\sigma_0(V)=\sum_{k,l}h(\bar{r}_{k,l})\mu(R_{k,l});$$

$$\sigma_s(V)=\sum_{k,l}h(\bar{r}_{k,l})\mu(R_{k,l})(\bar{n},\bar{e}_s),\quad s=1,2,3.$$

由此, 特别得到下面的表达式:

$$\sigma_1(V)=\sum_{k,l}h(\bar{r}_{k,l})\cdot\mu(R_{k,l})\cos X=\sum_{k,l}h(\bar{r}_{k,l})A(u_{k,l},v_{k,l})\delta^2,$$

其中

$$\cos X=(\bar{n},\bar{e}_1),A(u,v)=\begin{vmatrix}y'_u & z'_u\\ y'_v & z'_v\end{vmatrix}.$$

类似地可以写出 $\sigma_2(V)$ 和 $\sigma_3(V)$ 的表达式, 只需把 $\cos X$ 换成 $\cos Y=(\bar{n},\bar{e}_2)$ 和 $\cos Z=(\bar{n},\bar{e}_3)$, 以及把 $A=A(u,v)$ 换成

$$B=B(u,v)=\begin{vmatrix}z'_u & x'_u\\ z'_v & x'_v\end{vmatrix}\text{和}C=C(u,v)=\begin{vmatrix}x'_u & y'_u\\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}.$$

法向量 $\bar{n}$ 可表示成

$$\bar{n}=\left(\frac{A}{\sqrt{\Gamma}},\frac{B}{\sqrt{\Gamma}},\frac{C}{\sqrt{\Gamma}}\right),\Gamma=A^2+B^2+C^2=EG-F^2.$$

定义 7　若当 $\Delta_V\to 0$ 时积分和 $\sigma_0(V)$ 有极限 I_0, 则称 I_0 为函数 $h(\bar{r})$ 沿曲面 D 的第一型曲面积分. 记之为

$$I_0=\iint_D h(\bar{r})dS.$$

定义 8　若当 $\Delta_V\to 0$ 时积分和 $\sigma_s(V)$ 有极限 $I_s, s=1,2,3$, 则称 I_s 为函数 $h(\bar{r})$ 沿曲面 D 对应于参数表示 $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ 的一侧的第二型曲面积分, $s=1,2,3$. 记之为

$$I_1=\iint_D h(\bar{r})dy\wedge dz, I_2=\iint_D h(\bar{r})dz\wedge dx, I_3=\iint_D h(\bar{r})dx\wedge dy.$$

这里符号 $\wedge$ 用来区分第二型曲面积分与通常的沿曲平面点集 D 的二重积分. 常常略去这个记号 (只要不产生歧义的话).

我们指出, 代替积分 I_1,I_2,I_3 中的微分形式, 可以引入形式

$$\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$$

并考虑此微分形式的第二型积分 $I=\iint\limits_D \omega$.

我们引入上述第一型和第二型积分的两个性质, 这两条性质直接从积分的定义推出.

1° 成立等式

$$\begin{aligned}I&=\iint_D Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy\\&=\iint_D (P\cos X+Q\cos Y+R\cos Z)dS,\end{aligned}$$

其中 $\cos X=(\bar{n},\bar{e}_1),\cos Y=(\bar{n},\bar{e}_2),\cos Z=(\bar{n},\bar{e}_3)$.

2°

定理 3 (曲面积分与二重积分的联系)　设函数 $h(\bar{r})$ 在光滑的, 不退化的 (无奇

点的), 若尔当可测的, 紧致的曲面 D 上连续, 那么成立下面的等式:

$$I_0=\iint_D h(\bar{r})dS=\iint_{D_0} h(\bar{r}(u,v))\sqrt{\Gamma}dudv,\quad \Gamma=EG-F^2;$$

$$\begin{aligned}I&=\iint_D Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy\\&=\iint_D(P\cos X+Q\cos Y+R\cos Z)dS\\&=\iint_{D_0}(PA+QB+RC)dudv.\end{aligned}$$

► 此处要证的, 本质上与曲线积分毫无区别, 因为积分号下的函数, 根据其在紧集 D 上的连续性, 是可积的. 因此当 $\Delta_V\to 0$ 时相应的积分和 $\sigma_0(V),\cdots,\sigma_3(V)$ 必定收敛到这些积分的值. ◄

注 在 n 维空间中定义曲面积分有点复杂 (主要是定向的概念比较复杂). 稍后我们再回到这个问题.

例 1. 考虑上半球面 $x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0$ 的 "外表面". 它可以表示成圆 $D_0=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 在映射

$$x=x, y=y, z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

之下的像.

我们证明 $\bar{n}=\bar{n}(\bar{r})=\bar{r}$. 实际上, 对于参数表示 $\bar{r}=\bar{r}(x,y)$ 有

$$\bar{r}'_x=(1,0,-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}),\bar{r}'_y=(0,1,-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}),$$

$$[\bar{r}'_x,\bar{r}'_y]=\begin{vmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3\\ 1 & 0 & -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\\ 0 & 1 & -\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\end{vmatrix}=\bar{e}_1\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\bar{e}_2\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\bar{e}_3.$$

因此

$$\bar{n}(\bar{r})=\frac{[\bar{r}'_x,\bar{r}'_y]}{\|[\bar{r}'_x,\bar{r}'_y]\|}=(x,y,z)=\bar{r}.$$

现计算 $I = \iint\limits_D z dx \wedge dy$. 用定理 3, 得

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D z\cos Z dS = \iint\limits_{D_0} z\cos Z \cdot \frac{dxdy}{\cos Z} \\
&= \iint\limits_{D_0} z(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}rdr = -\frac{2\pi}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \\
&= \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

2. 设曲面 D 由方程 $z=\varphi(x,y)$ 给出, 其中 $\varphi(x,y)$ 是 D_0 上的光滑函数, 且积分沿着曲面 D 的上侧进行, 也就是沿着使 $\cos Z>0$ 的一侧进行. 把 D 的这一侧标记为 D^+. 那么

$$\iint\limits_{D^+} h(x,y,z)dx\wedge dy = \iint\limits_{D_0} h(x,y,\varphi(x,y))dxdy.$$

§5. 曲面的定向与它的边界的方向的匹配

实质上, 我们只给出了当区域 D_0 是正方形时的曲面积分的定义. 对于第一型曲面积分, 这个定义可平庸地推广到曲面由有限块作为正方形的光滑映射的像的曲面在公共的边界处相毗邻而拼成的情形. 那时, 第一型曲面积分正是组成它的各块上的积分的总和. 经标准的论述, 我们就可从特殊情形过渡到对于任意的若尔当可测的紧致集合 D_0 的第一型曲面积分的定义. 不仅如此, 用这种方法还可以研究沿着空间立体的边界, 例如三维空间中立方体的表面, 或球的表面的第一型曲面积分. 在一切这样的情形, 都认为沿这样的曲面的第一型曲面积分的概念已经定义并且关于用二重积分表示这样的积分的定理也都成立.

定义 9 *曲面 D 叫作逐片光滑的, 如果它是连通的并且是有限个光滑曲面的并集, 这些光滑曲面的每一个都是具有逐段光滑的边界的凸的平面集合在光滑映射下的像, 并且任何两个这样的光滑曲面的公共点 (如果存在的话) 必定属于上述平面集合的边界的像.*

定义 10 *沿逐片光滑曲面的第一型曲面积分等于沿着它的光滑部分的积分和.*

沿逐片光滑曲面的第二型曲面积分的情形是比较复杂的, 因为这里必须协调它的各部分的定向. 我们来考虑这种情形.

我们引入一系列新的定义.

定义 11 *设集合 D_0 是凸的, $\Lambda=\partial D_0$ 是无重点的逐段光滑闭曲线. 光滑映射 $\bar{r}$ 把 D_0 映成光滑曲面 D. 称 Λ 在映射 $\bar{r}$ 之下的像 $\bar{r}(\Lambda)$ 为光滑曲面 D 的边界, 记作 $L=\partial D$.*

注 显然, 曲面 D 可以是平面集合, 且此时不必是凸集. 因此, 凸性不是实质性的限制. 因此, 可以认为集合 D_0 是凸集的像.

定义 12 说曲面 D 的参数表示 $\bar{r}$ 与它的边界 $L = \partial D$ 的方向相呼应 (或与它边界的方向相匹配), 如果依这个参数表示 $\bar{r}$, 曲线 L 的方向由它的逆像 Λ(曲面 D 的逆像 D_0 的边界) 的正方向产生.

注 若 $\bar{\tau} = \bar{r}'_t/|\bar{r}'_t|$ 是曲线 L 在点 A 处的切向量, 对应于参数表示 $\bar{r}$, 且 $\bar{n} = \bar{n}(\bar{r})$ 是曲面 D 在点 A 处的法向量, 那么曲线 L 的方向与对应的参数表示 $\bar{r}$ 相匹配指的是曲线 L 相对于向量 $\bar{n}$ 沿 "逆时针方向" "循行". 换言之, 向量 $\bar{b} = [\bar{\tau}, \bar{n}]$ 是曲线 L 的法向量, 位于曲面 D 的切平面内, 并且指向 D 到此切平面的投影的 "外面". 这与平面情形方向的匹配的定义完全相符.

定义 13 说逐片光滑曲面 D 是具有标示的一侧的双侧曲面, 如果它的各个不同的光滑块的参数表示使得任何两个相邻的块的公共边界按每块自己的参数表示所取的方向恰好彼此相反.

例 设曲面 D 是位于平面 xOy 内的平面图形. 考虑 D 的上侧并设 $D = D_1 \cup D_2$. 那么曲面 D, D_1, D_2 的定向与它们的边界 L, L_1, L_2 的方向相匹配, 如果这些曲线全都 "逆时针方向" 循行的话. 这时显然, 在边界 L_1 和边界 L_2 的公共部分上, 沿 L_1 的方向与沿 L_2 的方向是相反的.

我们来解释曲面 D 的定向与其边界 $L = \partial D$ 的方向相 "匹配" 的定义. 设给定曲面 D 的参数表示 $\bar{r}$,D 是平面集合 D_0 在映射 $\bar{r}$ 下的像. 还设参数表示 $u = u(t), v = v(t)$ 给出了边界 $\Lambda = \partial D_0$ 且产生正的方向. 那么边界 $L = \partial D$ 的参数表示:$\bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$ 借助于向量 $\bar{\tau}$ 给出了围道 (曲线)L 的循行方向, 我们称这个方向是与曲面 D 的侧相匹配的方向. 设给曲线 L 一个任意的另外的参数表示 $\bar{\rho}(t_1)$. 那么向量 $\bar{\tau}_1 = \bar{\rho}'_{t_1}/|\bar{\rho}'_{t_1}|$ 给出了围道 L 的循行方向. 如果向量 $\bar{\tau}$ 与 $\bar{\tau}_1$ 重合, 那么曲面 D 的定向和曲线 L 由参数 $\bar{\rho}(t_1)$ 确定的方向叫作是相匹配的, 或者叫作是与参数表示 $\bar{r}$ 相呼应的.

定义 14 函数 $h(\bar{r})$ 沿双侧的逐片光滑曲面 D 的标示的一侧的第二型曲面积分指的是沿一切组成曲面 D 的光滑片的相应的曲面积分的总和.

此定义推广了当曲面是正方形在光滑映射之下的像时第二型曲面积分的概念. 同时, 在这种情况下, 关于第二型曲面积分用二重黎曼积分表示的定理也成立.

注 1 (此注对于斯托克斯定理是重要的.) 上面所说的定理可用于处理形如

$$\iint\limits_D P dx \wedge dx, \iint\limits_D Q dy \wedge dy, \iint\limits_D R dz \wedge dz$$

的积分. 借助于该定理把这些积分归结为通常的二重积分, 得知, 对于任意的函数 P, Q, R 成立

等式

$$\iint_D Pdx \wedge dx = \iint_D Qdy \wedge dy = \iint_D Rdz \wedge dz = 0.$$

这个注记使我们可把格林公式写成下面紧凑的也是方便的形式:

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D (dP) \wedge dx + (dQ) \wedge dy.$$

这里 D 是凸曲域,∂D 是 D 的逐段光滑的取正的循行方向的边界, dP 和 dQ 是函数 P 和 Q 的微分. 这里积分 $\iint_D$ 不能理解为二重积分, 而应理解为沿平面曲面 D 的上侧的第二型曲面积分. 实际上, 那时有

$$\begin{aligned}\iint_D (dP) \wedge dx &= \iint_D (P'_x dx + P'_y dy) \wedge dx \\ &= \iint_D P'_x dx \wedge dx + \iint_D P'_y dy \wedge dx \\ &= -\iint_D P'_y dx \wedge dy.\end{aligned}$$

类似地得到

$$\iint_D (dQ) \wedge dy = \iint_D Q'_x dxdy.$$

选择平庸的参数表示 $x = x, y = y$, 最后的两个积分就可看作寻常的二重积分. 于是我们得到了以前所证的形式的格林公式.

注 2 我们指出, 借助于足够简单的公式给出的曲面也未必总是逐片光滑的. 例如带有顶点的锥面就属此列. 然而上面建立的一组定义使我们也能处理这种曲面上的积分. 为此可以使用与反常积分理论相近的模式. 在上述情况下, 把曲面积分的值定义为沿着锥面去掉其顶点的某邻域后的曲面上的积分当该邻域之半径趋于零时的极限.

第十三讲

§6. 斯托克斯公式

前面所说的格林公式不仅在平面情形成立, 而且在三维空间也成立, 此时它叫作斯托克斯公式.

定理 4 (斯托克斯公式) 设 D 是 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑的不退化的 (无奇点的) 曲面, 它是平面凸集 D_0 在映射 $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ 下的像, 这里映射 $\bar{r}$ 的坐标是二次连续可导函数. 设曲面 D 的边界 L 是逐段光滑的曲线, 它是集合 D_0 的逐段光滑边界 Λ 的像. 边界 L 的方向与参数表示 $\bar{r}$ 相呼应. 还设 P,Q,R 是 D 上的光滑函数. 那么成立公式

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_D (dP)\wedge dx+(dQ)\wedge dy+(dR)\wedge dz$$
$$=\iint\limits_D \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy.$$

► 根据曲面积分的线性性质, 只需考虑积分 $K=\oint\limits_L Pdx$ 的情形, 就是说, 只需证明公式

$$K=\oint\limits_L Pdx=\iint\limits_D (dP)\wedge dx=\iint\limits_D P'_z dz\wedge dx-P'_y dxdy=S.$$

设 $\bar{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 是曲面 D 的参数表示, 其中 $(u,v)\in D_0$. 此外, 区域 D_0 的边界 Λ 由逐段光滑的参数表示 $(u,v)=(u(t),v(t))$ 给出, 其中 $t\in[0,1]=I,(u(0),v(0))=(u(1),v(1))$. 此参数表示进而给出了曲线 L 的参数表示 $\bar{r}(u(t),v(t))$.

根据曲线积分由定积分表示的定理,

$$K=\oint\limits_L Pdx=\int_0^1 P(\bar{r}(u(t),v(t)))dx(u(t),v(t)).$$

根据同一定理, 右端的积分等于

$$K=\oint\limits_\Lambda P(\bar{r}(u,v))dx(u,v)=\oint\limits_\Lambda P(\bar{r}(u,v))(x'_u du+x'_v dv).$$

对积分 K 使用格林公式. 为此使用一阶微分形式的不变性以及函数 $x(u,v)$, $y(u,v),z(u,v)$ 的二阶偏导函数的连续性. 得到

$$dP(\bar{r}(u,v))=P'_x dx(u,v)+P'_y dy(u,v)+P'_z dz(u,v),$$
$$K=\oint\limits_\Lambda P(\bar{r}(u,v))dx(u,v)=\iint\limits_{D_0}(dP(\bar{r}(u,v)))\wedge dx(u,v),$$

从而

$$K=\iint\limits_{D_0} P'_z dz(u,v)\wedge dx(u,v)-P'_y dx(u,v)\wedge dy(u,v)=S_1,$$

这里 S_1 看作是沿平面区域 D_0 的上侧的第二型曲面积分. 然而在参数表示 $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ 之下, 两积分 S 和 S_1 给出同一个表达式. 为确认此事, 只需根据 $dx(u,v)=x'_u du+x'_v dv$ 等等而展开表达式 $dz(u,v)\wedge dx(u,v)$ 和 $dx(u,v)\wedge dy(u,v)$.

最后我们看到,S 和 S_1 归结为同一个二重积分

$$S=S_1=\iint\limits_{D_0}(P'_zB+P'_yC)dudv,①$$

其中

$$B=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, C=\begin{vmatrix} y'_u & x'_u \\ y'_v & x'_v \end{vmatrix}.②$$

这就证得等式 $K=S$. ◄

注 对平面曲面 D 施用斯托克斯公式, 我们就把格林公式推广到了作为凸集的像的区域的情形, 然后再使用这个结果来证明斯托克斯公式, 就可在定理 4 中认为区域 D_0 是凸的可测集的像.

§7. 高斯–奥斯特洛格拉德斯基公式

此公式是格林公式在三维空间中的类比.

定理 5 (高斯–奥斯特洛格拉德斯基公式) 设

1) 集合 $V\subset\mathbb{R}^3$ 是凸的, 若尔当可测的, 紧致的;

2) 集合 V 的边界 S 是不退化的 (无奇点的) 逐片光滑曲面;

3) 在集合 V 上给定光滑函数 $P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z), R=R(x,y,z)$.

那么成立公式

$$\oiint_{S^+}Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=\iiint\limits_V(P'_x+Q'_y+R'_z)dxdydz.$$

这里等式左端的积分是沿曲面 S 的外侧 S^+ 的第二型曲面积分, 而等式右端的积分是寻常的沿集合 V 的三重积分.

► 如同在证明格林公式时那样, 只考虑 $P\equiv 0, Q\equiv 0$ 的情形. 作曲面 S 到平面 xOy 的投影, 并记此投影为 D. 由于 V 是凸的, 任何平行于 Oz 轴的并与 D 相交的直线与 V 的交都是一条线段. 设 $(x,y)\in D$, 那么过 (x,y) 与 Oz 平行的直线与 V

①原文此处为 $\iint\limits_{D_0}(P'_zB-P'_yC)dudv$ —— 译者注.

②原文为 $C=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}$ —— 译者注.

的交的下端是 $(x,y,\varphi_1(x,y))$, 上端是 $(x,y,\varphi_2(x,y))$. 还设 $\Lambda=\partial D$ 代表 D 的边界. 那么曲面 S 划分为三个逐片光滑的部分:

$$S_1=\{(x,y,z)|(x,y)\in D, z=\varphi_1(x,y)\},$$
$$S_2=\{(x,y,z)|(x,y)\in D, z=\varphi_2(x,y)\},$$
$$S_3=\{(x,y,z)|(x,y)\in \Lambda, (x,y,z)\notin S_1\cup S_2\}.$$

这里, 对于曲面 S_1, 积分沿其下侧; 对于曲面 S_2 则沿其上侧; 最后对于曲面 S_3,S 的柱状部分, 积分所沿的一侧的法方向垂直于 Oz 轴且是 D 的外法向.

根据化曲面积分为二重黎曼积分的定理,

$$\iint\limits_{S_3} R dx\wedge dy=\iint\limits_{S_3} R\cos(\bar{n},\bar{e}_3)dS=0,$$

这是由于在 S_3 上 $\cos(\bar{n},\bar{e}_3)=0$. 还有

$$\iint\limits_{S_1} R dx\wedge dy=\iint\limits_{S_1} R\cos(\bar{n},\bar{e}_3)dS=-\iint\limits_{D} R(x,y,\varphi_1(x,y))dxdy,$$
$$\iint\limits_{S_2} R dx\wedge dy=\iint\limits_{S_2} R\cos(\bar{n},\bar{e}_3)dS=\iint\limits_{D} R(x,y,\varphi_2(x,y))dxdy.$$

根据牛顿–莱布尼茨公式, 对于固定的 $(x,y)\in D$, 有

$$R(x,y,\varphi_2(x,y))-R(x,y,\varphi_1(x,y))=\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dz.$$

因此,

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{S} R dx\wedge dy=\iint\limits_{S_2} R dx\wedge dy+\iint\limits_{S_1} R dx\wedge dy^{①}$$

$$=\iint\limits_{D} dxdy\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dz=\iiint\limits_{V}\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dxdydz. \quad ◀$$

注 1. 与格林公式的情形一样, 此公式可推广到 V 是凸区域在某光滑映射下的像的情形.

2. 显然, 若 V_1 和 V_2 满足定理 1 的条件, 而 $V=V_1\cup V_2$, 且 V_1 和 V_2 相切于一个逐片光滑的边界, 则定理 1 对于 V 也成立.

3. 可用与格林公式和斯托克斯公式类似的形式来表述高斯–奥斯特洛格拉德斯基公式, 即

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{S} P dy\wedge dz+Q dz\wedge dx+R dx\wedge dy$$
$$=\iiint\limits_{V}(dP)\wedge dy\wedge dz+(dQ)\wedge dz\wedge dx+(dR)\wedge dx\wedge dy.$$

---

①此处原文为 "$\oint\!\!\!\oint\limits_{S} Rdxdy=\oint\!\!\!\oint\limits_{S_2} Rdxdy-\oint\!\!\!\oint\limits_{S_1} Rdxdy$" —— 译者注.

然而这里需要引入某些新的概念. 对于 n 维空间中的 $k < n$ 维曲面, 上述形状的一般公式叫作**一般斯托克斯公式**, 其证明本质上与高斯–奥斯特洛格拉德斯基公式一样. 确实, 这时曲面的定向和它的边界的方向的匹配使问题变得更复杂.

4. 我们来定义作为空间凸体 V 的边界的逐片光滑曲面 S 的 "外法向".

设在点 $\bar{r} \in S$ 处存在法向量 $\bar{n}$, 那么从几何的考虑清楚地看到, 对于曲面 S 的上面部分 S_2 来说, 当 $n_3 \geqslant 0$ 时 $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 是外法向, 而对于曲面 S 的下面部分 S_1 来说则当 $n_3 \leqslant 0$ 时给出外法向.

对于与参数表示 $z = \varphi(x, y)$ 相呼应的法方向, 有

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi_x')^2 + (\varphi_y')^2}} > 0.$$

因此, 参数表示 $z = \varphi(x, y)$ 永远与曲面的 "上" 侧呼应. 所以在转化为二重积分时, 对于曲面 S_2 的情形, 我们在积分号前冠正号, 而在曲面 S_1 的情形则冠负号.

例 1 从定理 1 得到立体体积 V 用沿曲面 $S = \partial V$ 的曲面积分表示的式子:

$$V = \oiint\limits_{S^+} x dy \wedge dz = \oiint\limits_{S^+} y dz \wedge dx = \oiint\limits_{S^+} z dx \wedge dy.$$

这里曲面积分沿曲面的外侧进行.

为了确定曲面 S 的外侧, 应该通过曲面上的点作曲面的法线, 取此线上, 以该点为顶点, 指向凸体 V 的外部的方向为外法向.

例 2 (高斯积分) 设 S 是逐片光滑的, 不退化的, 若尔当可测的, 紧致的曲面. 设 P 是某固定点,M 是在曲面 S 上变化的点,$\bar{r} = \bar{r}(P, M)$ 是以 P 为始点 M 为终点的向径,$\bar{n}$ 是曲面在点 M 处的外法向. 那么

$$G = \iint\limits_{S} \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2} dS = \begin{cases} 4\pi, 若 P \in V \backslash S, \\ 2\pi, 若 P \in S, \\ 0, \quad 若 P \notin V. \end{cases}$$

先考虑 $P \notin V$ 的情形. 设 $M = (x, y, z), P = (a, b, c)$. 那么 $\bar{r} = (x-a, y-b, z-c)$, 在点 M 处曲面的法向量等于 $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. 于是

$$\cos(\bar{r}, \bar{n}) = \frac{(\bar{r}, \bar{n})}{\|\bar{r}\|} = \frac{(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma}{r}.$$

使用高斯–奥斯特洛格拉德斯基公式, 得

$$G = \iiint\limits_{V} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-a}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-b}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-c}{r^3}\right)\right] dxdydz.$$

还有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-a}{r^3}\right)=\frac{1}{r^3}-\frac{3(x-a)r'_x}{r^4},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-b}{r^3}\right)=\frac{1}{r^3}-\frac{3(y-b)r'_y}{r^4},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-c}{r^3}\right)=\frac{1}{r^3}-\frac{3(z-c)r'_z}{r^4}.$$

结果

$$G=\iiint\limits_V\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}{r^5}\right)dxdydz=0.$$

若 $P\in V\backslash S$, 则把 P 用整个含在 $V\backslash S$ 内的球 V_ε 含住. 用 S_ε 代表此球的表面. 根据上面的结果有

$$0=\iint\limits_{S\cup S_\varepsilon}\frac{\cos(\bar{r},\bar{n})}{r^2}dS=\iiint\limits_{V\backslash V_\varepsilon}0dV.^{①}$$

但由于在 S_ε 上的每点, 作为 $V\backslash V_\varepsilon$ 的表面 $S\cup S_\varepsilon$ 的外法向恰是 V_ε 的表面 S_ε 的内法向, 所以作为第二型积分时,

$$\iint\limits_{(S\cup S_\varepsilon)^+}=\iint\limits_{S^+}-\iint\limits_{S_\varepsilon^+}.$$

但因

$$\iint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\cos(\bar{r},\bar{n})}{r^2}dS=4\pi,$$

所以积分 G 在 $P\in V\backslash S$ 处的值为 4π.

对于 $P\in S$ 的情形可类似地处理.

例 3 (格林公式) 高斯–奥斯特洛格拉德斯基公式的一个引人注目的推论是在数学物理中具有重要用途的又一个格林公式.

设 u 和 v 是具有二阶连续偏导函数 $u''_{xx},u''_{yy},u''_{zz}$ 和 $v''_{xx},v''_{yy},v''_{zz}$ 的光滑函数. 还设 V 是凸的, 若尔当可测的, 紧致的集合, 其边界 ∂V 是逐片光滑的定向曲面. 此外, 设 $\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$ 是拉普拉斯算子, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 是沿曲面外法向 $\bar{n}$ 的方向导数. 那么成立下面的格林公式:

$$\iint\limits_{\partial V}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\iiint\limits_V(v\Delta u-u\Delta v)dV.$$

①原文把 $V\backslash V_\varepsilon$ 的表面写成 $S\backslash S_\varepsilon$, 只能会意而不达意 —— 译者注.

实际上, 根据高斯–奥斯特洛格拉德斯基公式有

$$A = \iiint\limits_V \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] dV$$

$$= \iint\limits_{\partial V} \left(u\frac{\partial v}{\partial x}\cos(\bar{n},\bar{e}_1) + u\frac{\partial v}{\partial y}\cos(\bar{n},\bar{e}_2) + u\frac{\partial v}{\partial z}\cos(\bar{n},\bar{e}_3)\right) dS$$

$$= \iint\limits_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n} dS.$$

另外

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

使用对于 A 已得的公式, 求得

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dV = \int\limits_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint\limits_V u\Delta v dV.$$

于此式中调换 u 和 v 的位置, 得

$$\iint\limits_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint\limits_V u\Delta v dV = \iint\limits_{\partial V} v\frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint\limits_V v\Delta u dV,$$

即

$$\iint\limits_{\partial V} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS = \iiint\limits_V (u\Delta v - v\Delta u) dV.$$

此公式叫作**格林公式**; 特别有益于对调和函数进行研究. 所谓调和函数, 指的是满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的函数 u.

第十四讲

§8. 仅依赖于其积分限的曲线积分

设 P, Q, R 是定义在凸区域上的光滑函数. 我们来叙述并证明, 沿着始点和终点固定的曲线的积分与路径无关的定理.

定理 6 设 L 是逐段光滑的不退化的曲线. 积分

$$I = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

不依赖于积分路径 (而只与曲线 L 的始点和终点有关) 的必要且充分的条件是存在函数 $h(x, y, z)$ 满足

$$dh = Pdx + Qdy + Rdz.$$

我们认为 P, Q, R, L 定义在某球 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 的内部.

► 必要性 设积分 I 不依赖于积分路径而只与其始点和终点有关. 固定 $\bar{r}_0$, 任取 $\bar{r}$. 沿着以 $\bar{r}_0$ 为始点,$\bar{r}_1$ 为终点的任何路径都得同一个积分值, 记为 $h(\bar{r}) = \int\limits_{\bar{r}_0\bar{r}} \omega$, 其中 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. 设 $\bar{r}_1$ 和 $\bar{r}$ 在平行于 Ox 轴的直线上. 那么

$$h(\bar{r}) - h(\bar{r}_1) = \int_L Pdx = \int_{x_1}^{x} P(t, y_1, z_1)dt.$$

关于 x 求导此式, 得

$$\frac{\partial h(\bar{r}_1)}{\partial x} = P(\bar{r}_1).$$

类似地得 $\dfrac{\partial h}{\partial y} = Q, \dfrac{\partial h}{\partial z} = R$. 即 $\omega = dh$.

充分性 设 L 是以 $\bar{r}_1$ 为始点 $\bar{r}_2$ 为终点的逐段光滑的不退化的曲线. 设 $\bar{r} = \bar{r}(t), t \in [0, 1]$ 是 L 的参数表示. 那么由曲线积分过渡到单变数函数的定积分, 得

$$\int_L dh = \int_0^1 h'_t(\bar{r}(t))dt = h(\bar{r}_2) - h(\bar{r}_1).$$

这表明, 全微分 (dh) 的积分只与路径的始点和终点有关. ◄

定理 7 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 的凸区域. 为使微分形式 $\omega = Pdx + Qdy$ 在 Ω 上是全微分 (即某二元函数的微分), 必要且充分的是对于 Ω 的一切点都成立等式 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

► 必要性 设 $\omega = dh$, 则等式 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 给出的是混合偏导数的等式. 必要性获证.

充分性 设成立 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. 令

$$h(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, v)dv,$$

那么

$$\frac{\partial h}{\partial x} = P(x, y).$$

根据莱布尼茨法则, 得

$$\frac{\partial h}{\partial y} = Q(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t, y)}{\partial y} dt = Q(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(t, y)}{\partial t} dt$$
$$= Q(x_0, y) + Q(x, y) - Q(x_0, y) = Q(x, y).$$

于是 $dh = \omega$. ◀

类似地可证下述命题.

定理 8 设 Ω 是凸区域. 微分形式 $\omega = Pdx + Qdy + Rdy$ 是全微分当且仅当成立等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

而一般说来, 在凸区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上微分形式 ω 是某函数 h 的全微分, 即 $\omega = dh$, 等价于 $d\omega = 0$.

例 设 $f(z)$ 是复变数 $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ 的函数, 取复数值

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv,$$

其中 u, v 是实值函数, 且 $f(z)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 的某区域 Ω 上的单值函数. 设 L 是简单的, 可求长的定向曲线, $L \subset \Omega$.

定义函数 $f(z)$ 沿曲线 L 的曲线积分:

$$I = \int_L f(z)dz = \int_L (u + iv)d(x + iy)$$
$$= \int_L (udx - vdy) + i\int_L (vdx + udy).$$

设函数 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 在区域 Ω 上是光滑的. 进而要求积分 I 不依赖于积分路径 L, 而只决定于它的始点 z_0 和终点 z. 根据定理 6 和定理 7, 此时有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

这些条件叫作**柯西–黎曼条件**. 我们指出, 当函数 u 和 v 在区域 Ω 上具有光滑性时, 这些条件是复变函数 $f = u + iv$ 在 Ω 上可微的充分必要条件.

那么, 设函数 u 和 v 是光滑的. 考虑积分

$$F(z) = \int_L f(z)dz = \int_{z_0}^{z} f(z)dz = U(x, y) + iV(x, y),$$

其中

$$U = U(x, y) = \int_{z_0}^{z} udx - vdy, V = V(x, y) = \int_{z_0}^{z} vdx + udy.$$

由此得到

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = u, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} = v.$$

所以, 函数 $F(z)$ 是可微的, 且

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u + iv = f(z).$$

于是, 函数 $F(z)$ 是函数 $f(z)$ 的原函数, 并且对于函数 $f(z)$ 的积分成立牛顿–莱布尼茨定理.

下面的定理是定理 6 和定理 7 的简单推论.

定理 9 设函数 $f(z)$ 在区域 Ω 上连续,$\Omega \subset \mathbb{C}$. 那么对于任何简单的可求长的定向围道 $L \subset \Omega$, 成立等式

$$\int_L f(z)dz = 0.$$

所得到的定理在单复变函数论中叫作**柯西基本定理.**

§9. 向量分析初步

考虑三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的凸区域 V. 设在此区域上定义了标量函数 (即数值函数)$h(\bar{u}), \bar{u} \in V$, 以及区域 V 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射 $\bar{\varphi}(\bar{u}), \bar{u} \in V$.

传统上, 在把分析应用于数学物理和数学力学时, 一系列联系于研究函数 $h(\bar{u})$ 和 $\bar{\varphi}(\bar{u})$ 的问题分离出来单独组成一章, 叫作**向量分析或(向量) 场论**. 这一章, 除了记号以外, 本质上不含任何新内容, 然而应该了解这些符号语言.

定义 15 函数 $h(\bar{u})$ 叫作区域 V 上的标量场, 而映射 $\bar{\varphi}(\bar{u})$ 叫作区域 V 上的向量场. 如果函数 $h(\bar{u})$ 和映射 $\bar{\varphi}(\bar{u})$ 都是光滑的, 则相应的场也叫作是光滑的.

下面我们认为 $h(\bar{u})$ 和 $\bar{\varphi}(\bar{u})$ 都是 V 上的光滑映射.

定义 16 向量场 $A(\bar{u}) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) = \mathrm{grad} h(\bar{u})$ 叫作标量场 $h(\bar{u})$ 的梯度.

定义 17 向量场 $h(\bar{u})$ 在点 $\bar{u}_0$ 处沿方向 l 的导数是

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(h(\bar{u}_0 + t\bar{e}) - h(\bar{u}_0)) = \frac{\partial h}{\partial l},$$

其中 $\bar{e}$ 是确定方向 l 的单位向量.

我们知道

$$\frac{\partial h(u)}{\partial l} = (\mathrm{grad} h(\bar{u}), \bar{e}).$$

例 1 满足条件 $h(\bar{u})=a$ 的一切点 $\bar{u}$ 的集合, 叫作函数 $h(\bar{u})$ 的**等高集**, 这里 a 是常数. 设等高集 $\{\bar{u}|h(\bar{u})=a\}$含有点 $\bar{u}_0$, 且与点 $\bar{u}_0$ 的一个邻域的交 Π_a 是一个光滑曲面. 那么在点 $\bar{u}_0$ 处沿与 Π_a 相切的任何方向 l 都有 $\dfrac{\partial h}{\partial l}=0$. 这是由于在 Π_a 上过点 $\bar{u}_0$ 具有切向量 $\bar{e}$ 与 l 的方向一致的曲线 L 上, 恒有 $h(\bar{u}_1)-h(\bar{u}_0)=0, \bar{u}_1\in L$. 由此推出

$$\frac{\partial h(\bar{u}_0)}{\partial l}=(\mathrm{grad}h(\bar{u}_0),\bar{e})=0.$$

因此, 如果向量 $\mathrm{grad}h(u_0)$ 不为零向量, 则函数 $h(\bar{u})$ 在点 $\bar{u}_0$ 处的梯度与等高曲面(简称等高面), Π_a 在 $\bar{u}_0$ 处的任何切向量都正交, 从而就说它与 Π_a 在点 $\bar{u}$ 处垂直.

例 2 考虑函数 $h(\bar{u})=f(r)$, 其中 $r=\|u-u_0\|$. 此函数的等高面 Π_a 是以 $\bar{u}_0$ 为中心半径为 a 的球面. 那么函数 $f(r)$ 的梯度向量取球面的法方向, 即沿着半径 $\bar{r}=\bar{u}-\bar{u}_0$ 的方向. 因此, $\mathrm{grad}f(r)=f'(r)\bar{r}/|r|$. 特别地 $\mathrm{grad}(-1/r)=\bar{r}/r^3$.

例 3 设在点 $\bar{u}_0$ 处有单位质量的探试质点, 而在点 $\bar{u}_j$ 处有质量为 mj的质点, $j=1,2,\cdots,k$. 设

$$\bar{r}_j=\bar{u}_j-\bar{u}_0,\ j=1,2,\cdots,k.$$

那么, 作用在探试质点上的引力等于

$$\bar{F}(\bar{u}_0)=m_1\frac{\bar{r}_1}{r_1^3}+\cdots+m_k\frac{\bar{r}_k}{r_k^3}.$$

从例 2 得

$$\bar{F}(\bar{u}_0)=\mathrm{grad}\left(-\sum_{j=1}^{k}\frac{m_j}{r_j}\right).$$

例 4 设在若尔当可测的紧致集合 $V\subset\mathbb{R}^3$ 上定义了物体V 的质量分布函数 $\rho(M), M\in V$, 且 $\rho(M)$ 是逐段连续的. 设当 $M\notin V$ 时 $\rho(M)=0$, 设 P 是某固定点, M 是任意变化的点, 并设 $\bar{r}=\bar{r}(P,M)=P-M, r(P,M)=\|\bar{r}(P,M)\|$. 那么作用在位于 P 处的单位质量的探试质点上的力, 根据与离散情形的类似, 等于

$$\bar{F}(P)=\iiint\limits_V\frac{\rho(M)\bar{r}(M)}{r^3(M)}dV(M),$$

其中 $dV(M)=dx(M)dy(M)dz(M)$.

作用力函数 $\bar{F}(P)$ 可表示成

$$\bar{F}(P)=-\mathrm{grad}\varphi(P),$$

其中

$$\varphi(P)=-\iiint\limits_V\frac{\rho(M)}{r(M)}dV(M).$$

实际上,

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\varphi(P) &= \iiint\limits_V \rho(M)\operatorname{grad}\left(-\frac{1}{r(P,M)}\right)dV(M)\\ &= \iiint\limits_V \rho(M)\frac{\bar{r}(P,M)}{r^3(P,M)}dV(M) = \bar{F}(P).\end{aligned}$$

定义 18 设 $\bar{\varphi}(\bar{r}) = (P,Q,R)$ 是光滑的向量场. 那么

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\bar{\varphi}$$

叫作向量场的散度, 而向量

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \operatorname{rot}\bar{\varphi}$$

叫作向量场的旋度.

如果我们引入 “奈普拉” 算子 ∇, 令

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

则上面的定义可形式地写成

$$\operatorname{div}\bar{\varphi} = (\nabla, \bar{\varphi}), \quad \operatorname{rot}\bar{\varphi} = [\nabla, \bar{\varphi}), \quad \operatorname{grad}h = \nabla h,$$

其中符号表达式 $(\nabla, \bar{\varphi}), [\nabla, \bar{\varphi}]$ 分别表示标量积和矢量积.

也可以从对于微分形式的恒等式来定义 $\operatorname{div}\bar{\varphi}$ 和 $\operatorname{rot}\bar{\varphi}$:

$$\begin{aligned}d\omega_2 &= (dP)\wedge dy\wedge dz + (dQ)\wedge dz\wedge dx + (dR)\wedge dx\wedge dy\\ &= (\operatorname{div}\bar{\varphi})dxdydz,\\ d\omega_1 &= (dP)\wedge dx + (dQ)\wedge dy + (dR)\wedge dz\\ &= v_1 dy\wedge dz + v_2 dz\wedge dx + v_3 dx\wedge dy,\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{rot}\bar{\varphi} = (v_1, v_2, v_3), dh(\bar{u}) = (\operatorname{grad}h(\bar{u}), d\bar{u})$.

由此, 使用关系式 $dx\wedge dx = 0, dx\wedge dy = -dy\wedge dx$ 等等, 就得 $\operatorname{div}\bar{\varphi}$ 和 $\operatorname{rot}\bar{\varphi}$ 的相应的表达式

我们引入两个有用的恒等式:

$$\operatorname{rot}\ \operatorname{grad}h(\bar{u}) \equiv 0, \quad \operatorname{div}\ \operatorname{rot}\bar{\varphi}(\bar{u}) \equiv 0,$$

它们可通过直接计算来证明, 它们也是对于微分形式 ω 成立等式 $d^2\omega = 0$ 一事的推论.

实际上, 第一个恒等式从公式

$$d(dh(\bar{u})) = d^2h(\bar{u}) = 0$$

推出, 而第二个恒等式从公式

$$d^2\omega_1 = d(dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz) = 0$$

推出.

定义 19 沿逐段光滑的定向闭曲线 L 的第二型曲线积分

$$I_0 = \oint_L P dx + Q dy + R dz$$

叫作向量场 $\bar{\varphi} = (P, Q, R)$ 沿围道 L 的环流量.

若 $\bar{\tau}$ 是沿围道 L 的循行正方向的单位切向量, 则积分 I_0 可写成第一型曲线积分

$$I_0 = \oint_L L(\bar{\varphi}, \bar{\tau}) dl,$$

其中 dl 是曲线 L 的长度元.

定义 20 沿双侧的逐片光滑的可测的曲面 S 的标定的一侧的第二型曲面积分

$$I = \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

叫作向量场 $\bar{\varphi} = (P, Q, R)$ 通过曲面 S 的流量.

如果用 $\bar{n}$ 代表 S 的对应于所选定的一侧的法向量, 则通过 S 的流量可写成

$$I = \iint_S (\bar{\varphi}, \bar{n}) dS.$$

我们以向量的形式来转述斯托克斯定理和高斯–奥斯特洛格拉德斯基定理.

设曲面 S 的对应于法向量 $\bar{n}$ 的一侧与围道 L 的循行方向相匹配,L 的循行方向对应于它的单位切向量 $\bar{\tau}$. 这是可以做到的. 例如, 我们根据连续性确定在曲线上的法向量, 然后让向量 $\bar{\tau}$ 的指向使得围道的循行关于 $\bar{n}$ 是按 "逆时针方向" 完成的.

定理 10 (斯托克斯公式) 向量场 $\bar{\varphi}$ 沿逐片光滑曲面 S 的逐段光滑边界 L 的环流量等于向量场 $\mathrm{rot}\bar{\varphi}$ 通过此曲面的流量, 即

$$\oint_L (\bar{\varphi}, \bar{\tau}) dl = \iint_S (\mathrm{rot}\bar{\varphi}, \bar{n}) dS.$$

定理 11 (高斯–奥斯特洛格拉德斯基公式) 向量场 $\bar{\varphi}$ 通过凸的三维区域 V 的逐片光滑边界 S 的流量等于向量场 $\bar{\varphi}$ 的散度场沿着集合 V 的三重积分, 即

$$\iint\limits_S (\bar{\varphi}, \bar{n})dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\bar{\varphi}dV,$$

其中 $\bar{n}$ 是曲面 S 的单位外法向量.

我们指出高斯–奥斯特洛格拉德斯基公式的三个有趣的推论. 下述等式成立:

$$\iint\limits_S (\bar{n}, \bar{\varphi})dS = \iiint\limits_V (\nabla, \bar{\varphi})dV, \tag{1}$$

$$\iint\limits_S [\bar{n}, \bar{\varphi}]dS = \iiint\limits_V [\nabla, \bar{\varphi}]dV, \tag{2}$$

$$\iint\limits_S \bar{n}hdS = \iiint\limits_V \nabla hdV. \tag{3}$$

实际上, 譬如说我们来考虑公式 (2). 其中向量等式的第一坐标是

$$\iint\limits_S (R\cos\beta - Q\cos\gamma)dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dV.$$

对于向量场 $\bar{\varphi}_1 = (0, R, -Q)$ 上面的等式转化成寻常的高斯–奥斯特洛格拉德斯基公式. 类似地可验证等式 (2) 的第二、第三坐标之相等.

等式 (3) 从高斯–奥斯特洛格拉德斯基公式应用于向量场 $(h, 0, 0), (0, h, 0), (0, 0, h)$ 而得到. 我们用 d 代表区域 V 的直径而用 $\mu(V)$ 表示它的体积. 那么对于向量场 $\operatorname{rot}\bar{\varphi} = [\nabla, \bar{\varphi}]$ 和 $\operatorname{grad}h = \nabla h$ 的每个分量在等式 (1)、(2)、(3) 中使用中值定理, 然后令 $d \to 0$ 过渡到极限, 就得到

$$\operatorname{div}\bar{\varphi} = \lim_{d\to 0} \frac{1}{\mu(V)} \iint\limits_S (\bar{n}, \bar{\varphi})dS, \tag{4}$$

$$\operatorname{rot}\bar{\varphi} = \lim_{d\to 0} \frac{1}{\mu(V)} \iint\limits_S [\bar{n}, \bar{\varphi}]dS, \tag{5}$$

$$\operatorname{grad}h = \lim_{d\to 0} \frac{1}{\mu(V)} \iint\limits_S \bar{n}hdS. \tag{6}$$

等式 (4) 中的积分是向量场 $\bar{\varphi}$ 通过闭曲面 S 的流量,S 是立体 V 的边界. 与此类似, 我们把等式 (5) 和 (6) 中的积分分别叫作向量场 $\bar{\varphi}$ 和标量场 h 通过曲面 S 的**向量流量**.

这些公式给出了梯度, 散度和旋度关于直角坐标系的选择不变的定义.

第十五讲

§10. 位势向量场和无源向量场

定义 21 向量场 $\bar{F}(M), M \in V$ 叫作区域 V 上的位势场, 如果存在标量函数 $h(M)$, 使得 $\bar{F}(M) = \mathrm{grad} h(M)$, 函数 $h(M)$ 本身叫作向量场 $\bar{F}(M)$ 的位势.

如果把向量 $\bar{F}(M)$ 看作是作用在 M 点处的具有单位质量的探试质点上的力, 那么位势 $h(M)$ 的意思是当此质点从无穷远处移至 M 点时力场所做的功.

实际上, 设给定具有始点 A 和变化的点 M 的曲线 L 用 $l(M)$ 表示这曲线从 A 到 M 的一段的长, 用 $\bar{\tau}(M)$ 代表 L 在点 M 处的单位切向量. 那么力场当探试质点从 A 移至 P 时所做的功等于

$$W(P) = \int\limits_{AM} (\bar{F}(M), \bar{\tau}(M)) dl(M) = \int\limits_{AP} (\mathrm{grad} h(M), \bar{\tau}(M)) dl(M)$$
$$= \int\limits_{AP} \frac{\partial h(M)}{\partial l} dl(M) = h(P) - h(A).$$

定义 22 我们把 $\oint\limits_{L} (\bar{F}(M), \bar{\tau}(M)) dl(M)$ 叫作向量场 $\bar{F}(M)$ 沿着闭围道 L 的环流量.

从上面的力 $\bar{F}(M)$ 沿围道 L 所做的功的表达式看到, 位势场沿任何可求长的闭围道的环流量等于零.

在定理 6,7,8 中曾经得到向量场成为位势场的充分必要条件. 我们使用新的术语来叙述这些条件.

定理 12 光滑的向量场是凸区域 Ω 上的位势场的必要且充分的条件是下述两等价条件之一:

1) 对于任意的逐段光滑的闭曲线 $L \subset \Omega$

$$\oint\limits_{L} (\bar{F}(M), \bar{\tau}(M)) dl(M) = 0;$$

2) $\mathrm{rot} \overline{F}(M) = \bar{0}$.

我们记得, 对于映射 $\bar{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$, 依定义有等式

$$\mathrm{rot} \bar{F}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

定义 23 向量场 $\bar{\varphi}(\bar{u})$ 叫作无源场(或管状场), 如果存在向量场 $\bar{\psi}(\bar{u})$ 使得 $\bar{\varphi}(\bar{u}) = \mathrm{rot}\bar{\psi}(\bar{u})$, 而向量场 $\bar{\psi}(\bar{u})$ 叫作场 $\bar{\varphi}(\bar{u})$ 的向量位势.

定理 13 设 Ω 是凸的紧致集. 为使向量场 $\bar{\varphi}$ 是无源的, 必要且充分的条件是对于 Ω 的一切点, 成立等式 $\mathrm{div}\bar{\varphi} \equiv 0$.

▶ 必要性 场 $\bar{\varphi}$ 是无源的, 那么 $\bar{\varphi}(\bar{u}) = \mathrm{rot}\bar{\psi}(\bar{u})$. 但因对于任何向量场 $\bar{\psi}$ 都成立等式 $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\bar{\psi} = 0$, 所以在区域 Ω 上 $\mathrm{div}\bar{\varphi} \equiv 0$. 必要性证毕.

充分性 现设 $\mathrm{div}\bar{\varphi} \equiv 0$ 在域 Ω 上成立. 我们要证存在向量场 $\bar{\psi}$ 使 $\mathrm{rot}\bar{\psi} = \bar{\varphi}$. 对应于向量场 $\bar{\varphi} = (P, Q, R)$ 作微分形式

$$\omega = \omega(\bar{r}, d\bar{r}) = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

$$\bar{r} = (x, y, z), d\bar{r} = (dx, dy, dz).$$

那么, 在 Ω 上 $\mathrm{div}\bar{\varphi} \equiv 0$ 与在 Ω 上 $d\omega \equiv 0$ 等价. 而存在向量场 $\bar{\psi} = (A, B, C)$ 满足等式 $\mathrm{rot}\bar{\psi} = \bar{\varphi}$ 指的是存在微分形式 $\alpha = Adx + Bdy + Cdz$ 使得 $d\alpha = \omega$.

考虑如下的形式:

$$\alpha = \left(\int_0^1 (Qz - Ry)tdt\right) dx + \left(\int_0^1 (Rx - Pz)tdt\right) dy + \left(\int_0^1 (Py - Qx)tdt\right) dz.$$

我们来证 $d\alpha = \omega$. 从等式

$$\int_0^1 \frac{d(t^2\omega(t\bar{r}, d\bar{r}))}{dt} dt = \omega(\bar{r}, d\bar{r})$$

出发. 根据微分形式的线性性质, 仅考虑一个被加项 $\omega_0 = Rdx \wedge dy$ 就够了. 我们有

$$R_0 = \frac{d}{dt}(t^2 R(t\bar{r})) = 2tR + t^2 \frac{dR(t\bar{r})}{dt}.$$

令 $u = tx, v = ty, w = tz$, 得

$$R_0 = t\left(2R + u\frac{\partial R}{\partial u} + v\frac{\partial R}{\partial v} + w\frac{\partial R}{\partial w}\right) = t\left(\frac{\partial(Ru)}{\partial u} + \frac{\partial(Rv)}{\partial v} + w\frac{\partial R}{\partial w}\right).$$

接着使用 $dw = 0$, 即

$$\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial w} = 0.$$

得到

$$\frac{d}{dt}(t^2 R(t\bar{r})) = t\left(\frac{\partial(Ru)}{\partial u} + \frac{\partial(Rv)}{\partial v} - w\frac{\partial P}{\partial u} - w\frac{\partial Q}{\partial v}\right).$$

由此

$$\begin{aligned} w_0 &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(t^2 R(t\bar{r}))dtdx \wedge dy \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\int_0^1 (Ru - Pw)tdt\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\int_0^1 (Rv - Qw)tdt\right)\right] dx \wedge dy. \end{aligned}$$

设 $d\alpha = Ady\wedge dz + Bdz\wedge dx + Cdx\wedge dy$. 只需证明 $R = C$ 就够了. 从微分形式 α 的定义知

$$\begin{aligned}
C &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^1 (Qz - Ry)tdt\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^1 (Rx - Pz)tdt\right)\\
&= -\int_0^1 \left(\frac{\partial Q}{\partial v}w - R - \frac{\partial R}{\partial v}v\right)tdt + \int_0^1 \left(\frac{\partial R}{\partial u}u + R - \frac{\partial P}{\partial u}w\right)tdt\\
&= \frac{\partial}{\partial u}\left(\int_0^1 (Ru - Pw)tdt\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\int_0^1 (Rv - Qw)tdt\right). \quad ◀
\end{aligned}$$

注　定理 13 是庞加莱关于闭的正合微分形式集的定理的特殊形式. 在这个定理的充分性的证明中的微分形式 α 可用不同的方式选取. 例如任何形如 $\alpha + \alpha\beta$ 的都满足定理的条件. 我们还指出, 任意的向量场都可以表示成位势场与无源场的和.

例　设 V 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个凸的, 若尔当可测的紧致的集合. 对于任意固定的点 $P \in \mathbb{R}^3$ 和任意的点 $M \in V$, 定义向径

$$\bar{r} = \bar{r}(M) = (x(M), y(M), z(M)), r = \sqrt{x^2(M) + y^2(M) + z^2(M)},$$

以及区域 V 的体积元 $dV = dx(M)dy(M)dz(M)$. 设在区域上给定向量场 $\bar{j} = \bar{j}(M)$.

那么可按下式定义向量场 $\bar{j}(M)$ 的力场 $\bar{H} = \bar{H}(P)$:

$$\bar{H} = \bar{H}(P) = \iiint\limits_V \frac{[\bar{j}, \bar{r}]}{r^3} dV.$$

力场 $\bar{H}(P)$ 在任意点 $P \in \mathbb{R}^3$ 都有定义. 若 $P \in \mathbb{R}^3\backslash V$, 则定义 $\bar{H}(P)$ 的积分是光滑函数的常义三重黎曼积分. 而若 $P \in V$, 此积分是反常的, 且其收敛必从比较判别法推出 (为此可把区域分成以 P 点为中心, 半径 r 满足条件 $\varepsilon < r \leqslant 2\varepsilon, \varepsilon = 2^{-k}, k \in \mathbb{N}$ 的球壳).

我们来证明, 对于任意的点 $P \notin V$, 成立等式 $\operatorname{div}\bar{H}(P) = 0$, 也就是说, 根据定理 13, 在区域 $\mathbb{R}^3\backslash V$ 上, 场 $\bar{H}$ 是无源的.

实际上, 若 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ 是沿直角坐标系的坐标轴 Ox, Oy, Oz 方向的基向量,$\bar{j} = (j_1, j_2, j_3), \bar{r} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{aligned}
\frac{[\bar{j}, \bar{r}]}{r^3} &= \frac{1}{r^3}\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}\\
&= \bar{e}_1\frac{j_2z - j_3y}{r^3} + \bar{e}_2\frac{j_3x - j_1z}{r^3} + \bar{e}_3\frac{j_1y - j_2x}{r^3}\\
&= P\bar{e}_1 + Q\bar{e}_2 + R\bar{e}_3.
\end{aligned}$$

由此

$$\frac{\partial P}{\partial x} = (j_3y - j_2z)\frac{3x}{r^5}, \frac{\partial Q}{\partial y} = (j_1z - j_3x)\frac{3y}{r^5}, \frac{\partial R}{\partial z} = (j_2x - j_1y)\frac{3z}{r^5}.$$

结果

$$\mathrm{div}\bar{H} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

即, 场 $\bar{H}$ 在区域 $\mathbb{R}^3\backslash V$ 内是无源的.

现在来证明, 当 $P \notin V$ 时, 场 $\bar{H}$ 的向量位势是向量场

$$\bar{J} = \iiint\limits_V \frac{\bar{j}}{r} dV,$$

即场 $\bar{H} = \mathrm{rot}\bar{J}$.

根据被积函数的光滑性, 可以交换运算 rot 和三重积分的次序. 那么只需证明

$$\mathrm{rot}\left(-\frac{\bar{j}}{r}\right) = \frac{1}{r^3}[\bar{j}, \bar{r}]$$

就可以了. 实际上

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\left(\frac{\bar{j}}{r}\right) = [\nabla, \frac{\bar{j}}{r}] &= \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ j_1 r^{-1} & j_2 r^{-1} & j_3 r^{-1} \end{vmatrix} \\
&= \bar{e}_1\left(j_3\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} - j_2\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}\right) + \bar{e}_2\left(j_1\frac{\partial r^{-1}}{\partial z} - j_3\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}\right) \\
&\quad + \bar{e}_3\left(j_2\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} - j_1\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}\right). \\
&= -P\bar{e}_1 - Q\bar{e}_2 - R\bar{e}_3,
\end{aligned}$$

其中函数 P, Q, R 如上已定义. 至此我们结束与向量分析相关的问题的讨论.

第二十一章　一般的斯托克斯公式

第十六讲

§1．定向多维曲面的概念

一般的斯托克斯公式是关于定积分通过原函数表示的牛顿–莱布尼茨定理的自然的多维推广．这个公式首次由庞加莱于 1899 年发表在著名的回忆录《天体力学新方法》中．为了强调可以使用所找到的公式沿任意维数的曲面进行积分，他称此公式为*斯托克斯定理的推广*，指的是把向量场通过曲面的流量与它沿着曲面的边界的环流量联系起来的斯托克斯公式．

一般的斯托克斯公式的各种变形的现代证明，通常依靠外微分形式及外微分形式沿曲面的积分的足够健全的理论．这显然正是给在分析课程中完整地叙述此公式的证明造成一定障碍的缘由．

我们为一般斯托克斯公式的证明引入一个新的方案．此证法本质上使用与经典的三维情形相同的手段．首先借助于曲面的参数表示，我们定义微分形式的积分．同时证明，积分的值按其绝对值与参数表示的选取无关．接着论证确定曲面的定向的参数表示的选取与积分的符号之间的关系．下一步是引入曲面的定向与它的边界的方向相匹配的法则，同时依据这个法则来通过“贴合”凸集的像来构造曲面，保持被贴合的任何两块沿其边界的公共部分各取相反的方向．被贴合的这些集合的逆像的凸性用来简化基本定理的证明而对一般性并无实质性的限制．

我们再次指出曲面定向与其边界方向相匹配的问题的重要性. 此问题不单发生在论述过程中. 以牛顿–莱布尼茨公式本身为例, 这一特性就已明确表现为积分值的符号依赖于实施积分的方向, 即当积分限交换时, 积分的值变号. 在一维曲面 (曲线) 的情形, 边界是点 (余维数为 0), 此时曲面和它边界方向的匹配问题最为简单, 已然解决. 现在的情况基本上是归纳地定义曲面和它的边界的方向. 这里, 定向的匹配归结为曲面的原像的凸性的应用.

最后指出, 在引入一般斯托克斯公式时, 基本的困难正是在于一系列必要的概念, 而证明的本身是很简单的.

设 k 和 n 是自然数,$1 \leqslant k \leqslant n$. 我们来定义 n 维空间中的 k 维逐片光滑定向曲面, 方法是对维数 k 进行归纳.

当 $k=1$ 时, 此曲面是*无重点的逐段光滑曲线*, 在曲线上规定了循行方向, 即曲线的下一个光滑段的始点重合于上一个光滑段的终点. 这里, 我们理解曲线的光滑段为数轴上的有向线段在光滑的、可逆的, 秩等于 1 的映射下的像.

设 $k \geqslant 2$. 那么 k 维曲面 (确切地说是曲面的光滑块) 定义作 k 维空间中凸的 k 维集合 A 在光滑的, 可逆的, 不退化 (即秩等于 k) 的映射 $\bar{\varphi}$ 之下的像 B, 即 $B=\bar{\varphi}(A)$, 这里,A 必须具有逐段光滑的边界 ∂A.

这时, 曲面 B 的边界 ∂B 是 $k-1$ 维曲面,$k-1 \geqslant 1, \partial B=\bar{\varphi}(\partial A)$. 逆像 A 叫作曲面的光滑段 $B=\bar{\varphi}(A)$ 的**卡**(карта). 映射 $\bar{\varphi}$ 本身叫作曲面片 B 的**参数化** (即参数表示).

设给定曲面 B 的两个参数化 $\bar{\varphi}$ 和 $\bar{\psi}$. 说它们定义了曲面 B 的**同定向**, 如果参数的替换是具有正的雅可比式 $J_{\bar{x}}$ 的微分同胚 $\bar{\lambda}$. 而若 $J_{\bar{\lambda}}$ 是负的, 则参数化 $\bar{\varphi}$ 和 $\bar{\psi}$ 给出**反定向**.

如果映射 λ 的雅可比式在一个点处是正的, 那么它对于集合 A 的一切点都是正的. 此事从映射 $\bar{\varphi}$ 和 $\bar{\psi}$ 皆不退化推出, 映射 $\bar{\varphi}$ 和 $\bar{\psi}$ 的雅可比矩阵 $J_{\bar{\varphi}}$ 和 $J_{\bar{\psi}}$ 的秩都是 k 而 $J_{\bar{\psi}}=J_{\bar{\lambda}} \cdot J_{\bar{\varphi}}$. 于是, 定向曲面恰有两个定向.

为了定义由多个光滑段组成的曲面的定向, 首先必须 "匹配" 曲面与它的边界的定向.

§2. 在一般情况下曲面与其边界的定向的匹配

先定义边界 $\partial A \subset \mathbb{R}^k$ 的外侧. 由于它是 $k-1$ 维的分片光滑曲面, 所以在它的每个光滑点处可给出它的法向量 (此向量与 $k-1$ 维切子空间正交). 过所考虑的点 $x_0 \in \partial A$ 并与法向量共线的直线与 A 相交于某一线段, 这是因为 A 是凸集. 那么此直线上从点 x_0 出发与集 A 无其他交点的射线的方向量 $\bar{n}$ 叫作边界 ∂A 在点 x_0 处的**外法向量**, 而向量 $(-\bar{n})$ **叫作内法向量**.

设参数化 $\bar{\chi}=\bar{\chi}(\bar{t}), \bar{\chi}=(\chi_1, \cdots, \chi_k), \bar{t}=(t_1, \cdots, t_{k-1})$ 给出了集合 A 的边界的

这个光滑片. 我们说此参数化与边界 ∂A 的外侧呼应, 如果此映射的雅可比矩阵左边添上外法向量 $\bar{n}$ 之后的矩阵 $\left(\bar{n},\dfrac{\partial\bar{\chi}}{\partial t_1},\cdots,\dfrac{\partial\bar{\chi}}{\partial t_{k-1}}\right)$ 的行列式是正的. 这样, 我们就在原像 A 上把集合 A 的定向与它的边界 ∂A 的定向匹配起来了.

接着, 与早先一样, 设 $\bar{\varphi}:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ 给出曲面 B 的参数化, 并设 $\bar{\chi}:\mathbb{R}^{k-1}\to\mathbb{R}^k$ 给出边界 ∂A 的参数化. 那么映射 $\bar{\varphi}\circ\bar{\chi}$ 给出了曲面 B 的边界 ∂B 的参数化.

我们说, 曲面 B 的定向与其边界 ∂B 的定向是相匹配的, 如果 ∂B 是边界 ∂A 的像, 而 ∂A 的参数化与它的外侧呼应.

例 设集合 ∂B 由边界 ∂A 上的方程 $x_k=f(x_1,\cdots,x_{k-1})$ 确定,∂A 是 $k-1$ 维空间中凸集 A 的边界, f 是 A 上的分片光滑函数. 那么集合 ∂B 是分片光滑的 $k-1$ 维曲面, 并且它的参数化 $\bar{\varphi}$ 可由下列方程给出:$x_1=t_1,\cdots,x_{k-1}=t_{k-1},x_k=f(t_1,\cdots,t_{k-1})$.

此映射的雅可比矩阵的秩是 $k-1$, 因为它含有 $k-1$ 维的单位子方阵. 曲面 B 的外法向 $\bar{n}$ 与向量

$$\bar{h}=\left(-\frac{\partial f}{\partial t_1},-\frac{\partial f}{\partial t_2},\cdots,-\frac{\partial f}{\partial t_{k-1}},1\right)$$

共线,$\bar{n}=\dfrac{\bar{h}}{h}$, 而矩阵 $\left(\bar{n},\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t_1},\cdots,\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t_{k-1}}\right)$ 可写成

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial f}{\partial t_1} & 1 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial f}{\partial t_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial f}{\partial t_{k-1}} & 0 & \cdots & 1 \\ \dfrac{1}{h} & \dfrac{\partial f}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial t_{k-1}} \end{pmatrix},$$ [①]

它的行列式等于 $(-1)^{k-1}\dfrac{1}{h}\left(1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial t_1}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{\partial f}{\partial t_{k-1}}\right)^2\right)$.[②] 结果, 曲面 B 的定向与它的边界 ∂B 的定向在所考虑的情形是相匹配的, 如果 k 是奇数的话. 在 k 是偶数的情形, 要想匹配曲面 B 与其边界 ∂B 的定向, 应该把 ∂B 的定向改为相反的定向.

现在来定义 n 维空间中的分片光滑的 k 维定向曲面, 它是由一些彼此连通的光滑的具有匹配的定向边界的定向片组成的.

---

①原文此矩阵印刷有误 —— 译者注.

②原文误为 $(-1)^{k-1}\left(1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial t_1}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{\partial f}{\partial t_{k-1}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ —— 译者注.

设两个这样的片 $B_1=\bar{\varphi}_1(A_1)$ 和 $B_2=\bar{\varphi}_2(A_2)$ 相切于它们的交 $(b)=B_1\cap B_2\subset \partial B_1\cap\partial B_2$. 如果此时 1) 区域 (b) 是分片光滑的 $k-1$ 维曲面且 2) 曲面 (b) 由 $\bar{\varphi}_1$ 和 $\bar{\varphi}_2$ 产生的两个定向彼此相反, 那么我们就把曲面的并集 $B=B_1\cup B_2$ 看作 (是由两个曲面片 B_1 和 B_2 组成的) 一个分片光滑的定向曲面. 类似地处理有限多个彼此连通的这样的光滑曲面片的像的情形.

在把一个光滑的定向曲面片, 借助曲面的分片光滑的定向边界划分成两个分片光滑的定向曲面时, 此边界曲面相对于所分成的两个定向片分别取相反的定向.

与所给曲面的一切段相对应的卡 (карта) 的全体, 叫作曲面的册(атлас).

§3. 微分形式

定义 1 设 $1\leqslant k\leqslant n, U$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集,$F_{m_1},\cdots,{m_k}(\bar{x})$ 是 U 上的函数,$1\leqslant m_1<\cdots<m_k\leqslant n$. 称下面的表达式 (微分形式之典范形状):

$$\omega=\omega(\bar{x},d\bar{x})=\sum_{1\leqslant m_1<\cdots<m_k\leqslant n}F_{m_1,\cdots,m_k}(\bar{x})dx_{m_1}\wedge\cdots\wedge dx_{m_k}$$

为定义在 U 上的 k 阶微分形式. 这里 (形式的) 微分外积运算 $\wedge$ 满足条件:

a) $(dx\wedge dy)\wedge dz=dx\wedge(dy\wedge dz)$(结合性);

b) $dx\wedge dy=-dy\wedge dx$(反对称性);

c) $d(ax_1+bx_2)\wedge dy\wedge\cdots\wedge dz=adx_1\wedge dy\wedge\cdots\wedge dz+bdx_2\wedge dy\wedge\cdots\wedge dz,\forall a, b\in\mathbb{R}$(多线性).

形如 $\omega=F(\bar{x})dx_{m_1}\wedge\cdots\wedge dx_{m_k}$ 的微分形式叫作基本微分 k 形式.

我们看到, 条件 a),b),c) 使得可以把任何微分形式都写成典范形状. 此外, 微分形式 ω_1 和 ω_2 的外积 $\omega_1\wedge\omega_2$ 由此以明显的方式而定义.

例 1. 设 $k=1$. 一阶形式可写成

$$\omega(\bar{x},d\bar{x})=\sum_{s=1}^{n}F_s(\bar{x})dx_s.$$

2. 设 $k=n$. 那时在微分形式 ω 的定义中的和式只含一个被加项, 从而形式 ω 有如下形状:

$$\omega(\bar{x},d\bar{x})=F(\bar{x})dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n.$$

§4. 微分形式中的变量变换

定义微分形式中的变量变换概念的目的主要是为了引入沿定向的分片光滑的其维数小于基本空间的维数的曲面的曲面积分概念. 然而, 对于曲面的维数等于空间

的维数的情形, 定义依然适用. 实质上, 所作的定义通过把变量 $\bar{x}$ 变成 $\bar{\varphi}(\bar{t})$ 以及把 dx_i 变成 $d\varphi_i(\bar{t})$ 而完成.

定义 2 设 ω 是微分 k 形式, 而 $\bar{\varphi}$ 是光滑映射 $\bar{\varphi}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. 那么成立下述变量变换 $\bar{x}=\bar{\varphi}(t)$ 的法则:

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = \omega_1(\bar{t}, d\bar{t}),$$

其中

$$\omega_1 = \omega_1(\bar{t}, d\bar{t}) = \sum_{1\leqslant m_1<\cdots<m_k\leqslant n} F_{m_1,\cdots,m_k}(\bar{\varphi}(\bar{t}))d\varphi_{m_1}(\bar{t})\wedge\cdots\wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t}),$$

$$d\varphi_s(\bar{t}) = \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial\varphi_s}{\partial t_r}dt_r.$$

我们来把形式 ω_1 写成典范形状

$$\omega_1(\bar{t}, d\bar{t}) = \sum_{1\leqslant r_1<\cdots<r_k\leqslant n}\Phi_{r_1,\cdots,r_k}(\bar{t})dt_{r_1}\wedge\cdots\wedge dt_{r_k}.$$

为此, 首先把基本形式 ω_0 变换成典范形状, 其中

$$\omega_0 = d\varphi_{m_1}(\bar{t})\wedge\cdots\wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t}).$$

我们有

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \left(\sum_{r_1=1}^{n}\frac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial t_{r_1}}dt_{r_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{r_k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_{m_k}}{\partial t_{r_k}}dt_{r_k}\right)\\
&= \sum_{r_1=1}^{n}\cdots\sum_{r_k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial t_{r_1}}\cdots\frac{\partial\varphi_{m_k}}{\partial t_{r_k}}dt_{r_1}\wedge\cdots\wedge dt_{r_k}\\
&= \sum_{1\leqslant r_1<\cdots<r_k\leqslant n}\left(\varepsilon_\sigma\sum_{\sigma}\frac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial t_{\sigma(r_1)}}\cdots\frac{\partial\varphi_{m_k}}{\partial t_{\sigma(r_k)}}\right)dt_{r_1}\wedge\cdots\wedge dt_{r_k}\\
&= \sum_{1\leqslant r_1<\cdots<r_k\leqslant n}\frac{D(\varphi_{m_1},\cdots,\varphi_{m_k})}{D(t_{r_1},\cdots,t_{r_k})}dt_{r_1}\wedge\cdots\wedge dt_{r_k}.
\end{aligned}$$

这里 ε_σ 是等于 1 还是 -1 取决于由数 $\sigma(r_1),\cdots,\sigma(r_k)$ 组成的排列 σ 是偶排列还是奇排列. 把最后的表达式代入定义形式 ω_1 的等式, 求得

$$\Phi_{r_1,\cdots,r_k} = \sum_{1\leqslant m_1<\cdots<m_k\leqslant n}F_{m_1,\cdots,m_k}(\bar{\varphi}(\bar{t}))\frac{D(\varphi_{m_1},\cdots,\varphi_{m_k})}{D(t_{r_1},\cdots,t_{r_k})}.$$

常用记号 $\omega_1=\varphi^*\omega$ 表示形式 ω_1 并称之为**由映射 $\bar{\varphi}$ 诱导的形式** 或简称之为**诱导形式**.

例 1. 设 $k=1$ 则

$$\varphi^*\omega=\sum_{r=1}^{n}\Phi_r(\bar{t})dt_r, \Phi_r(\bar{t})=\sum_{m=1}^{n}F_m(\bar{\varphi}(\bar{t}))\frac{\partial\varphi_m}{\partial t_r}.$$

2. 当 $k=n$ 时有

$$\varphi^*\omega=F(\bar{\varphi}(\bar{t}))\frac{D(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)}{D(t_1,\cdots,t_n)}dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n.$$

第十七讲

§5. 微分形式的积分

先考虑在 n 维空间中微分 n 形式沿 n 维定向曲面 B 的积分. 在这种情况下可把形式 ω 的典范形状写成:

$$\omega=F(\bar{x})dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n.$$

我们把 ω 沿 (以自然方式定向的) 曲面 B 的积分定义为 n 重黎曼积分, 即

$$\int_B\omega=\int_B F(\bar{x})dx_1\cdots dx_n.$$

设 $\bar{\varphi}$ 是 k 维曲面 B 的参数化,$B=\bar{\varphi}(A)$, A 是 k 维空间中的 k 维集合. 设参数化 $\bar{\varphi}$ 与 B 的定向相呼应. 那么在经过变量变换 $\bar{x}=\bar{\varphi}(\bar{t})$ 之后, 我们从 B 上的微分形式 ω 过渡到 A 上的微分 k 形式 $\varphi^*\omega$, 并有典范形状

$$\omega_1=\varphi^*\omega=\Phi(t_1,\cdots,t_k)dt_1\wedge\cdots\wedge dt_k.$$

依照与 $k=n$ 的情形的类似, 我们得到一个法则把 k 形式 ω_1 的 k 重曲面积分表达成寻常的 k 重黎曼积分.

这种状况使我们能作出微分形式的曲面积分的下述定义.

定义 3 *光滑的微分 k 形式 ω (即具有光滑系数的形式) 沿分片光滑的定向曲面 B 的曲面积分 I 指的是如下表达式:*

$$I=\int_B\omega=\int_A\varphi^*\omega,$$

其中集合 A 是在 k 维空间中的 k 维凸的若尔当可测的紧致的集合,$B=\bar{\varphi}(A)$.

这里沿着集合 A 的积分, 同在 $k=n$ 时的情形一样, 通过寻常的 k 重黎曼积分来表示, 其间形式地把表达式 $dt_1\wedge\cdots\wedge dt_k$ 替换成 $dt_1\cdots dt_k$.

我们指出，如果曲面 B 的参数化 $\bar{\varphi}$ 在 B 上确定与给定的定向相反的定向，那么根据上面给出的定义

$$I = \int_B \omega = -\int_A \varphi^* \omega.$$

例 设 $B = L$ 是平面 xOy 上的以原点为中心半径为 1 的圆周，按逆时针方向循行. 借助于由等式 $x = \cos\ t, y = \sin\ t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 给出的映射 $\bar{\varphi}: [0, 2\pi] \to B$ 来给定这个定向. 考虑微分 1 形式

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

那么 $\varphi^* \omega = dt$. 由此推出

$$\int_L \omega = \int_A \varphi^* \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

为了验证积分 $\int_B \omega$ 的定义的正确性，必须证明它的值与参数化 $\bar{\varphi}$ 的选取无关，只要 $\bar{\varphi}$ 保持同一定向. 我们记得，任何两个这样的参数化 $\bar{\varphi}$ 和 $\bar{\psi}$ 以关系式 $\bar{\psi} = \bar{\varphi} \circ \bar{\lambda}$ 彼此联系，其中 $\bar{\lambda}: A_1 \to A$ 是一个具有正的雅可比式的微分同胚.

定理 1 *设参数化 $\bar{\varphi}: A \to B$ 以及 $\bar{\psi}: A_1 \to B$ 给出曲面 B 的同一定向. 那么*

$$\int_A \varphi^* \omega = \int_{A_1} \psi^* \omega.$$

► 微分形式 $\varphi^* \omega$ 是空间 $\mathbb{R}^k$ 的 k 形式，因此它的典范形状是

$$\varphi^* \omega = \Phi(\bar{t}) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k.$$

现使用变量变换公式

$$\psi(u) = (\bar{\varphi} \circ \bar{\lambda})(\bar{u}), \bar{t} = \bar{\lambda}(\bar{u}),$$

得

$$\begin{aligned}\psi^* \omega = (\bar{\varphi} \circ \bar{\lambda})^* \omega^{①} &= \Phi(\bar{\lambda}(\bar{u})) d\lambda_1(\bar{u}) \wedge \cdots \wedge d\lambda_k(\bar{u}) \\ &= \Phi(\bar{\lambda}(\bar{u})) \frac{D(\bar{\lambda}(\bar{u}))}{D(\bar{u})} du_1 \wedge \cdots \wedge du_k.\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{D(\bar{\lambda}(\bar{u}))}{D(\bar{u})} > 0$(由保定向条件知)，那么根据多重积分中变量变换的公式，有

$$\begin{aligned}\int_{A_1} \psi^* \omega = \int_{A_1} (\bar{\varphi} \circ \bar{\lambda})^* \omega &= \int_{A_1} \Phi(\bar{\lambda}(\bar{u})) \frac{D(\bar{\lambda}(\bar{u}))}{D(\bar{u})} du_1 \wedge \cdots \wedge du_k \\ &= \int_{A_1} \Phi(\bar{\lambda}(\bar{u})) \frac{D(\bar{\lambda}(\bar{u}))}{D(\bar{u})} du_1 \cdots du_k = \int_A \Phi(\bar{t}) dt_1 \cdots dt_k \\ &= \int_A \Phi(\bar{t}) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k = \int_A \varphi^* \omega.\end{aligned}$$ ◄

① 这里及后面，涉及复合映射 $\bar{\varphi} \circ \bar{\lambda}$ 时，符号 $(\bar{\varphi} \circ \bar{\lambda})^* \omega$ 与前面定义 $\varphi^* \omega$ 时不加上横线不符，请读者留意 —— 译者注.

在曲面积分的各种应用中，下面的定理是很有用处的. 在黎曼积分的情形，此定理解决了根据原函数求被积函数的问题.

定理 2 *设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸的可测的紧致的集合. 还设对于任意的分片光滑的 k 维曲面 $B \subset U$ 都存在连续的微分 k 形式 ω 的第二型积分 $I(B)$，那么形式 ω 由积分值 $I(B)$ 唯一确定.*

► 设形式 ω 有如下形状:

$$\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} a_{i_1,\cdots,i_k}(\bar{x})dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

设 $a(\bar{x}) = a_{i_1,\cdots,i_k}(\bar{x})$ 是形式 ω 的任意的一个系数. 我们来求它在点 $\bar{x}_0 = (x_{1,0}, \cdots, x_{n,0}) \in U$ 处的值. 为此在 k 维平面

$$\Pi_{i_1,\cdots,i_k} = \{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n| : x_i = x_{i,0}, i\neq i_1,\cdots,i_k\}$$

上取点 $\bar{x}_0$ 的 ε 邻域 $S_\varepsilon = \{x\in\Pi_{i_1,\cdots,i_n} | \|x-x_0\|<\varepsilon\}$.$S_\varepsilon$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k 维定向曲面. 我们取 $t=(t_1,\cdots,t_k), t_1 = x_{i_1},\cdots,t_k = x_{i_k}$ 为 S_ε 的参数化. 那么积分 $I(S_\varepsilon)$ 等于

$$\int_{S_\varepsilon}\omega = \int_{S_\varepsilon} a(x_{1,0},\cdots,t_1,\cdots,x_{n,0})dt_1\cdots dt_k,$$

其中右端的积分是寻常的 k 重黎曼积分. 由此根据中值定理，有

$$a(\bar{x}_0) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\mu(S_\varepsilon)}\int_{S_\varepsilon}\omega. \quad ◄$$

§6. 外微分的运算

后面处处会用到微分形式 $dF(\bar{x})$，把它写成典范形状，就可把它看作是函数 $F(\bar{x})$ 的通常的微分. 我们现在引入外微分的定义.

定义 4 *设 $\omega = \sum\limits_{1\leqslant m_1<\cdots<m_k\leqslant n} F_{m_1,\cdots,m_k}(\bar{x})dx_{m_1}\wedge\cdots\wedge dx_{m_k}$ 是微分 k 形式. 称形如*

$$d\omega = \sum_{1\leqslant m_1<\cdots<m_k\leqslant n} dF_{m_1,\cdots,m_k}(\bar{x})\wedge dx_{m_1}\wedge\cdots\wedge dx_{m_k}$$

的 $k+1$ 形式 ω_1 为 ω 的微分 (确切地说是外微分).

例 1. 设 $k=1$. 那么

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1\leqslant m\leqslant n} dF_m(\bar{x})\wedge dx_m = \sum_{1\leqslant m\leqslant n}\left(\sum_{1\leqslant r\leqslant n}\frac{\partial F_m}{\partial x_r}dx_r\right)\wedge dx_m \\ &= \sum_{1\leqslant r<m\leqslant n}\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_r} - \frac{\partial F_r}{\partial x_m}\right)dx_r\wedge dx_m. \end{aligned}$$

2. 设 $k=2, n=3, \bar{a}=(P,Q,R), \omega = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$. 那么

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz \\ &= (\mathrm{div}\bar{a})dx\wedge dy\wedge dz. \end{aligned}$$

引理 1　设给定微分 k_s 形式 $\omega_s, s=1,\cdots,r$. 那么成立等式

$$d(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r)=\sum_{s=1}^{r}(-1)^{k_1+\cdots+k_{s-1}}\omega_1\wedge\cdots\wedge d\omega_s\wedge\cdots\wedge\omega_r.$$

► 显然, 可以仅限于考虑基本微分形式

$$\omega_s = F_s(\bar{x})dx_{\sigma_s(1)}\wedge\cdots\wedge dx_{\sigma_s(k_s)} = F_s(\bar{x})\omega_{s,0}, s=1,\cdots,r,$$

式中 σ_s 是 $1,\cdots,k_s$ 的一个排列, 根据定义

$$\begin{aligned} d\omega &= d(F_1(\bar{x})\cdots F_r(\bar{x}))\wedge\omega_{1,0}\wedge\cdots\wedge\omega_{r,0} \\ &= \sum_{s=1}^{r}(F_1(\bar{x})\cdots dF_s(\bar{x})\cdots F_r(\bar{x}))\wedge\omega_{1,0}\wedge\cdots\wedge\omega_{r,0} \\ &= \sum_{s=1}^{r}(-1)^{k_1+\cdots+k_{s-1}}\omega_1\wedge\cdots\wedge d\omega_s\wedge\cdots\wedge\omega_r. \end{aligned}$$ ◄

引理 2　成立等式 $d^2\omega=0$.

► 实际上,

$$\begin{aligned} d^2\omega = d(d\omega) &= d\left(d\sum_{1\leqslant m_1<\cdots<m_k\leqslant n}F_{m_1,\cdots,m_k}(\bar{x})dx_{m_1}\wedge\cdots\wedge dx_{m_k}\right) \\ &= \sum_{1\leqslant m_1<\cdots<m_k\leqslant n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial^2F_{m_1,\cdots,m_k}(\bar{x})}{\partial x_s\partial x_r}dx_s\wedge dx_r\wedge dx_{m_1}\wedge\cdots\wedge dx_{m_k} \\ &= \sum_{1\leqslant m_1<\cdots<m_k\leqslant n,}\sum_{1\leqslant s<r\leqslant n}\left(\frac{\partial^2F_{m_1,\cdots,m_k}(\bar{x})}{\partial x_s\partial x_r}-\frac{\partial^2F_{m_1,\cdots,m_k}(\bar{x})}{\partial x_r\partial x_s}\right) \\ &\quad dx_s\wedge dx_r\wedge dx_{m_1}\wedge\cdots\wedge dx_{m_k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

这里我们使用了关于连续的二阶混合偏导数的施瓦茨定理. ◄

定理 3　设 $\bar{\varphi}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是二阶连续可微映射且 ω 是光滑的微分形式. 那么成立等式 $\varphi^*(d\omega)=d(\varphi^*\omega)$.

► 显然, 只需对于微分形式

$$\omega = F(\bar{x})dx_{m_1} \wedge \cdots \wedge dx_{m_k}$$

证明定理的结论. 从微分形式 ω 的微分的定义以及引理 1 得到

$$\begin{aligned} d(\varphi^*\omega) &= d\left(F(\bar{\varphi}(\bar{t}))d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t})\right) \\ &= dF(\bar{\varphi}(\bar{t})) \wedge d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t}) \\ &\quad + F(\bar{\varphi}(\bar{t}))d\left(d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t})\right) = A + B. \end{aligned}$$

再用引理 1, 然后用引理 2, 就得到

$$B = \sum_{s=1}^{k}(-1)^{k_1+\cdots+k_{s-1}} d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d^2\varphi_{m_s}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t}) = 0.$$

还有, 根据诱导形式的定义有

$$A = \varphi^*\left(dF(\bar{x}) \wedge dx_{m_1} \wedge \cdots \wedge dx_{m_k}\right) = \varphi^*(d\omega). \quad ◄$$

§7. 一般斯托克斯公式的证明

下面的定理成立.

定理 4 (一般斯托克斯公式) *设 B 是分片光滑不退化的定向的 k 维曲面, 它是凸集 A 在映射 $\bar{\varphi}$ 下的像, $\bar{\varphi}$ 的坐标是二次连续可微函数, B 的边界 ∂B 的定向与曲面 B 本身的定向相匹配, ω 是光滑的 $k-1$ 形式. 那么成立等式*

$$\int_{\partial B} \omega = \int_B d\omega$$

► 设曲面 B 由映射 $\bar{\varphi}: A \to B$ 给定. 那么从下面的一串等式就得到定理的结论:

$$\int_{\partial B} \omega \overset{(1)}{=} \int_{\partial A} \varphi^*\omega \overset{(2)}{=} \int_A d(\varphi^*\omega) \overset{(3)}{=} \int_A \varphi^*(d\omega) \overset{(4)}{=} \int_B d\omega.$$

只需证明等式 (2):

$$\int_{\partial A} \varphi^*\omega = \int_A d(\varphi^*\omega),$$

因为等式 (1) 和 (4) 从第二型曲面积分的定义推出, 而第三个等式从定理 3 的结果 $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$ 得到.

根据在 k 维空间中的 $k-1$ 维形式的定义以及微分运算的定义, 我们有

$$\varphi^*\omega = \sum_{1 \leqslant m_1 < \cdots < m_{k-1} \leqslant k} \Phi_{m_1,\cdots,m_{k-1}}(t_1, \cdots, t_k)dt_{m_1} \wedge \cdots \wedge dt_{m_{k-1}},$$

$$d(\varphi^*\omega) = \sum_{1 \leqslant m_1 < \cdots < m_{k-1} \leqslant k} \frac{\partial}{\partial t_s}\Phi_{m_1,\cdots,m_{k-1}}(t_1, \cdots, t_k)dt_s \wedge dt_{m_1} \wedge \cdots \wedge dt_{m_{k-1}},$$

其中 $1 \leqslant s \leqslant k, s \neq m_1, \cdots, m_{k-1}$.

由这个表示, 根据积分的线性性质, 推出只要证明等式

$$\int\limits_{\partial A} \Phi(\bar{t}, t_k) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = \int\limits_A \frac{\partial}{\partial t_k} \Phi(\bar{t}, t_k) dt_k \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1}$$

就够了, 式中 $\bar{t}$ 代表 $(t_1, \cdots, t_{k-1})$.

用 D 代表集合 A 在超平面 $t_k = 0$ 上的投影. 根据集合 A 的凸性,A 可写成:

$$A = \{(\bar{t}, t_k) : \bar{t} \in D, f_1(\bar{t}) \leqslant t_k \leqslant f_2(\bar{t})\},$$

其中 $f_1(\bar{t})$ 和 $f_2(\bar{t})$ 是某两个定义在集合 D 上的函数.

集合 A 的边界可划分成以下三个集合:

$$\Pi_1 = \{(\bar{t}, t_k) : \bar{t} \in D, t_k = f_1(\bar{t})\},$$
$$\Pi_2 = \{(\bar{t}, t_k) : \bar{t} \in D, t_k = f_2(\bar{t})\},$$
$$\Pi_3 = \{(\bar{t}, t_k) : \bar{t} \in \partial D, f_1(\bar{t}) < t_k < f_2(\bar{t})\}.$$

我们限于考虑曲面 Π_3 是分片光滑定向曲面的情形.Π_3 还是个柱状物, 而曲面 Π_1 和 Π_2 可分别看作此柱状物的"下"底和"上"顶.

应该指出, 集合 Π_3 可以是空集. 例如当 A 是 k 维球 $t_1^2 + \cdots + t_k^2 \leqslant 1$ 时就是这样. 那时, 曲面 Π_1 和 Π_2 分别是半球面 $t_1^2 + \cdots + t_k^2 = 1, t_k \leqslant 0$ 以及 $t_1^2 + \cdots + t_k^2 = 1, t_k \geqslant 0$.

我们来证明沿曲面 Π_3 的积分等于零. 实际上, 由于 Π_3 是 k 维空间中的 $k-1$ 维曲面, 所以它可参数化:

$$t_1 = t_1(\bar{u}), \cdots, t_{k-1} = t_{k-1}(\bar{u}), \bar{u} = (u_1, \cdots, u_{k-1}) \in \pi_3, \bar{t}(\pi_3) = \Pi_3.$$

注意,$\bar{t}(\bar{u})$ 是微分同胚.

假设映射 $\bar{t} : \pi_3 \to \Pi_3$ 的雅可比式在 $\bar{u}_0$ 点处不等于零, 即

$$J(\bar{u}_0) = \frac{D(t_1, \cdots, t_{k-1})}{D(u_1, \cdots, u_{k-1})} \neq 0.$$

那么根据函数 $J(\bar{u})$ 的连续性, 在点 $\bar{u}_0$ 的某邻域内它不等于零. 还有, 根据关于逆映射的定理, 点 $\bar{t}(\bar{u}_0)$ 是集合 D 的内点 (D 是集合 A 在超平面 $t_k = 0$ 上的投影, 此处说内点是相对于此超平面而言 —— 译者注). 但是点 $\bar{t}(\bar{u}_0)$ 是集合 D 的边界点, 得到矛盾. 因此在任何点 $\bar{u} \in \pi_3$ 处都有

$$J(\bar{u}) = \frac{D(t_1, \cdots, t_{k-1})}{D(u_1, \cdots, u_{k-1})} = 0.$$

使用此等式, 在曲面积分中作变量代换 $\bar{t} = \bar{t}(\bar{u})$ 就得到

$$\int\limits_{\Pi_3} \Phi(\bar{t}, t_k) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = \int\limits_{\pi_3} \Phi(\bar{t}(u), t_k) J(\bar{u}) du_1 \wedge \cdots \wedge du_{k-1} = 0.$$

现考虑沿曲面 Π_1 和 Π_2 的积分. 根据曲面定向的定义 (见 §2), 有

$$\int\limits_{\Pi_2} \Phi(\bar{t}, t_k) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = (-1)^{k-1} \int\limits_{D} \Phi(\bar{t}, f_2(\bar{t})) dt_1 \cdots dt_{k-1},$$

$$\int\limits_{\Pi_1} \Phi(\bar{t}, t_k) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = (-1)^{k} \int\limits_{D} \Phi(\bar{t}, f_1(\bar{t})) dt_1 \cdots dt_{k-1}.$$

因此, 成立一串等式

$$\int\limits_{\partial A} \Phi(\bar{t}, t_k) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = \int\limits_{\Pi_1} + \int\limits_{\Pi_2}$$

$$= (-1)^{k-1} \int\limits_{D} \left(\Phi(\bar{t}, f_2(\bar{t})) - \Phi(\bar{t}, f_1(\bar{t}))\right) dt_1 \cdots dt_{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1} \int\limits_{D} \left(\int_{f_1(\bar{t})}^{f_2(\bar{t})} \frac{\partial \Phi}{\partial t_k} dt_k \right) dt_1 \cdots dt_{k-1}$$

$$= (-1)^{k-1} \int\limits_{A} \frac{\partial \Phi}{\partial t_k} dt_1 \cdots dt_k = (-1)^{k-1} \int\limits_{A} \frac{\partial \Phi(\bar{t})}{\partial t_k} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k$$

$$= \int\limits_{A} \frac{\partial \Phi}{\partial t_k} dt_k \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1}. \quad ◄$$

注 在上面的定理的证明中对集合 Π_3 的限制其实不是本质的. 事实上, 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的任意的凸体 D 都可看作另一凸体 $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ 的无穷光滑的像, 而 D_0 的边界不含直线段. 对于这样的 D_0, 其边界集 Π_3 是空集.

容易构作无穷光滑的可逆映射 φ, 使得 $\varphi(D_0) = D$, 且 $\psi(D) = D_0$, 这里对于一切 $x \in \mathbb{R}^n, \varphi(\psi(\bar{x})) = \bar{x}$. 作为相应的例子, 可考虑映射 $\psi(\bar{x})$ 如下定义者:

$$\psi(\bar{x}) = \bar{x}_0 + (\bar{x} - \bar{x}_0)\left(1 + e^{-\delta|\bar{x} - \bar{x}_0|^2}\right).$$

这里 $\bar{x}_0$ 是立体 $D \subset \mathbb{R}^n$ 的某个固定的内点,$\delta > 0$. 这时立体 D_0 作为 D 在映射 ψ 之下的像面得到. 逆映射 $\varphi = \psi^{-1}$ 永远存在, 而且不论是 φ 还是 ψ 都是无穷光滑的.[①]

另一方面, 借助于常规的计算可以证明, 对于足够小的 (依赖于由点 x_0 到立体 D 的边界 ∂D 的距离的最小值与最大值的比)δ 值, 立体 D_0 必是凸的, 并且它的边界 ∂D_0 不含直线段. 考虑到推导这些结果是十分繁重的工作, 而且映射 ψ 的选取有极大的任意性, 我们仅限于作出这个注记.

①在这个注中, 映射 φ, ψ 上面都未加横线 —— 译者注.

第十八讲

§8. 一致分布的概念. 估计傅里叶系数的一个引理

数列的值在闭区间上一致分布的概念是外尔引入数学中的. 他奠定了一致分布理论的基础. 此理论在数论、函数论、经典力学中得到了进一步的发展. 这里我们将证明数列的值在闭区间上一致分布的准则, 它是由外尔建立的.

设 $x_1, \cdots, x_n, \cdots$ 是一个实数列. 构作小数部分所成的数列 $\{x_1\}, \cdots, \{x_n\}, \cdots$. 为简化叙述, 我们以后认为数列 $\{x_n\}$ 的所有的项都位于半开区间 $[0,1)$ 中. 设 $F(N)=F(N,\alpha,\beta)$ 表示数列 $\{x_n\}$ 中满足条件 $n \leqslant N, \alpha \leqslant \{x_n\} < \beta, 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ 的项 x_n 的数目 (不等式 $\alpha \leqslant \{x_n\} < \beta$ 中 $\{x_n\}$ 代表 x_n 的小数部分).

令

$$D(N) = \sup_{0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1} |N^{-1}F(N,\alpha,\beta) - (\beta - \alpha)|.$$

数 $D(N)$ 叫作数列 $\{x_n\}$ 的前 N 项的离差.

定义 5 数列 $\{x_n\}$ 叫作模 1 一致分布的 (p. p. mod 1, 英文 u. d.—uniform distributed), 如果 $\lim\limits_{N\to\infty} D(N) = 0$.

后面需要下述关于一个函数的傅里叶系数的绝对值的上界估计的引理.

引理 3 设给定函数

$$\psi(x) = \psi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{1+N^2\sin^2\pi x}}$$

的傅里叶级数展开式

$$\psi(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{2\pi i m x}.$$

那么对于 $N \geqslant 1$ 和 $m \geqslant 0$ 成立估计式

$$|c_m| = |c_{-m}| \leqslant \frac{4+\ln N}{\pi N} e^{-\frac{m}{N}}.$$

► 显然, 对于傅里叶系数成立等式

$$c_{-m} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi_N(t) e^{2\pi m i t} dt = \varepsilon \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2\pi i m t}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \sin^2 \pi t}} dt = \varepsilon K_m,$$

其中 $\varepsilon = \dfrac{1}{N}$.

在半带状区域 $\Pi = \left\{z|\mathrm{Im}z \geqslant 0, |\mathrm{Re}z| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ 上考虑复变函数 $f(z) = \frac{e^{i2\pi mz}}{\sqrt{\varepsilon^2+\sin^2\pi z}}$. 它的分母在点 $z = ia = i\frac{\ln(\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2})}{\pi}$ 处等于零. 函数 $f(z)$ 在以射线 $[ia, +i\infty)$ 为截口的区域 Π 上是单值函数.

考虑任意的数 $b > a$, 并作围道 L, 使 L 由线段 $L_1 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], L_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+ib\right]$, $L_3 = \left[\frac{1}{2}+ib, ib\right], L_4 = [ib, ia], L_5 = [ia, ib], L_6 = \left[ib, -\frac{1}{2}+ib\right], L_7 = \left[-\frac{1}{2}+ib, -\frac{1}{2}\right]$ 组成, 也就是说构作闭围道 $L = \bigcup_{s=1}^{7} L_s$, 沿正方向 ("逆时针方向") 循行.

根据柯西基本定理, $\int_L f(z)dz = 0$. 因此成立等式

$$K_\varepsilon{}^{①} = \int_{L_1} f(z)dz = -\sum_{s=2}^{7}\int_{L_s} f(z)dz.$$

根据被积函数的周期性 $(f(z+1) = f(z))$, 有

$$\int_{L_2} f(z)dz = -\int_{L_7} f(z)dz.$$

还有, 由于沿着截口的不同的边沿, 解析函数的平方根的值仅差一个符号, 而沿着线段 L_4 和 L_5 的循行方向是相反的, 所以

$$\int_{L_4} f(z)dz = \int_{L_5} f(z)dz.$$

设 $z = x+ib, x \in L_1$. 那么当 $b \to +\infty$ 时成立一致极限:

$$f(z) = \frac{e^{2\pi imz}}{\sqrt{\varepsilon^2+\sin^2\pi z}} \underset{x}{\rightrightarrows} 0.$$

这里我们使用了魏尔斯特拉斯定理, 因为对于某常数 $c > 0$ 成立不等式

$$|f(z)| = |f(x+ib)| \leqslant ce^{-\pi b(2m+1)}.$$

因此, 根据依赖于参数的函数的常义积分的积分号下取极限的定理, 得到

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{L_3} f(z)dz = \lim_{b\to+\infty}\int_{L_6} f(z)dz = 0.$$

于是

$$K_\varepsilon = \int_{L_1} f(z)dz = 2\lim_{b\to+\infty}\left(-\int_{L_4} f(z)dz\right) = 2\int_{ia}^{+\infty i} f(z)dz.$$

① 原文此处为 c_m——译者注.

我们指出, $\sin(\pi i t) = i\,\mathrm{sh}(\pi t)$. 因此, 积分 K_ε 变成

$$K_\epsilon = 2i\int_a^{+\infty}\frac{e^{-2\pi mt}}{\sqrt{\varepsilon^2-\mathrm{sh}^2\,\pi t}}dt = 2\int_a^{+\infty}\frac{e^{-2\pi mt}}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\,\pi t-\varepsilon^2}}dt.$$

显然,

$$\pi a = \ln(\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2}),\quad e^{\pi a} = \varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2},$$
$$e^{-\pi a} = -\varepsilon+\sqrt{1+\varepsilon^2},\quad \mathrm{sh}\,\pi a = \varepsilon.$$

在 K_ε 的最后的积分表达式中作变量变换 $x = t-a$, 得

$$K_\varepsilon = 2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2\pi m(t+a)}}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\,\pi(t+a)-\mathrm{sh}^2\,\pi a}}dt.$$

使用公式

$$\mathrm{sh}\,u+\mathrm{sh}\,v = 2\mathrm{sh}\frac{u+v}{2}\cdot\mathrm{ch}\frac{u-v}{2},\mathrm{sh}\,u-\mathrm{sh}\,v = 2\mathrm{ch}\frac{u+v}{2}\cdot\mathrm{sh}\frac{u-v}{2},$$

求得

$$\mathrm{sh}^2\pi(t+a)-\mathrm{sh}^2\pi a = \mathrm{sh}\,\pi(t+2a)\mathrm{sh}\pi t.$$

因此

$$K_\varepsilon = 2e^{-2\pi am}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2\pi mt}}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\pi(t+2a)\,\mathrm{sh}\,\pi t}}dt = 2e^{-2\pi am}G_a.$$

由于当 $x\geqslant 0$ 时, 函数 $\mathrm{sh}\,x$ 是单调的且 $\mathrm{sh}\,\pi\,x\geqslant\pi\,x$, 所以成立不等式

$$G_a\leqslant I_1+I_2, I_1 = \int_0^{2a}\frac{e^{-2\pi mt}}{\sqrt{\pi t\,\mathrm{sh}\,\pi(t+2a)}}dt, I_2 = \int_{2a}^{+\infty}\frac{dt}{\sin\pi t}.$$

接着有 $\left(\mathrm{sh}2\pi a = 2\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2}\right)$

$$I_1\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi\mathrm{sh}2\pi a}}\int_0^{2a}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{8a}{\pi\mathrm{sh}2\pi a}}\leqslant\frac{2}{\pi}.$$

使用变量变换 $x = e^{\pi t}$, 得

$$I_2 = \frac{2}{\pi}\int_{e^{2\pi a}}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{\pi}\int_{e^{2\pi a}}^{+\infty}\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\ln\frac{\mathrm{ch}\,\pi a}{\mathrm{sh}\,\pi a} = \frac{1}{\pi}\ln\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

结果

$$G_a\leqslant\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\ln\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

最后我们得到对于傅里叶系数的估计

$$
\begin{aligned}
|c_m| &\leqslant 2\varepsilon\left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\ln\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)e^{-m\varepsilon}\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}\left(4+\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-m\varepsilon}\text{①}=\frac{4+\ln N}{\pi N}e^{-\frac{m}{N}}. \qquad ◀
\end{aligned}
$$

下面的讨论可以使用函数 $\psi_N(x)$ 的傅里叶系数的更弱的估计. 但是这里引入的估计自有其独立的意义.

§9. 外尔准则

现证下面的定理. 它叫作数列的值模 1 一致分布的**外尔准则**.

定理 5 下面的论断彼此等价:

(1) 数列 $\{x_n\}$ 模 1 一致分布;

(2) 对于任意固定的 α 和 $\beta, 0\leqslant\alpha<\beta<1$ 成立关系式

$$\lim_{N\to\infty}\frac{F(N,\alpha,\beta)}{N}=\beta-\alpha;$$

(3) 对于任意的定义在闭区间 $[0,1]$ 上的黎曼可积函数 $f(x)$, 成立关系式

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x_n)=\int_0^1 f(x)dx;$$

(4) 对于任意的连续函数 $f(x)$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x_n)=\int_0^1 f(x)dx;$$

(5) 对于任意的整数 $m\neq 0$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i m x_n}=0.$$

▶ 由定义显然有 (1) $\Rightarrow$ (2). 另外 (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5). 剩下的只是证明 (2) $\Rightarrow$ (3) 和 (5) $\Rightarrow$ (1).

先证 (2) $\Rightarrow$ (3). 用下面的等式定义周期为 1 的函数:

$$g(x)=\begin{cases}1, \text{若}\alpha\leqslant x<\beta,\\ 0, \text{若}x\in[0,1)\setminus[\alpha,\beta),\end{cases}$$

①译者算不出 $2\ln\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}\leqslant\ln\frac{1}{\varepsilon}$ —— 译者注.

那么命题 (2) 可表示为

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(x_n)=\int_0^1 g(x)dx.$$

我们指出, 如果上式对某些函数 $g_1(x),\cdots,g_k(x)$ 成立, 那么它对于任意实系数线性组合 $c_1g_1(x)+\cdots+c_kg_k(x)$ 也成立, 其中 $c_1,\cdots,c_k$ 为实数. 因此, 这个等式对于任意的逐段常值函数成立.

现在任取可积函数 $f(x)$. 那么对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在分法 $T:0=x_0<\cdots<x_r=1$, 使得成立不等式

$$s(T)\leqslant\int_0^1 f(x)dx\leqslant S(T), S(T)-s(T)<\frac{\varepsilon}{3},$$

其中 $s(T)$ 和 $S(T)$ 分别是达布下和与达布上和,

$$s(T)=\sum_{t=1}^{r} m_t\Delta x_t,\quad S(T)=\sum_{t=1}^{r} M_t\Delta x_t,$$
$$m_t=\inf_{x\in\Delta_t} f(x),\quad M_t=\sup_{x\in\Delta_t} f(x).$$

达布和可以写成

$$s(T)=\int_0^1 h(x)dx,\quad S(T)=\int_0^1 H(x)dx,$$

其中, 当 $x\in\Delta_t=[x_{t-1},x_t), t=1,\cdots,r$ 时

$$h(x)=m_t,\quad H(x)=M_t.$$

由于 $h(x)$ 和 $H(x)$ 是逐段常值函数, 所以存在数 N_0, 使得对于一切 $N>N_0$ 成立不等式

$$\left|N^{-1}\sum_{n=1}^{N} h(x_n)-\int_0^1 h(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$
$$\left|N^{-1}\sum_{n=1}^{N} H(x_n)-\int_0^1 H(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此

$$s(T)-\frac{\varepsilon}{3}<N^{-1}\sum_{n=1}^{N} h(x_n)\leqslant N^{-1}\sum_{n=1}^{N} H(x_n)<S(T)+\frac{\varepsilon}{3}.$$

但由于对于一切点 $x\in[0,1]$ 成立不等式 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant H(x)$, 所以

$$N^{-1}\sum_{n=1}^{N} h(x_n)\leqslant N^{-1}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)\leqslant N^{-1}\sum_{n=1}^{N} H(x_n).$$

因此, 从前面的不等式得到

$$s(T)-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant N^{-1}\sum_{n=1}^{N}f(x_n)\leqslant S(T)+\frac{\varepsilon}{3}.$$

结果

$$\left|N^{-1}\sum_{n=1}^{N}f(x_n)-\int_0^1 f(x)dx\right|\leqslant S(T)-s(T)+\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon.$$

这表明命题 (3) 成立.

现证 (5)⇒(1). 要证的是 $\lim\limits_{Q\to\infty}D(Q)=0$. 为此把函数 $F(Q,\alpha,\beta)$ 写成

$$F(Q,\alpha,\beta)=\sum_{n\leqslant Q}g(x_n),$$

其中

$$g(x)=\begin{cases}1, & 若\ \alpha<x<\beta,\\ 0, & 若\ x\notin(\alpha,\beta).\end{cases}①$$

我们指出, 函数 $g(x)$ 可以写成

$$g(x)=\rho(\beta-x)-\rho(\alpha-x)+(\beta-\alpha),$$

其中 $\rho(x)=\dfrac{1}{2}-\{x\}$. 再考虑一个以 1 为周期的函数

$$g_0(x)=\begin{cases}1, & 若\ \alpha<x<\beta,\\ \dfrac{1}{2}, & 若\ x=\alpha,x=\beta,\\ 0, & 若\ 0\leqslant x<\alpha,\beta<x<1\end{cases}$$

在 [0,1] 上, 除了 $x=\alpha$ 和 $x=\beta$ 外, 在其他点处 g_0 与 g 重合都等于 $\dfrac{1}{2}$. 可把 g_0 写成

$$g_0(x)=\rho_0(\beta-x)-\rho_0(\alpha-x)+\beta-\alpha,$$

其中

$$\rho_0(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\{x\}, & 若x不是整数,\\ 0, & 若x是整数.\end{cases}$$

早先 (见第三部分第 23 讲) 对于任意的 $N\geqslant 1$, 曾得到不等式

$$\left|\rho_0(x)-\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin 2\pi nx}{\pi n}\right|\leqslant\psi_N(x),$$

① 原文此处为 $g(x)=\begin{cases}1, 若\alpha\leqslant x<\beta,\\ 0, 在相反的情形\end{cases}$ —— 译者注.

其中 $\psi_N(x)=\dfrac{4}{\sqrt{1+N^2\sin^2\pi x}}$. 我们指出, 如果把函数 ρ_0 在整点处的值从零改为 $\dfrac{1}{2}$, 即函数 ρ 在整点处的值, 上面的不等式依然成立.

把函数 $\psi_N(x)$ 展开成傅里叶级数. 根据引理, 它的傅里叶系数 c_m 以下式作出估计:

$$|c_m|\leqslant(\pi N)^{-1}(4+\ln\ N)e^{-\frac{|m|}{N}}.$$

于是

$$g(x)=\beta-\alpha+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\pi n}(\sin 2\pi n(\beta-x)-\sin 2\pi n(\alpha-x))+R_N,$$

其中

$$|R_N|\leqslant\psi_N(\beta-x)+\psi_N(\alpha-x).$$

令 $M=[N\ln\ N]+1$. 那么函数 $\psi_N(x)$ 可写成

$$\psi_N(x)=\sum_{0<|m|\leqslant M}c_m e^{2\pi imx}+O\left(\frac{\ln\ M}{M}\right).$$

从关于函数 g 的关系式出发来变换函数 $F(Q;\alpha,\beta)$, 得

$$\left|Q^{-1}F(Q;\alpha,\beta)-(\beta-\alpha)\right|=\left|Q^{-1}\sum_{n\leqslant Q}g(x_n)-(\beta-\alpha)\right|$$
$$\leqslant Q^{-1}\sum_{1\leqslant|m|\leqslant M}\left(|c_m|+\frac{1}{2\pi|m|}\right)(|T_m(\beta)|+|T_m(\alpha)|)+\frac{A\ln\ N}{N},$$

其中 $A>0$ 是常数,

$$T_m(\beta)=\sum_{n\leqslant Q}e^{2\pi im(\beta-x_n)}.$$

对于任意的实数 β 成立等式

$$|T_m(\beta)|=|T_m(0)|=T_m.$$

任取 $\varepsilon>0$. 根据条件

$$\frac{A\ln\ N}{N}<\frac{\varepsilon}{2}$$

选取最小的数 N, 即

$$N=\left[\frac{2A}{\varepsilon}\ln\frac{2A}{\varepsilon}\right]+1.$$

由于 $\lim\limits_{Q\to\infty}Q^{-1}T_m=0$, 所以存在数 Q_0, 使得对于一切 $Q>Q_0$ 和一切 $m, 1\leqslant m\leqslant M=[N\ln\ N]+1$, 成立不等式

$$|Q^{-1}T_m|\leqslant\frac{\pi\varepsilon}{4(1+1+\ln\ N)\ln\ N}.$$

因此, 对于任何 $\varepsilon>0$ 都找得到数 Q_0 使得对于一切 $Q>Q_0$ 成立不等式

$$D(Q)=\sup_{0\leqslant\alpha<\beta<1}|Q^{-1}F(Q;\alpha,\beta)-(\beta-\alpha)|<\varepsilon.$$

这表明 $\lim\limits_{N\to\infty}D(Q)=0$. ◀

例 1 设 α 和 β 是实数且 α 是无理数. 那么数列 $\{\alpha n+\beta\}$ 模 1 一致分布.

实际上, 对于任意固定的整数 $m\neq 0$, 有

$$\sigma_N=\left|N^{-1}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i m(\alpha n+\beta)}\right|\leqslant\frac{1}{N|\sin\pi m\alpha|}.$$

由于 α 是无理数, 所以 $\sin\pi m\alpha\neq 0$. 因此当 $N\to\infty$ 时 $\sigma_N\to 0$. 结果, 根据外尔准则, 数列 $\{\alpha n+\beta\}$ 模 1 一致分布.

例 2 设 α 是无理数且 $\Delta x_n=x_{n+1}-x_n$ 当 $n\to\infty$ 时收敛到 α. 那么数列 $\{x_n\}$ 模 1 一致收敛. 特别地, 数列 $\{\alpha_n+\sqrt{n}\}$ 模 1 一致收敛.

令 $x_{n+1}-x_n=\alpha+y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 考虑三角和

$$S_N=N^{-1}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i m x_n}.$$

那么

$$S_Ne^{2\pi i\alpha m}=N^{-1}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i m(x_{n+1}-y_n)}=N^{-1}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi i m x_{n+1}}+r_N,$$

其中

$$r_N=N^{-1}\sum_{n=1}^{N}\left(e^{2\pi i m(x_{n+1}-y_n)}-e^{2\pi i m x_{n+1}}\right).$$

由此得到

$$-S_N(1-e^{2\pi i m\alpha})=r_N+N^{-1}\left(e^{2\pi i m x_{N+1}}-e^{2\pi i m x_1}\right).$$ ①

此式右端当 $N\to\infty$ 时趋于零. 实际上

$$|r_N|\leqslant N^{-1}\sum_{n=1}^{N}|1-e^{-2\pi i m y_n}|=\frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}|\sin\pi m y_n|$$

$$\leqslant 2\pi|m|\cdot N^{-1}\sum_{n=1}^{N}|y_n|.$$ ②

①此式原文左端没有负号 —— 译者注.

②此处原文为 $2\pi|m|N^{-1}|y_n|$ —— 译者注.

由于 $\lim_{n\to\infty}|y_n|=0$, 所以有

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{n=1}^{N}|y_n|=0,$$

从而 $\lim_{N\to\infty} r_N=0$.

由于 $1-e^{2\pi im\alpha}\neq 0$(根据 α 是无理数), 所以 $\lim_{N\to\infty} S_N=0$, 而这表明, 数列 $\{x_n\}$ 模 1 一致分布.

例 3 设 $\{F_n\}$ 是斐波那契数列: $F_1=1, F_2=1$, 当 $n\geqslant 2$ 时 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$. 那么数列 $\{\ln\ F_n\}$ 是模 1 一致分布的.

实际上, 对于 F_n 成立公式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right).^{①}$$

由此得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\alpha.$$

因此, 当 $n\to\infty$ 时 $\ln\ F_{n+1}-\ln\ F_n\to\ln\ \alpha$. 由于 $\ln\ \alpha$ 是无理数, 所以由例 2 的结论知, 数列 $\{\ln\ F_n\}$ 模 1 一致分布.

例 4 设 $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\alpha$ 是无理数. 那么数列 $\{f(n)\}$ 模 1 一致分布.

事实上, 从拉格朗日有限增量定理知 $\lim_{n\to\infty}\Delta f(n)=\alpha$. 由此, 使用例 2 的结论, 得知数列 $\{f(n)\}$ 模 1 一致分布.

在考察下一个例子之前, 先证明外尔–范德科普 (van der Corput) 不等式.

引理 4 *设 $u_1,\cdots,u_N$ 是任意的复数, H 是自然数, $1\leqslant H\leqslant N$. 那么成立不等式*

$$H^2\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant N}u_n\right|^2\leqslant H(N+H-1)\sum_{1\leqslant n\leqslant N}|u_n|^2$$
$$+2(N+H-1)\sum_{h=1}^{H-1}(H-h)\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant N-h}u_n\bar{u}_{n+h}\right|.$$

这里 $\bar{u}$ 是数 u 的复共轭数.

► 为了便于论述, 我们定义 u_n 当 $n\leqslant 0$ 和 $n>N$ 时皆取值零. 那么成立等式

$$H\sum_{n=1}^{N}u_n=\sum_{n=1}^{N+N-1}\sum_{m=0}^{H-1}u_{n-m}.$$

①此式经不住验证 —— 译者注.

将其两边平方并使用柯西不等式

$$\left|\sum a_\nu b_\nu\right|^2 \leqslant \sum |a_\nu|^2 \sum |b_\nu|^2,$$

得

$$H^2 \left|\sum_{n=1}^{N} u_n\right|^2 \leqslant (N+H-1)W,$$

其中

$$W = \sum_{n=1}^{N+H-1} \left|\sum_{m=0}^{H-1} u_{n-m}\right|^2.$$

处理和式 W. 把它分成 "对角线" 项的和 W_1 与 "非对角线" 项的和 W_2. 那么

$$\begin{aligned} W &= \sum_{n=1}^{N+H-1} \left(\sum_{m=0}^{H-1} u_{n-m}\right)\left(\sum_{k=0}^{H-1} \bar{u}_{n-k}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{H-1}\sum_{k=0}^{H-1}\sum_{n=1}^{N+H-1} u_{n-m}\bar{u}_{n-k} \\ &= W_1 + W_2, \end{aligned}$$

其中

$$W_1 = \sum_{m=0}^{H-1}\sum_{n=1}^{N+H-1} |u_{n-m}|^2,$$ ①

$$W_2 = \sum_{0\leqslant m<k\leqslant H-1}\sum_{n=0}^{N+H-1} (u_{n-m}\bar{u}_{n-k} + \bar{u}_{n-m}u_{n-k}).$$

显然成立等式

$$\sum_{n=1}^{N+H-1} |u_{n-m}|^2 = \sum_{n=1}^{N} |u_n|^2,$$

因为当 $n \leqslant 0$ 和 $n > N$ 时 $u_n = 0$. 所以

$$W_1 = H\sum_{n=1}^{N} |u_n|^2.$$ ②

处理和式 W_2, 引入下列符号 $n-m=l, n-k=l+h$. 得到

$$W_2 = \sum_{m=0}^{H-1}\sum_{h=1}^{H-m-1}\sum_{l=1}^{N-h} (u_l\bar{u}_{l+h} + \bar{u}_l u_{l+h}).$$

---

①原文为 $W_1 = \sum\limits_{m=0}^{H-1}\left|\sum\limits_{n=1}^{N+H-1} u_{n-m}\right|^2$ —— 译者注.

②原文为 $W_1 = H\left|\sum\limits_{n=1}^{N} u_n\right|^2$ —— 译者注.

在此式中交换关于 h 和关于 m 的求和次序并转化为不等式, 就得到

$$|W_2| \leqslant 2\sum_{h=1}^{H-1}\sum_{m=0}^{H-h-1}\left|\sum_{l=1}^{N-h} u_l\bar{u}_{l+h}\right|$$
$$= 2\sum_{h=1}^{H-1}(H-h)\left|\sum_{n=1}^{N-h} u_n\bar{u}_{n+h}\right|. \quad ◀$$

例 5 设对于任意固定的自然数 h, 数列 $\{x_{n+h}-x_n\}$ 都是模 1 一致分布的. 那么数列 $\{x_n\}$ 是模 1 一致分布的.

固定整数 $m \neq 0$ 和自然数 H. 根据外尔–范德科普不等式

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n}\right|^2 \leqslant \frac{H+N-1}{HN^2}$$
$$+2\sum_{h=1}^{H-1}\frac{(H+N-1)(H-h)}{H^2N}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{H-h} e^{2\pi i m(x_{n+h}-x_n)}\right| ①.$$

对于任意固定的 $h \geqslant 1$, 数列 $\{x_{n+h}-x_n\}$ 模 1 均匀分布, 因此, 根据外尔准则, 当 $N \to \infty$ 时

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i m(x_{n+h}-x_n)} \to 0.$$

于是, 在前面的不等式中令 $N \to \infty$ 得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n} = 0.$$

从而 $\{x_n\}$ 是模 1 一致分布的.

例 6 设 $k \geqslant 1$ 是固定的自然数. 还设 $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta^k x_n = \alpha$ 是无理数. 那么数列 $\{x_n\}$ 模 1 一致分布.

我们对参数 k 进行归纳来完成命题的证明. 当 $k=1$ 时, 命题即例 2 的结论. 设命题对于 $k=m$ 成立. 我们来证明它对于 $k=m+1$ 也成立. 我们有

$$\Delta_h(\Delta^m x_n) = \Delta^m(x_{n+h}) - \Delta^m x_n = \Delta^{m+1}x_n + \Delta^{m+1}x_{n+1} + \cdots + \Delta^{m+1}x_{n+h-1}.$$

由此, 对于固定的 $h \geqslant 1$, 当 $n \to \infty$ 时得 $\Delta_h(\Delta^m x_n) \to h\alpha$, 这里 $h\alpha$ 照旧是无理数.

我们指出, $\Delta_h(\Delta^m x_n) = \Delta^m(\Delta_h x_n)$. 对于数列 $\{\Delta_h x_n\}$ 使用归纳假设, 得知数列 $\{\Delta_h x_n\}$ 对于任意固定的 $h \geqslant 1$ 都是模 1 一致分布的.

结果, 从例 5 的结论知, 数列 $\{x_n\}$ 是模 1 一致分布的. 特别地由此推出, 最高次项系数是无理数的多项式 f 的值的序列 $\{f(n)\}$ 是模 1 一致分布的.

①原文此处第一项少因子 $\frac{1}{N}$, 第二项少因子 2 —— 译者注.

用于讨论班和考试的示范性问题和习题

第一学期

讨论班 1

1. 集合. 集合的运算. 笛卡儿乘积. 映射及函数. 双方单值对应. 反函数.

2. 集合的对等. 可数集. 有理数集的可数性.

3. 康托关于集合与其幂集不对等的定理.

4. 具有连续统的势的集合. 连续统的不可数性.

5. 2 的平方根是无理数. 实数的十进制写法. 实数的性质. 阿基米德公理.

6. 关于有上界的数集合有上确的定理.

7. 关于集合可分性的引理. 关于嵌套闭区间系的引理. 关于收缩闭区间序列的引理.

8. 无穷大数列与无穷小数列及其性质.

9. 伯努利不等式和牛顿二项式.

10. 收敛数列及其算术性质.

11. 不等式中的极限过程.

12. 单调数列. 魏尔斯特拉斯定理.

13. 数 e 及其无理性. 欧拉常数.

14. 波尔查诺–魏尔斯特拉斯关于有界数列有部分极限的定理. 数列的上极限和

下极限.

15. 数列收敛的柯西准则.

16. 施托尔茨 (Stolz) 定理. 收敛数列的算术平均项的数列的极限. 开普勒方程的解的存在性.

17. 无穷几何级数的项的和. 海伦迭代公式. 极限关系式:

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1, \quad a > 0; \quad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

问题

1. 证明:$[a,b] \sim (a,b), [a,b] \sim [a,b)$.

2. $\sup\ A = -\inf(-A), \sup(A \cup B) = \max(\sup\ A, \sup\ B)$.

3. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$, 其中 k 是常数;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \ln\ a, a > 0$

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = +\infty$.

5. 设对于一切 $n \in \mathbb{N}_+, p_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} (p_1\cdots p_n)^{\frac{1}{n}} = p$.

6. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ 出发证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = e$.

7. 证明数列 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}$ 严格减当且仅当 $p \geqslant \frac{1}{2}$.

8. 对于一切满足条件 $|r| < 1$ 的有理数 r 成立不等式 $1 + r \leqslant e^r \leqslant 1 + \frac{r}{1-r}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

10. 设 $\{x_n\}$ 是有界变差数列, 即有 $C > 0$ 使得对于一切 $n \in \mathbb{N}_+$ 有 $\sum\limits_{k=1}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| < C$. 那么数列 $\{x_n\}$ 收敛.

11. 设 $0 \leqslant x_{n+m} \leqslant x_n + x_m$. 那么存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$.

12. a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$, 如果后两个极限存在的话.

    b) 如果存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 和 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n = b$, 则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n b_n = ab$.

    c) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (-a_n)$.①

13. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. 那么存在 $\min\limits_{n\in\mathbb{N}_+} a_n$.

14. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 那么 $\{a_n\}$ 或有最大元或有最小元, 或两者兼而有之.

15. 设 $s_n = a_1 + \cdots + a_n \to +\infty, a_k > 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 那么 s_n 的小数部分的极限点的集合与闭区间 $[0,1]$ 重合.

16. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = 0$, 而 $l = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} s_n < L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} s_n$. 那么 $\{s_n\}$ 在闭区间 $[l, L]$ 上处处稠密.

---

① 原文为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (-a_n)$—— 译者注.

17. a) 设 $a_n > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 那么存在无穷多个号码 n, 使得 $a_n > \max(a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \cdots)$.

b) 设 $a_n > 0$ 且 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 0$. 那么存在无穷多个号码 n, 使得 $a_n < \min(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$.

讨论班 2

1. 函数在一点处的极限. 在一点处无穷小的函数. 在一点处有极限的函数的有界性. 有极限的函数的算术运算. 函数极限的单调性.

2. 函数沿着集合基有极限的柯西准则.

3. 函数极限的柯西定义与海涅定义的等价性.

4. 关于复合函数沿集合基的极限的定理.

5. 函数在一点处的连续性. 单侧连续性. 连续函数的算术运算. 正弦函数与指数函数的连续性.

6. 重要的极限.

7. 函数的间断点及其分类. 单调函数的间断点.

8. 单调函数连续的准则. 关于反函数的连续性的定理、初等函数的连续性. 开普勒方程的连续性.[①]

9. 关于闭区间上连续函数的中间值的柯西定理. 关于闭区间上的连续函数有界, 达到最大值和最小值的魏尔斯特拉斯定理.

10. 关于闭区间上函数的一致连续性的康托尔定理. 数轴上的开集和闭集的性质.

11. 关于紧致集的有限开覆盖的博雷尔引理. 关于紧致集上函数的一致连续性的康托尔定理.

12. 函数的微分和导数的概念. 导数和微分的几何意义. 单侧导数. 函数的微分与不定积分的联系.

13. 复合函数与反函数的导数. 一阶微分形式的不变性. 开普勒方程的解的微分.

14. 两个函数的和、积以及商的导数. 初等函数的导函数.

15. 高阶导数与高阶微分. 莱布尼茨公式与法 · 地 · 伯鲁诺公式.

16. 关于函数在一点处的增长的达布定理. 关于导函数的零点的罗尔定理. 关于有限增量的柯西定理和拉格朗日定理.

17. 关于函数的极值的费马定理. 关于导函数的中间值的达布定理. 关于开区间上导函数的间断点的定理.

[①]原文如此 —— 译者注.

问题

1. 证明: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0\ (a>1,n>0)$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0\ (a>1,\varepsilon>0)$.

2. 设函数在任意开区间 $(1,b)$ 上都有界,$b>1$. 那么

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}(f(x)\geqslant c>0)$.

3. 设函数 $f(x)$ 在任何开区间 $(1,b)$ 上都有界,$b>1$, 并且设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=\infty$. 那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$.

4. 设对于 $x>1$ 给定一列实值函数 $f_1(x),f_2(x),\cdots$. 那么存在一个当 $x\to+\infty$ 时比这些函数的每个都增长得快的函数 $f(x)$.

5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 那么函数

$$f_c(x)=\begin{cases}-c, & 若 f(x)<-c\\ f(x), & 若 |f(x)|<c\\ c, & 若 f(x)>c\end{cases}$$

其中 $c>0$ 是任意的实数,

$$m(x)=\inf_{a\leqslant y<x}f(y),\quad M(x)=\sup_{a\leqslant y<x}f(y).^{①}$$

6. 设函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,+\infty)$ 上连续且有界. 那么对于任意的数 T, 存在数列 $x_n\to+\infty$ 使得

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x_n+T)-f(x_n))=0.$$

7. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 那么存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_0)+\cdots+f(x_n)}{n+1}.$$

8. 为使在有限的开区间 (a,b) 上连续的函数 $f(x)$ 可以连续延拓到闭区间 $[a,b]$ 上, 必需且只需函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

9. 设函数 $f(x)$ 定义在全数轴上, 至少在一个点处连续, 有周期, 异于常值函数. 那么此函数具有最小正周期.

10. 设函数 $f(x)$ 在全数轴上连续, 异于常值函数, 满足函数方程 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. 那么 $f(x)=a^x$, 其中 $a=f(1)$. 此题中, 连续性的条件可用函数在任何开区间 $(0,\alpha)$ 中都有界来代替.

---

① 我不明白这个题目 —— 译者注.

11. 证明函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, 若x\neq 0,\\ 0, \qquad 若x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处无穷可微.

12. 举一个在全数轴的稠子集上连续且在稠子集上间断的函数的例.

13. 设方程 $x^3+px+q=0, p,q\in\mathbb{R}$, 有三个相异的实根. 那么 $p<0$.

14. 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上有 $n-1$ 阶导函数, 在闭区间 $[a,b]$ 上 n 次可微, 且成立等式 $f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)(a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b)$. 那么存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi)=0$.

15. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[1,+\infty)$ 上可微且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 那么 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. 反之, 若 $f(x)=o(x)$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

16. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,+\infty)$ 上连续,$f(a)<0$ 且对于某正数 k, 当 $x>a$ 时成立不等式 $f'(x)>k$. 那么方程 $f(x)=0$ 在开区间 $(a,a+\frac{f(a)}{k})$ 中有唯一的根.

17. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $x\geqslant x_0$ 时 n 次可微, 还设 $f(x_0)=g(x_0), f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0), k=1,\cdots,n-1$, 且 $f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)$ 对一切 $x>x_0$ 成立. 那么对于 $x>x_0$ 成立不等式 $f(x)>g(x)$.

讨论班 3

1. 闭区间上函数可积的黎曼准则.
2. 函数黎曼可积三条件的等价性. 函数黎曼可积的特殊准则.
3. 作为沿着基的极限的黎曼积分. 可积函数类.
4. 定积分的基本性质. 积分的加性.
5. 作为积分上 (下) 限的函数的积分. 积分的导数.
6. 牛顿–莱布尼茨定理. 欧拉求和公式与阿贝尔求和公式.
7. 定积分的变量变换公式及分部积分公式.
8. 第一与第二中值定理.
9. 带积分形式余项的泰勒公式.
10. 含有积分的不等式.
11. 函数黎曼可积的勒贝格准则.
12. 反常积分的定义. 反常积分收敛的柯西准则及收敛的充分条件.
13. 反常积分的绝对收敛与条件收敛. 特殊的收敛准则.
14. 反常积分的变量变换公式及分部积分公式.
15. 多维空间中的曲线. 关于曲线长度的定理.
16. 平面图形的面积与空间立体的体积. 若尔当测度的定义.

17. 集合若尔当可测的准则.

18. 若尔当测度的性质. 可求长曲线的可测性.

19. 函数之黎曼可积性与其曲边梯形之若尔当可测性之间的关系.

20. 勒贝格测度的定义和性质. 勒贝格积分. 斯蒂尔切斯积分.

习 题

1. 设 $f \in R[a,b]$. 那么函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上的连续点的全体构成一个稠密集合.

2. 设 $f \in R[a,b]$. 那么为使 $\int_a^b f^2(x)dx = 0$, 必要且充分的条件是函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上的一切连续点处都取零值.

3. 设 $f \in R[a,b]$. 那么函数 f 满足条件

$$\lim_{h\to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx = 0.$$

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

5. 设 $f \in C[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)dx$

6. 设 f 是连续的以 T 为周期的函数. 那么函数 $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ 可以表示成线性函数与周期为 T 的函数的和.

7. 设 $f(x)$ 是阶数大于 1 的多项式. 那么积分 $\int_0^\infty \sin(f(x))dx$ 收敛.

8. 设在 $[a,b]$ 上 $f'(x)$ 单调且 $|f'(x)| \geqslant A > 0$. 那么

$$\left|\int_a^b \sin(f(x))dx\right| < \frac{2}{A}.$$

9. 设在 $[a,b]$ 上 $f''(x)$ 连续且 $|f''(x)| \geqslant A > 0$. 那么

$$\left|\int_a^b \sin(f(x))dx\right| < \frac{4}{\sqrt{A}}.$$

10. 设函数 $f(x)$ 在开区间 $(0,a)$ 上单调且存在积分

$$\int_0^a x^p f(x)dx. \quad \text{那么} \quad \lim_{x\to+\infty} x^{p+1} f(x) = 0.$$

11. 设 $f \in R[a,b]$. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\ nx dx = 0$.

12. 设 $f \in R[a,b]$. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(x)|\sin\ nx|dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx$.

13. 设 $f \in R[0,1]$. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} f\left(\frac{2\nu-1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$.

14. 设 $f \in R[0,1]$. 那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + (-1)^n f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) = 0.$$

15. $\lim_{n\to\infty}\left[\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}\right]^{\frac{2}{n(n+1)}}=e.$

16. 证明瓦里斯公式 $\pi=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{n}$. 可用对于不等式 $\sin^{2n+1}x\leqslant\sin^{2n}x\leqslant\sin^{2n-1}x$ 沿闭区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 求积分的办法.

17. 设函数 $f(x)$ 有界. 为使 $f\in R[a,b]$, 必要且充分的是, 对于任意的 $\varepsilon>0$ 和任意的 $\delta>0$, 在闭区间 $[a,b]$ 中使 $f(x)$ 的振幅大于 ε 的点的集合可被有限多个其长度总和小于 δ 的开区间所覆盖 (杜 · 布阿–雷蒙准则).

18. 设 $f,g\in R[a,b]$. 那么 $\max(f,g)\in R[a,b],\min(f,g)\in R[a,b]$.

19. 设 $a(t),b(t)\in R[a,b]$ 且 $\int_a^b(a(t)x'(t)+b(t)x(t))dt=0,\forall x(t)\in C^1[a,b],x(a)=x(b)=0$. 那么函数 $a(t)$ 可微且 $a'(t)=b(t)$.

20. 对于 $s>1$ 有

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=s\int_1^{\infty}\frac{\rho(x)}{x^{s+1}}dx+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2},\rho(x)=\frac{1}{2}-\{x\}.$$

21. $\lim_{s\to 1+}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\gamma.$

22. 设在 $[1,+\infty)$ 上 $f(x)>0$ 且不减, 并设当 $x\to+\infty$ 时成立关系式 $\int_1^x\frac{f(u)}{u}du\sim x$. 那么当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\sim x$.

23. 设在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\geqslant 0$, 且当 $\delta\to 0+$ 时成立等式 $\int_1^{+\infty}f(x)e^{-\delta t}dt\sim\frac{1}{\delta}$, 那么当 $T\to+\infty$时 $\int_0^T f(t)dt\sim T$.

24. 设在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$ 且 $f\in C[a,b]$. 那么成立等式 $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$.

第二学期

考试

1. 闭区间上函数可积的黎曼准则.
2. 函数黎曼可积的三个条件的等价性. 函数黎曼可积的特殊准则.
3. 作为沿着基的极限的黎曼积分. 可积函数类.
4. 定积分的基本性质. 积分的加性.
5. 作为积分上 (下) 限的函数的积分. 积分的导数.
6. 牛顿–莱布尼茨定理. 欧拉求和公式与阿贝尔求和公式.
7. 定积分的变量变换公式及分部积分公式.
8. 第一和第二中值定理.
9. 带积分形式余项的泰勒公式.

10. 含积分的不等式.

11. 函数黎曼可积的勒贝格准则.

12. 反常积分的定义. 反常积分收敛的柯西准则及收敛的充分条件.

13. 反常积分的绝对收敛与条件收敛. 收敛的特殊准则.

14. 反常积分中的变量变换公式与分部积分公式.

15. 多维空间中的曲线. 关于曲线长度的定理.

16. 平面图形的面积与空间立体的体积. 若尔当测度的定义.

17. 集合若尔当可测的准则.

18. 若尔当测度的性质. 可求长曲线的可测性.

19. 在函数之黎曼可积性与其曲边梯形之若尔当可测性之间的关系.

20. $\mathbb{R}^n$ 中的连续函数. $\mathbb{R}^n$ 中的可微函数. 函数在一点处可微的充分条件.

21. 关于复合函数的微分的定理. 一阶微分形式的不变性. 微分法则. 方向导数. 梯度. 微分的几何意义.

22. 高阶偏导数. 关于二阶混合导数相等的定理.

23. 高阶微分. 可微的充分条件. 带有佩亚诺和拉格朗日形式的余项的泰勒公式.

24. 泰勒公式的应用. 多元函数的局部极值. 极值的充分条件.

25. 隐函数. 关于隐函数的定理.

26. 隐函数组. 关于隐函数组的定理. 关于逆映射的定理.

27. 多元函数的条件极值. 条件极值的必要条件. 拉格朗日乘子法.

第三学期

讨论班 4

1. 数值级数的收敛. 调和级数. 柯西准则的叙述. 级数的通项和余项.

2. 级数收敛的判别法 (比较判别法, 达朗贝尔判别法, 柯西判别法, 库默尔和拉比判别法). 柯西–马克劳林积分判别法. 黎曼 ζ 函数的级数的收敛性.

3. 对于任意数值级数的莱布尼茨, 阿贝尔, 狄利克雷的收敛判别法.

4. 级数的绝对收敛和条件收敛. 绝对收敛级数的项的重排.

5. 关于在条件收敛的级数中的项的重排的黎曼定理.

6. 关于绝对收敛级数的乘积的定理. 关于级数乘积的梅尔滕斯定理.

7. 关于二重数值级数和累次数值级数的收敛性的定理.

8. 函数级数的一致收敛. 一致收敛的函数级数的和的连续性. 函数级数一致收敛的柯西准则和魏尔斯特拉斯判别法.

9. 级数一致收敛的阿贝尔判别法及狄利克雷判别法.

10. 关于函数级数一致收敛的迪尼定理

11. 函数级数的逐项积分和逐项微分.

12. 关于沿着集合基的二重极限和累次极限的定理.

13. 幂级数. 收敛半径. 柯西–阿达玛定理. 关于级数的和在闭区间上连续的阿贝尔定理.

14. 无穷乘积. 绝对收敛的判别法. 无穷乘积形式的 Γ 函数 (伽玛函数), 欧拉公式和关于 Γ 函数的函数方程.

15. 常义参变积分的连续性. 莱布尼茨法则. 关于累次积分相等的定理.

16. 反常积分一致收敛的魏尔斯特拉斯判别法, 阿贝尔判别法以及狄利克雷判别法.

17. 关于反常积分的连续性、可微性和可积性的定理.

18. 关于无穷积分限的累次积分的定理. 狄利克雷积分的计算.

19. 欧拉的 Γ 函数的积分表示. 余元公式. 斯特林公式.

习 题

1. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(t\ln\ n)}{n}$ 对于任何实数 t 都发散.

2. 设 $p_n>0$ 且级数 $\sum p_n$ 收敛. 那么 $\sum p_n^2$ 和 $\sum\frac{\sqrt{p_n}}{n}$ 都收敛.

3. 设 $p_n>0$, 级数 $\sum p_n$ 收敛且 $r_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}p_k$. 那么级数 $\sum\frac{p_n}{r_n}$ 发散而级数 $\sum\frac{p_n}{\sqrt{r_n}}$ 和 $\sum\frac{p_n}{r_n^{1-\alpha}}(\alpha>0)$ 收敛.

4. 设 $p_n>0$, 级数 $\sum p_n$ 发散且 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k$. 那么级数 $\sum\frac{p_n}{s_n}$ 发散, 而级数 $\sum\frac{p_n}{s_n^2}$ 和 $\sum\frac{p_n}{s_n^{1+\alpha}}(\alpha>0)$ 收敛.

5. a) 设 $p_n>0, p_n$ 不增且级数 $\sum p_n$ 收敛. 那么

$$\lim_{n\to\infty}np_n=0.$$

b) 设 $p_n>0, p_nn^{-a}$ 不增 $(a>0)$ 且 $\sum p_n$ 收敛. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=0$.

c) 设 $p_n>0, np_n$ 不增且 $\sum p_n$ 收敛. 那么

$$\lim_{n\to\infty}(n\ln\ n)p_n=0.$$

6. 设 $\{p_n\}$ 是全体素数所成的序列. 那么级数 $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{p_n(\ln\ \ln\ n)^{\alpha}}$ 当 $\alpha>1$ 时收敛而当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.

7. 设 $0<\alpha_n\leqslant C\forall n\in\mathbb{N}_+, \frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}<\alpha_{n+1}$, 级数 $\sum u_n$ 收敛且 $|nu_n|\leqslant C_1\forall n\in\mathbb{N}_+$, 其中 $C, C_1>0$ 是常数. 那么级数 $\sum\alpha_nu_n$ 收敛.

8. 级数 $\sum\limits_{m_1,\cdots,m_r=1}^{\infty} \frac{1}{(m_1^2+\cdots+m_r^2)^\alpha}$ 当 $\alpha > \frac{r}{2}$ 时收敛而当 $\alpha \leqslant \frac{r}{2}$ 时发散.

9. 级数 $\sum\limits_{m_1,\cdots,m_r=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{\alpha_1}+\cdots+m_r^{\alpha_r}}$ 当 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_r}<1$ 时收敛, 而当 $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_r}\geqslant 1$ 时发散.

10. 设 $r>0, s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^r}, a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-1}}{k^r(n-k+1)^r}$①. 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是原级数的平方, 当 $r>\frac{1}{2}$ 时收敛到 s^2 而当 $r\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散.

11. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{((n-1)x+1)(nx+1)}$ 在点 $x=0$ 的任何一个固定的邻域内都不一致收敛.

12. 分别在区域

a) $\varepsilon<x<2\pi-\varepsilon, y>0$;

b) $y>0$

中研究级数 $f(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\ nx}{n^y}$ 的一致收敛性.

13. 证明函数 e^x 和 $\sin\ x$ 的泰勒级数在 $\mathbb{R}$ 上都不一致收敛.

14. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}x, & 若 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 若 1<x\leqslant 2;\end{cases}$$

$\varphi(x+2)=\varphi(x)\forall x\in\mathbb{R}$. 那么函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^nx)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续但处处不可微.

15. a) 设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上, $f_n(x)=\frac{1}{n}[nf(x)]$. 那么 $f_n(x)\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}f(x)\quad(n\to\infty)$.

b) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, $f_n(x)=n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)$. 那么 $f_n(x)\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}f'(x)(n\to\infty)$. (适当补充 f 在 $[a,b]$ 外的定义, 译者注)

c) 若 $f_n(x)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)$, 则 $f_n(x)\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}\int_0^1 f(x+t)dt$②$(n\to\infty)$.(附上条件 $f\in C[a,b+1]$—— 译者注.)

16. 设级数 $\sum a_nn^{-\sigma}$ 对于某 $\sigma>0$ 收敛. 那么当 $N\to\infty$ 时 $a_1+\cdots+a_N=o(N^\sigma)$.

17. $\int_0^1 x^{-x}dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-n}$.

18. $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}$.

考试

1. 数值级数的收敛. 调和级数. 柯西准则的叙述. 级数的通项和余项.

2. 级数收敛的判别法 (比较判别法, 达朗贝尔判别法, 柯西判别法, 库默尔和拉比判别法). 柯西–马克劳林积分判别法. 黎曼 ζ 函数的级数的收敛性.

---

①原文是 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-1}}{k^r(n-k+1)}$—— 译者注.

②原文此处是 "$\int_a^b f(x)$" —— 译者注.

3. 对于任意数值级数的莱布尼茨, 阿贝尔, 狄利克雷的收敛判别法.

4. 级数的绝对收敛和条件收敛. 绝对收敛级数的项的重排.

5. 关于在条件收敛的级数中的项的重排的黎曼定理.

6. 关于绝对收敛级数的乘积的定理. 关于级数乘积的梅尔滕斯定理.

7. 关于二重数值级数和累次数值级数的收敛性的定理.

8. 函数级数的一致收敛. 一致收敛的函数级数的和的连续性. 函数级数一致收敛的柯西准则和魏尔斯特拉斯判别法.

9. 级数一致收敛的阿贝尔判别法及狄利克雷判别法.

10. 关于函数级数一致收敛的迪尼定理.

11. 函数级数的逐项积分和逐项微分.

12. 关于沿着集合基的二重极限和累次极限的定理.

13. 幂级数. 收敛半径. 柯西–阿达马定理. 关于级数的和在闭区间上连续的阿贝尔定理.

14. 无穷乘积. 绝对收敛的判别法. 无穷乘积形式的 Γ 函数 (伽玛函数), 欧拉公式和关于 Γ 函数的函数方程.

15. 正常参变积分的连续性. 莱布尼茨法则. 关于累次积分相等的定理.

16. 反常积分一致收敛的魏尔斯特拉斯判别法, 阿贝尔判别法以及狄利克雷判别法.

17. 关于反常积分的连续性、可微性和可积性的定理.

18. 关于无穷积分限的累次积分的定理. 狄利克雷积分的计算.

19. 欧拉的 Γ 函数的积分表示. 余元公式. 斯特林公式.

20. 关于贝努利函数用三角多项式逼近的定理.

21. 严格正则函数的贝塞尔不等式. 封闭正交系的完全性.

22. 关于三角函数系的封闭性的定理.

23. 关于严格逐段光滑函数的傅里叶级数的一致收敛性的定理.

24. 狄利克雷核与傅里叶部分和的积分表示. 黎曼局部化原理.

25. 傅里叶级数收敛的迪尼判别法, 李普希兹判别法, 若尔当判别法以及狄利克雷判别法.

26. 余切的最简公分展开. 正弦表示成无穷乘积.

27. 费耶核、魏尔斯特拉斯的三角多项式和代数多项式逼近定理.

28. 拉普拉斯方法和稳态相方法.

第四学期

考试

1. 作为沿基的极限的二重黎曼积分. 二元函数沿矩形可积的黎曼准则.

2. 沿矩形二重积分存在的准则的三种表述的等价性、二元函数沿矩形可积的联系于均匀分法的特殊准则.

3. 曲面柱形的若尔当可测准则.

4. 沿有界的若尔当可测区域的二重积分的一般定义与通过集合的特征函数作的定义的等价性.

5. 平面集合若尔当可测准则.

6. 二重积分的基本性质 (线性性质, 不等式的积分, 中值定理, 加性)、二重积分化为累次积分.

7. 二元函数的可积性:

a) 矩形上的连续函数; b) 若尔当可测集上的连续且有界的函数.

8. 关于把紧致凸集上的光滑映射的增量换成微分所产生的误差的定理.

9. 关于凸集在光滑映射下的像的面积的引理.

10. 二元函数黎曼可积的勒贝格准则.

11. 第一类和第二类反常积分非负函数的第一类反常积分的收敛准则和比较判别法.

12. 曲面的面积. 用二重积分表示曲面面积.

13. 第一型和第二型曲线积分的性质, 化曲线积分为定积分.

14. 沿闭曲线的第二型曲线积分、格林公式.

15. 第一型和第二型曲面积分. 逐段光滑曲面的定向.

16. 斯托克斯公式.

17. 高斯–奥斯特洛格拉德斯基公式.

18. 微分形式中的变量变换. 微分形式沿定向曲面的积分.

19. 一般的斯托克斯公式

20. 位势向量场和无源向量场. 曲线积分与积分路径无关的条件.

21. 向量场的散度和旋度. 向量分析的基本公式.

参考文献

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. Т. I, II. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.

[2] Валле Пуссен Ш. Курс анализа бесконечно малых. Т. I, II. Л.; М.: ГТТИ, 1933.

[3] Уиттекер Е. Г., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. Т. I, II. Л.; М.: ГТТИ, 1933.

[4] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчеления. Т. I—Ш. М.: Физматтиз, 1962.

[5] Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

[6] Дьедонне Ж. Основы математического анализа. М.: Мир, 1964.

[7] Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. I, II . М.: Наука, 1990.

[8] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. I—Ш. М.: Дрофа, 2003.

[9] Виноградов И. М. Дифференциальное исчисление. М.: Наука, 1985.

[10] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. I. Изд. 4-е, перераб. и доп., 1982; Ч. II. М.: Наука, 1980.

[11] Камынин Л. И. Курс математического анализа. Ч. I, II. 1993, 1995. М.: Изд-во Моск. ун-та.

[12] Зорич В. А. Математический анализ. Ч. I. М.: Фазис, 1997. Ч . II. М.: Наука, 1990.

[13] Садовничий В. А. Теория операторов. М.: Дрофа, 2001.

[14] Ландау Э. Основы анализа. М.: ИЛ, 1947.

[15] Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.

[16] Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по

математическому анализу. М.: Дрофа, 2001.
[17] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. I, II. Изд. 3-е. М.: Наука, 1978.
[18] Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
[19] Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983.
[20] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987.
[21] Малышев Ф. М. Симплециальные системы линейных уравнений. В кн.: Алгебра. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. С. 53—56.
[22] Крыжановский Д. А. Sur les différentes définitions de limite. Одеса. Наукови записки науково-дослидчих катедр. 1924. Т. 1 (№8—9),с. 1—10.
[23] Гливенко В. И. Опыт общего определения интеграла. Докл. АНСССР, 1937. Т. 4, № 2, с. 61—63.
[24] Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. A generalisation of the Heine limit for functions which converge on a base. Analysis Math. 1993, 30, № 4, p . 161—171.
[25] Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Об эквивалентности двух типов сходимости по базе множеств. Докл.РАН 1993,т. 330,№ 6, с. 677—679.
[26] Архипов Г. И., Садовничий В. А. Чубариков В. Н. О сходимости по декартову произведению баз и о последовательных пределах. Докл. РАН. 1994, т. 339, № 4, с. 437—438.
[27] Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Об общей формуле Стокса. Вестник МГУ. Сер. Мат., Мех. 1995,№ 2, с. 34—44.
[28] Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. О двойных и повторных пределах по базе. Вестник МГУ. Сер. Мат., Мех. 1995,№ 5, с. 31.
[29] Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. О равномерной сходимости Функций в смысле Гейне. ДАН. 1996, т. 347,№ 3, с. 298—299.
[30] Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н О равномерной поточечной сходимости по базе множеств. Вестник МГУ. Сер. Мат., Мех. 1997,№ 1, с. 70 72.
[31] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М, 1967.
[32] Gordon R. A. An iterated limits theorem applied to the Henstok integral. Real analysis Exchange. 1995/96, v. 21(2)p. 774—781.
[33] Lyche R. T. Sur les fonctions d'une variable réelle. Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandliger.—1938, Bd. XI, № 2, S. 4—6.
[34] Nagell T. Introduction to Number Theory. Stockholm.: Wiley & Sons, 1951.
[35] De la Vallée Poussin Ch.-J. Mém. de l'Acad. de Belgique. 1896, v. LIII, № 6.
[36] Chaundy T. W., Joliffe A. E. The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series. Proc. London Math. Soc. (2), 1916, v. 15, p. 214—216.
[37] Hardy G. H. Some theorems concerning trigonometrical series of a special type. Proc. London Math. Soc. (2), 1930, v. 32, p. 441—448.

名词索引

G

H

L

Z

郑重声明

俄罗斯数学教材选译

•数学天元基金资助项目•

书名	作者
* 数学分析 (第一卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
数学分析 (第二卷) (第 4 版)	В. А. 卓里奇
* 微积分学教程 (第一卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第二卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 微积分学教程 (第三卷) (第 8 版)	Г. М. 菲赫金哥尔茨
* 数学分析讲义 (第 3 版)	Г. И. 阿黑波夫, В. А. 萨多夫尼奇, В. Н. 丘巴里阔夫
代数学引论 I: 基础代数	А. И. 柯斯特利金
代数学引论 II: 线性代数	А. И. 柯斯特利金
代数学引论 III: 代数结构基础	А. И. 柯斯特利金
* 微分几何与拓扑学简明教程	А. С. 米先柯, А. Т. 福明柯
现代几何学: 方法与应用 (第一卷) 几何曲面、变换群与场 (第 5 版)	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
现代几何学: 方法与应用 (第二卷) 流形上的几何与拓扑 (第 5 版)	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
现代几何学: 方法与应用 (第三卷) 同调论引论 (第 5 版)	Б. А. 杜布洛文, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯
* 函数论与泛函分析初步 (第 7 版)	А. Н. 柯尔莫戈洛夫, С. В. 佛明
* 复变函数论方法 (第 6 版)	М. А. 拉夫连季耶夫, Б. В. 沙巴特
* 常微分方程 (第 6 版)	Л. С. 庞特里亚金
随机过程论	А. В. 布林斯基, А. Н. 施利亚耶夫
* 经典力学中的数学方法 (第 4 版)	В. И. 阿诺尔德
* 理论力学 (第 3 版)	А. П. 马尔契夫
连续介质力学 (I)	Л. И. 谢多夫
连续介质力学 (II)	Л. И. 谢多夫

说明: 加 * 者已出版.

订购办法:

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购. 书款通过邮局汇款或银行转帐均可. 购书免邮费, 发票随后寄出.

通过邮局汇款:

北京西城区德外大街 4 号高教读者服务部
邮政编码: 100011

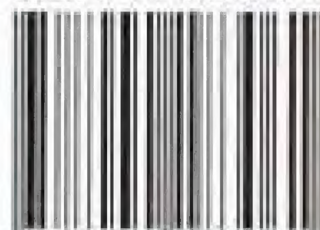
通过银行转帐:

单位名称: 北京高教沙滩读者服务部
开 户 行: 北京银行德外支行
银行帐号: 700120102030302
单位地址: 北京西城区德外大街 4 号
电　　话: 010-58581118, 010-58581117, 010-58581116, 010-58581115, 010-58581114
传　　真: 010-58581113

本书是俄罗斯莫斯科大学数学力学系现行的数学分析课程的教材，反映了作者较新的数学教学思想与方法。通过本书可了解近年来俄罗斯大学数学系的数学分析课的教学与改革的情况。全书共分四个部分21章。第一部分(第1－6章)为单变量函数的微分学，第二部分(第7－14章)为黎曼积分、多变量函数的微分学，第三部分(第15－18章)为函数级数与参变积分，第四部分(第19－21章)为多重黎曼积分、曲面积分。书末附有用于讨论班和考试的示范性问题和习题。

本书可供数学类专业的本科生、研究生、教师和研究人员参考使用。

ISBN 7-04-018306-4



定价 65.00 元